Кн. Б. Голицынъ.

ЛЕКЦІИ ПО СЕЙСМОМЕТРІИ.

Fürst B. Galitzin.

VORLESUNGEN ÜBER SEISMOMETRIE.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
Вас. Остр., 9 линія, № 12.
1912.

Напечатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ.

Іюнь 1912 г. Непремѣнный Секретарь, Академикъ *С. Ольденбургъ*.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Глава V.

Теорія горизонтальнаго маятника.

Глава VI.

Гальванометрическій методъ регистраціи.

Глава VII.

Опредѣленіе постоянныхъ сейсмографа.

Глава VIII.

Глава IX.

Глава X.

Изслѣдованіе сейсмограммъ.

Глава XI.

Глава XII.

Теорія механической регистраціи.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Настоящія лекціи по сейсмометріи были прочитаны весной и лѣтомъ текущаго 1911 года въ цѣляхъ подготовленія научнаго персонала для завѣдыванія различными русскими сейсмическими станціями и для выполненія различныхъ научныхъ работъ при Центральномъ Бюро Сейсмической Комиссіи.

Кромѣ лицъ, приглашенныхъ на службу въ Сейсмическую Комиссію, лекціи посѣщались и нѣкоторыми посторонними вольнослушателями.

Лекціи читались въ помѣщеніи Физической Лабораторіи Академіи Наукъ; въ общемъ было прочитано 89 часовыхъ лекцій. Наравнѣ со слушаніемъ теоретическаго курса, слушатели занимались, подъ руководствомъ лаборантовъ И. И. Вилипа и П. М. Никифорова, различными практическими работами, относящимися къ изслѣдованію разныхъ сейсмическихъ инструментовъ и опредѣленію ихъ постоянныхъ, обработкой сейсмограммъ и пр.

Настоящій курсъ далеко не можетъ считаться исчерпывающимъ, такъ какъ нѣкоторыхъ вопросовъ пришлось поневолѣ коснуться лишь вскользь; тѣмъ не менѣе въ настоящихъ лекціяхъ, распадающихся на 12 отдѣльныхъ главъ, содержаніе коихъ указано въ прилагаемомъ оглавленіи, разсмотрѣны главнѣйшіе вопросы современной сейсмометріи.

Описаніе различныхъ типовъ сейсмографовъ особенно страдаетъ неполнотой, такъ какъ главная цѣль заключалась въ томъ, чтобы познакомить слушателей съ тѣми типами приборовъ и методовъ наблюденій, которые примѣняются на *русскихъ* сейсмическихъ станціяхъ, и не входить столько въ описаніе различныхъ конструктивныхъ деталей приборовъ, сколько разсмотрѣть самые *принципы* устройства различныхъ типовъ сейсмографовъ.

Геологическая часть сейсмологіи оставлена здѣсь совершенно безъ разсмотрѣнія, такъ какъ имѣлось главнымъ образомъ въ виду сосредоточить вниманіе на *измѣрительной* части сейсмологіи. Вслѣдствіе этого настоящій курсъ и озаглавленъ «Лекціи по *сейсмометріи*».

Къ тому-же съ геологической частью сейсмологіи слушатели имѣли возможность познакомиться изъ нѣсколькихъ лекцій, прочитанныхъ А. П.

Герасимовымъ въ томъ-же помѣщенiи Физической Лабораторiи Академiи Наукъ.

Въ настоящемъ курсѣ проводилось стремленiе, по возможности, не оставлять ни одного высказываемаго положенiя или приводимой формулы безъ доказательства, что требовало иногда довольно продолжительныхъ и утомительныхъ выкладокъ. При этомъ приходилось поневолѣ вдаваться въ разныя второстепенныя подробности, чтобы сохранить за изложенiемъ характеръ ясности и убѣдительности.

Руководствуясь этими-же соображенiями пришлось посвятить цѣлую первую главу изложенiю основныхъ положенiй теорiи упругости, безъ знанiя которыхъ трудно усвоить себѣ теорiю законовъ распространенiя различныхъ типовъ сейсмическихъ волнъ.

Въ тѣхъ-же видахъ отдѣльный § 2 Главы VII посвященъ изложенiю теорiи способа наименьшихъ квадратовъ, имѣющiй при обработкѣ результатовъ различныхъ измѣренiй важное практическое значенiе.

Настоящiй курсъ страдаетъ несомнѣнно многими недочетами, но, ввиду бѣдности современной сейсмической литературы въ систематизированныхъ курсахъ по теоретической сейсмометрiи, печатанiе настоящихъ лекцiй можетъ принести свою долю пользы въ смыслѣ восполненiя упомянутаго пробѣла.

Сейсмометрiя представляетъ собою еще совершенно молодую науку, которая тѣмъ не менѣе, за короткое время своего существованiя, съумѣла выдвинуть цѣлый рядъ важныхъ и въ высшей степени интересныхъ вопросовъ геофизики и намѣтить путь къ ихъ рѣшенiю. Она затрагиваетъ уже теперь самыя сложныя задачи о внутреннемъ строенiи земного шара, объ упругихъ свойствахъ земли какъ цѣлаго, о предсказанiи землетрясенiй и пр., и въ дальнѣйшемъ своемъ развитiи откроетъ несомнѣнно совершенно новые горизонты.

Серьезнымъ препятствiемъ къ широкому ознакомленiю съ этой молодой наукой, представляющей столько новаго и заманчиваго, и которая примыкаетъ непосредственно къ физикѣ, понимая терминъ физика въ широкомъ смыслѣ этого слова, служитъ то обстоятельство, что до сихъ поръ почти ни при одномъ изъ русскихъ университетовъ не читается систематическiй курсъ сейсмологiи. Лицамъ, интересующимся этой наукой, приходится поневолѣ обращаться къ крайне разбросанной сейсмической литературѣ, къ отдѣльнымъ научнымъ статьямъ и работамъ, чѣмъ крайне затрудняется усвоенiе предмета.

Въ этомъ отношенiи настоящiй курсъ окажется быть можетъ полезнымъ, какъ *пособiе* къ изученiю современной сейсмометрiи.

Августъ, 1911 г.

ВВЕДЕНІЕ.

Землетрясенія дѣлятся, въ зависимости отъ причинъ ихъ возникновенія, на три главныхъ класса: 1) вулканическія, вызванныя внезапными подземными взрывами въ сосѣдствѣ съ вулканами; 2) обвальныя, когда въ тѣхъ пустотахъ, которыя кроются въ нѣкоторыхъ мѣстахъ въ нѣдрахъ земли, происходятъ внезапные обвалы или провалы и 3) тектоническія, когда происходитъ внезапное смѣщеніе слоевъ горныхъ породъ вслѣдствіе кряжеобразовательныхъ процессовъ.

Во всѣхъ трехъ случаяхъ происходитъ нарушеніе условій равновѣсія внутреннихъ слоевъ земли, которое сопровождается возникновеніемъ упругихъ колебаній въ горныхъ породахъ. Эти колебанія, достигая поверхности земли, приводятъ въ сотрясеніе верхніе пласты земной оболочки и вызываютъ явленія, извѣстныя подъ названіемъ землетрясеній.

То мѣсто внутри земной коры, гдѣ первоначально произошло нарушеніе равновѣсія слоевъ, называется *очагомъ* землетрясенія или *гипоцентромъ*. Ближайшая къ гипоцентру точка земной поверхности называется *эпицентромъ*. Такимъ образомъ гипоцентръ, эпицентръ и центръ земли лежатъ на одной прямой линіи. У поверхности земли самое сильное проявленіе землетрясенія наблюдается въ эпицентрѣ.

Не подлежитъ никакому сомнѣнію, что, какъ гипоцентръ, такъ и эпицентръ, не суть опредѣленныя точки; это несомнѣнно опредѣленныя области, имѣющія бо́льшее или меньшее протяженіе. Однако, эти области, которыя могутъ въ случаѣ тектоническихъ землетрясеній имѣть очень растянутую фигуру, расположенную вдоль какой-нибудь сбросовой линіи, вообще говоря настолько малы въ сравненіи съ размѣрами всей земли, что мы можемъ, для простоты изложенія, въ извѣстномъ разстояніи разсматривать ихъ до нѣкоторой степени какъ опредѣленныя точки, подразумѣвая, однако, всегда подъ эпицентромъ середину дѣйствительной эпицентральной области.

Первые два класса землетрясеній наблюдаются сравнительно рѣдко, причемъ гипоцентръ лежитъ обыкновенно не глубоко. Въ виду этого эти типы землетрясенія имѣютъ почти исключительно мѣстное значеніе и въ

нѣкоторомъ, сравнительно небольшомъ, разстояніи отъ эпицентра вовсе и не ощущаются.

Огромное большинство землетрясеній тектоническаго происхожденія, причемъ послѣднія бываютъ иногда чрезвычайно разрушительны. Когда очагъ такого землетрясенія лежитъ глубоко, то землетрясеніе на поверхности земли охватываетъ уже большую область. Въ этомъ случаѣ колебаніе почвы ощущается непосредственно людьми въ весьма значительныхъ удаленіяхъ отъ эпицентральной области, а чувствительные сейсмографы могутъ отмѣтить такое землетрясеніе въ любомъ пунктѣ на поверхности всего земного шара.

Тектоническія землетрясенія обязаны своимъ происхожденіемъ тѣмъ дислокаціоннымъ процессамъ, которые происходятъ внутри земной коры при постепенномъ охлажденіи и сокращеніи земного шара. Въ осадочныхъ горныхъ породахъ происходятъ при этомъ разные сдвиги, смѣщенія, сбросы; образуются интенсивныя складчатости слоевъ, находящихся въ состояніи весьма значительнаго упругаго натяженія. Явленія эти тѣсно связаны съ процессами горообразованія и сильнѣе всего наблюдаются въ областяхъ значительныхъ геосинклиналей или въ сосѣдствѣ съ большими морскими глубинами. Тамъ, гдѣ имѣется много складчатыхъ горъ или вообще, гдѣ имѣются значительныя и быстрыя измѣненія рельефа земной поверхности, можно ожидать встрѣтить и наибольшія упругія натяженія различныхъ слоевъ земли. Съ теченіемъ времени равновѣсіе такихъ слоевъ можетъ сдѣлаться чрезвычайно неустойчивымъ, и тогда достаточно какого - нибудь самого незначительнаго внѣшняго импульса, чтобы предѣлъ упругости былъ перейденъ и произошло - бы внезапное смѣщеніе однихъ слоевъ по отношенію къ другимъ, каковое смѣщеніе можетъ вызвать тектоническое землетрясеніе.

Такимъ образомъ внутренніе слои земли, находящіеся въ состояніи упругаго натяженія, подвержены непосредственно дѣйствію различныхъ упругихъ силъ. Когда въ какой-нибудь области произойдетъ, отъ той или иной причины, крупное нарушеніе равновѣсія слоевъ, то, въ силу основной теоремы о распространеніи импульсовъ, другіе слои земли также будутъ выведены изъ своего состоянія равновѣсія и будутъ испытывать извѣстныя деформаціи и придутъ при этомъ въ состояніе движенія. Эти движенія будутъ, однако, значительно менѣе интенсивны, чѣмъ въ очагѣ, и, если въ этихъ болѣе удаленныхъ областяхъ предѣлъ упругости не будетъ перейденъ, то эти движенія будутъ имѣть характеръ лишь болѣе мелкихъ колебаній около опредѣленнаго средняго положенія равновѣсія. Движенія эти обусловливаются исключительно тѣми силами упругости, которыя вызываются деформаціями слоевъ.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что ученіе о землетрясеніяхъ, какъ о нѣкоторомъ механическомъ процессѣ, тѣсно связано съ теоріей упругости.

Эта теорія даетъ возможность освѣтить эти явленія съ совершенно новой точки зрѣнія и даетъ ключъ къ уразумѣнію тѣхъ сложныхъ колебательныхъ процессовъ, которые происходятъ во всей земной корѣ, когда въ какой-нибудь области произошло, отъ той или иной причины, крупное нарушеніе равновѣсія внутреннихъ слоевъ земли.

Этотъ путь изслѣдованія землетрясеній чрезвычайно интересный и плодотворный, но къ сожалѣнію сравнительно мало еще разработанный. Мы по этому пути тѣмъ не менѣе пойдемъ, но для цѣльности и ясности дальнѣйшаго изложенія, цѣлесообразно не пользоваться тотчасъ-же готовыми формулами и положеніями теоріи упругости, а посвятить основнымъ началамъ этого ученія отдѣльную, спеціальную главу.

Глава I.

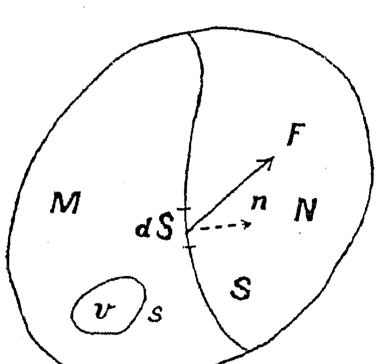
Основныя положенія теоріи упругости.

§ 1.

Внутреннія силы.

Мы ограничимся разсмотрѣніемъ только тѣлъ изотропныхъ, характеризуемыхъ, въ отличіе отъ тѣлъ кристаллическихъ, тѣмъ, что различныя физическія свойства тѣла не зависятъ отъ того или иного направленія, и во всѣхъ направленіяхъ одинаковы. Что-же касается *однородности*, то въ примѣненіи къ земному шару какъ цѣлому такая однородность, очевидно, не существуетъ, такъ какъ по мѣрѣ удаленія отъ поверхности въ глубь земли плотность и различныя упругія свойства слоевъ мѣняются. Это обстоятельство мы впослѣдствіи примемъ во вниманіе и учтемъ, но, ограничиваясь пока небольшими областями въ опредѣленномъ разстояніи отъ центра земли, мы можемъ считать эти области по своимъ физическимъ свойствамъ достаточно однородными и примѣнять къ нимъ основныя уравненія теоріи упругости, выведенныя для тѣлъ изотропныхъ и однородныхъ.

Черт. 1.



Итакъ предположимъ, что мы имѣемъ изотропное и однородное тѣло M (см. черт. 1), подверженное дѣйствію нѣкоторой системы силъ.

Черезъ это тѣло проведемъ мысленно произвольную поверхность S и возьмемъ на ней безконечно-малый элементъ dS. Представимъ себѣ затѣмъ, что вся часть тѣла, лежащая вправо отъ поверхности S, т.-е. часть N, удалена. Тогда, для возстановленія равновѣсія, надо къ каждому элементу поверхности S, въ родѣ dS, приложить внѣшнюю силу, которая соотвѣтствуетъ по своей величинѣ и направленію дѣйствію удаленной части N на данный элементъ поверхности dS и которая,

такимъ образомъ, это дѣйствіе вполнѣ замѣняетъ. Обозначимъ эту силу черезъ F.

Сила F разсчитывается всегда на единицу поверхности, такъ что фактическая сила, дѣйствующая на элементъ поверхности dS, будетъ FdS. Сила F называется равнодѣйствующимъ натяженіемъ въ данной точкѣ поверхности S, причемъ въ твердыхъ тѣлахъ направленіе F, вообще говоря, составляетъ нѣкоторый уголъ съ направленіемъ нормали къ поверхности n. Натяженія считаются положительными, когда они направлены наружу, т.-е. отъ элемента поверхности въ сторону мысленно удаленной части тѣла N.

Такимъ образомъ, если мы мысленно выдѣлимъ внутри тѣла объемъ v (см. черт. 1), то дѣйствіе остальныхъ частей тѣла на поверхность s, ограничивающую объемъ v, сведется къ системѣ упругихъ силъ (натяженій), дѣйствующихъ непрерывнымъ образомъ на различные элементы поверхности s.

При этомъ само собою разумѣется, что, въ силу основного принципа механики, по которому дѣйствіе всегда равно и прямопротивно противодѣйствію, на каждый элементъ поверхности dS дѣйствуетъ въ противоположномъ направленіи другая сила, равная и прямопротивная F, и происходящая отъ тѣхъ частей тѣла M, которыя лежатъ влѣво отъ поверхности S. Однако, выдѣляя изъ тѣла опредѣленный объемъ v, намъ съ этими *внутренними* силами можно и не считаться.

Здѣсь важно лишь то, что дѣйствіе даннаго тѣла на поверхность s, ограничивающую объемъ v, можетъ быть сведено къ системѣ силъ, дѣйствующихъ на поверхность s, причемъ эти силы по отношенію къ объему v являются силами *внѣшними*.

Если-бы тѣло M было жидкое, то сила F, дѣйствующая у элемента поверхности dS, представила-бы собою ничто иное какъ *давленіе* жидкости, причемъ это давленіе, па основаніи законовъ гидростатики, было-бы *перпендикулярно* къ dS и направлено отъ части N влѣво. Такимъ образомъ давленіе въ жидкихъ тѣлахъ можно разсматривать какъ отрицательное натяженіе.

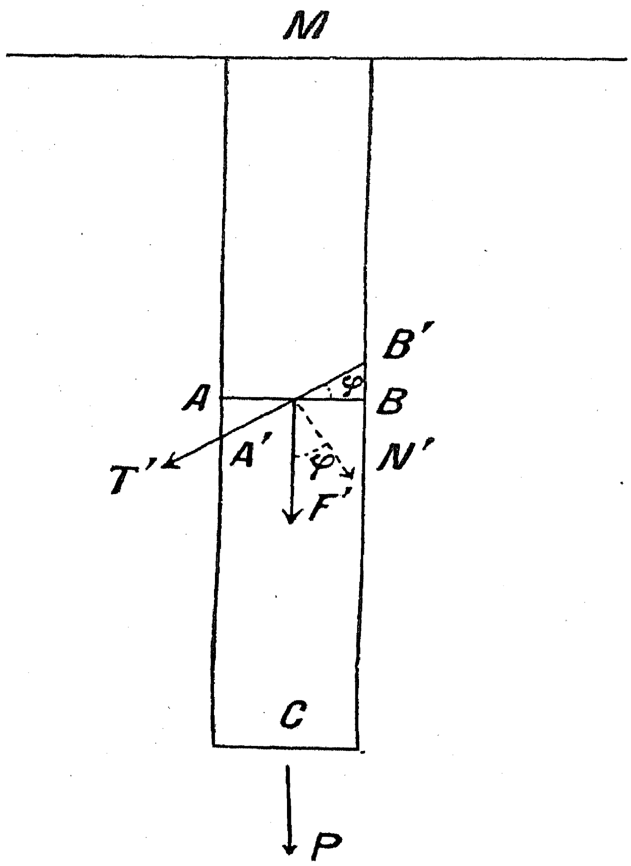
Въ твердыхъ тѣлахъ, какъ раньше было указано, натяженіе F составляетъ вообще нѣкоторый уголъ съ нормалью къ тому элементу поверхности, на который эта сила дѣйствуетъ. Въ этомъ можно убѣдиться изъ слѣдующихъ простыхъ соображеній.

Представимъ себѣ цилиндрическій стержень MC, закрѣпленный вверху въ M и подверженный полному растягивающему усилію P (см. черт. 2).

Возьмемъ нормальное сѣченіе стержня AB; площадь этого сѣченія обозначимъ черезъ S.

Тогда сила, дѣйствующая на единицу поверхности AB, будетъ

Черт. 2.



$$F = \frac{P}{S}.$$

Эта сила соотвѣтствуетъ тому, что мы назвали натяженіемъ. Въ данномъ случаѣ это натяженіе совпадаетъ съ нормалью къ AB.

Возьмемъ теперь другое сѣченіе $A'B'$, наклоненное къ нормальному сѣченію подъ угломъ φ.

Пусть площадь этого сѣченія будетъ S'.

Тогда

$$S' = \frac{S}{\cos \varphi}.$$

На это сѣченіе дѣйствуетъ то-же растягивающее усиліе P, но въ этомъ случаѣ соотвѣтствующее натяженіе F', отнесенное къ единицѣ поверхности, будетъ

$$F' = \frac{P}{S'} = \frac{P}{S} \cos \varphi = F \cos \varphi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Натяженіе F' теперь уже не совпадаетъ болѣе съ нормалью къ $A'B'$, а составляетъ съ ней уголъ φ.

Силу F' можно разложить на двѣ силы: на одну N', совпадающую по направленію съ нормалью къ $A'B'$, и на другую T', дѣйствующую въ плоскости $A'B'$.

Изъ чертежа и изъ формулы (1) видно, что

$$N' = F \cos^2 \varphi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

и

$$T' = F \cos \varphi \sin \varphi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Сила N' называется нормальнымъ, а T' касательнымъ или тангенціальнымъ натяженіемъ.

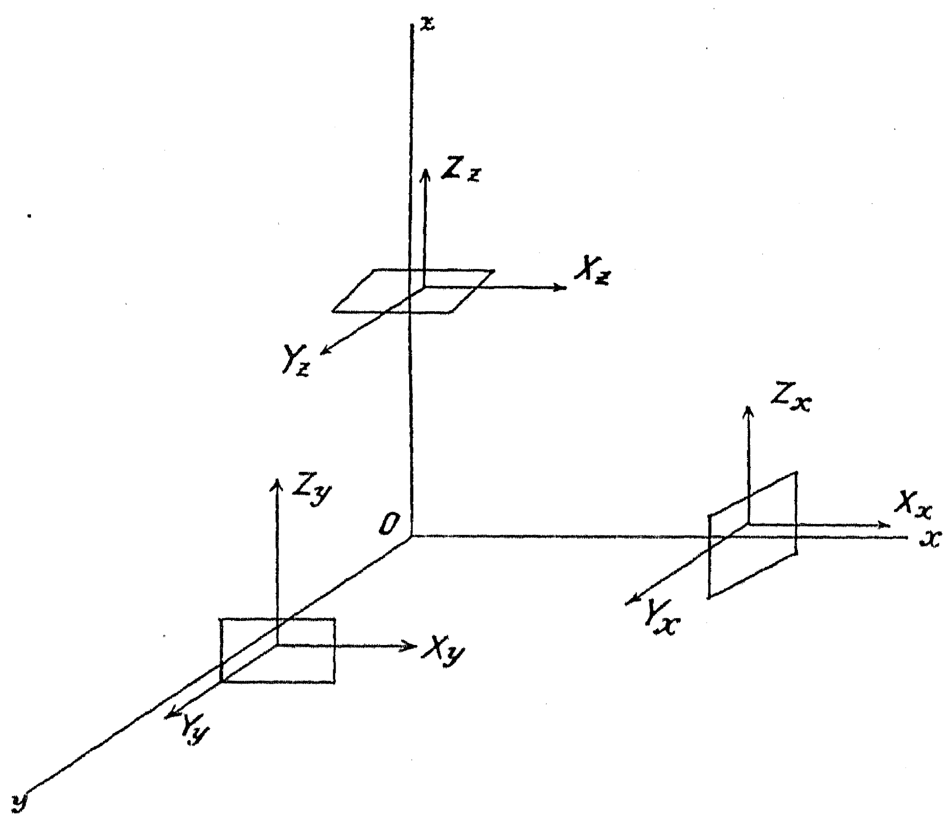
Силу Т' въ свою очередь можно разложить на любыя два взаимно-перпендикулярныя направленія, взятыя въ плоскости $A'B'$.

Такимъ образомъ натяженіе, дѣйствующее на любой элементъ поверхности, взятый внутри твердаго тѣла, можно отождествить съ системой трехъ взаимно-перпендикулярныхъ силъ или натяженій, изъ которыхъ одна совпадаетъ съ нормалью къ данному элементу поверхности, а другія двѣ дѣйствуютъ подъ прямымъ угломъ другъ къ другу и параллельно самой поверхности.

Установивши этотъ фактъ, возьмемъ прямоугольную систему координатъ, начало которой помѣстимъ въ любой точкѣ O внутри тѣла, и введемъ слѣдующія обозначенія.

Возьмемъ элементарную площадку на оси x и расположимъ ее перпен-

Черт. 3.



дикулярно къ этой оси (см. черт. 3). Соотвѣтствующее нормальное натяженіе, отнесенное, какъ всегда, къ единицѣ поверхности, обозначимъ черезъ X_x, а соотвѣтствующее касательное натяженіе представимъ себѣ разложеннымъ параллельно осямъ y и z. Соотвѣтствующія составляющія обозначимъ черезъ Y_x и Z_x. Индексъ (x) у этихъ выраженій обозначаетъ, что разсматриваемая площадка расположена перпендикулярно къ оси x. Всѣ эти натяженія мы будемъ считать положительными, когда они дѣйствуютъ въ сторону возрастающихъ координатъ.

Взявши элементарную площадку перпендикулярно къ оси y, получимъ опять одну нормальную силу Y_y и двѣ касательныя X_y и Z_y.

Когда-же площадка взята перпендикулярно къ оси z, то соотвѣтствующія натяженія будутъ Z_z, X_z и Y_z.

Такимъ образомъ въ любой точкѣ даннаго твердаго тѣла, въ зависимости отъ оріентировки площадки, приходится имѣть дѣло со слѣдующими девятью проэкціями натяженій:

$$\begin{array}{ccc} X_x, & Y_x, & Z_x, \\ X_y, & Y_y, & Z_y, \\ X_z, & Y_z, & Z_z. \end{array}$$

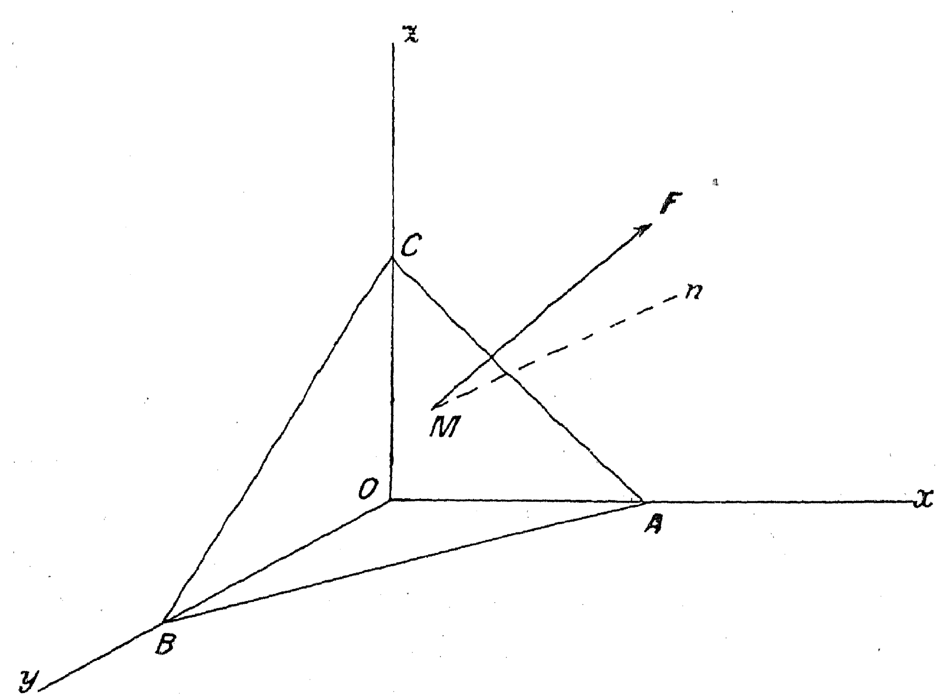
Взаимное расположеніе этихъ силъ видно на чертежѣ 3.

Силы, расположенныя въ предыдущей табличкѣ по діагонали слѣва направо, представляютъ собою нормальныя натяженія.

Условившись въ этихъ обозначеніяхъ, возьмемъ элементарную площадку, оріентированную, какъ угодно, по отношенію къ осямъ координатъ. Пусть *равнодѣйствующее* натяженіе на эту площадку, отнесенное, какъ всегда, къ единицѣ поверхности, будетъ F, а проэкціи F на оси координатъ X, Y, Z (безъ индексовъ).

Найдемъ теперь зависимость между X, Y, Z и ранѣе установленными величинами X_x, X_y, X_z, Y_x и т. д.

Черт. 4.



Для этой цѣли возьмемъ на осяхъ координатъ соотвѣтственно три точки A, B и C въ весьма близкомъ, въ предѣлѣ въ безконечно-близкомъ, разстояніи отъ начала координатъ O, и соединимъ эти точки между собою прямыми линіями (см. черт. 4).

Мы образуемъ такимъ образомъ треугольникъ, площадь котораго ABC обозначимъ черезъ S. Мы проводимъ этотъ треугольникъ такъ, чтобы онъ совпадалъ съ той элементарной площадкой, для которой мы ищемъ проэкціи равнодѣйствующаго натяженія F.

Пусть нормаль Mn къ площадкѣ ABC составляетъ углы съ осями координатъ x, y, z соотвѣтственно равные α, β и γ. Направленіе-же силы F составляетъ вообще нѣкоторый уголъ съ направленіемъ нормали Mn.

Въ образовавшемся такимъ образомъ тетраедрѣ $OABC$ обозначимъ слѣдующимъ образомъ площади боковыхъ граней:

$$\text{площ. } OBC = S_x$$
$$\text{площ. } OCA = S_y$$
$$\text{площ. } OAB = S_z.$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} S_x &= S\cos\alpha \\ S_y &= S\cos\beta \\ S_z &= S\cos\gamma \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Выразимъ теперь условія равновѣсія нашего элементарнаго тетраедра.

Для равновѣсія требуется, чтобы сумма проэкцій всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на тетраедръ, на каждую изъ осей координатъ, была-бы равна нулю. Это необходимое условіе для того, чтобы тетраедръ не имѣлъ-бы поступательнаго движенія вдоль той или иной оси. Такъ какъ боковыя грани S_x, S_y, S_z тетраедра обращены въ сторону отрицательныхъ осей координатъ и мы считаемъ всегда натяженія дѣйствующими на данный элементъ отъ данной поверхности наружу, то мы получимъ, принимая еще во вниманіе, что всѣ натяженія относятся всегда къ единицѣ поверхности, слѣдующее условіе равновѣсія для проэкція силъ на ось x-овъ:

$$XS - X_x S_x - X_y S_y - X_z S_z = 0.$$

Къ этимъ силамъ натяженія слѣдовало-бы присоединить еще проэкціи внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ непосредственно на объемъ даннаго тетраедра $OABC$. Но эти внѣшнія силы пропорціональны *объему* элементарнаго тетраедра (напр. тяготѣніе), натяженія-же пропорціональны его боковымъ поверхностямъ, а потому, если тетраедръ безконечно малъ, то боковыя натяженія будутъ безконечно - малыми величинами второго порядка, а прочія

силы безконечно-малыми третьяго порядка, а потому ихъ, въ сравненіи съ первыми, можно вовсе и не разсматривать.

Такимъ-же образомъ для другихъ двухъ осей получимъ слѣдующія два соотношенія:

$$YS - Y_x S_x - Y_y S_y - Y_z S_z = 0$$

$$ZS - Z_x S_x - Z_y S_y - Z_z S_z = 0$$

Замѣняя въ этихъ выраженіяхъ S_x, S_y и S_z ихъ величинами изъ формулъ (4) и сокращая на S, получимъ окончательно:

$$\left.\begin{aligned} X &= X_x \cos\alpha + X_y \cos\beta + X_z \cos\gamma \\ Y &= Y_x \cos\alpha + Y_y \cos\beta + Y_z \cos\gamma \\ Z &= Z_x \cos\alpha + Z_y \cos\beta + Z_z \cos\gamma \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Формулы (5) даютъ проэкціи натяженія F, дѣйствующаго на любую площадку, нормаль къ которой составляетъ углы α, β и γ съ осями координатъ.

Выведемъ теперь условія равновѣсія элементарнаго параллелепипеда.

Въ каждой точкѣ даннаго твердаго тѣла проэкціи натяженій X_x, X_y, X_z, Y_x и т. д. имѣютъ опредѣленное значеніе, но съ измѣненіемъ положенія точки внутри тѣла измѣняются и всѣ эти 9 величинъ. Слѣдовательно X_x, X_y и т. д. надо разсматривать какъ функціи координатъ x, y, z, опредѣляющихъ положеніе данной точки твердаго тѣла.

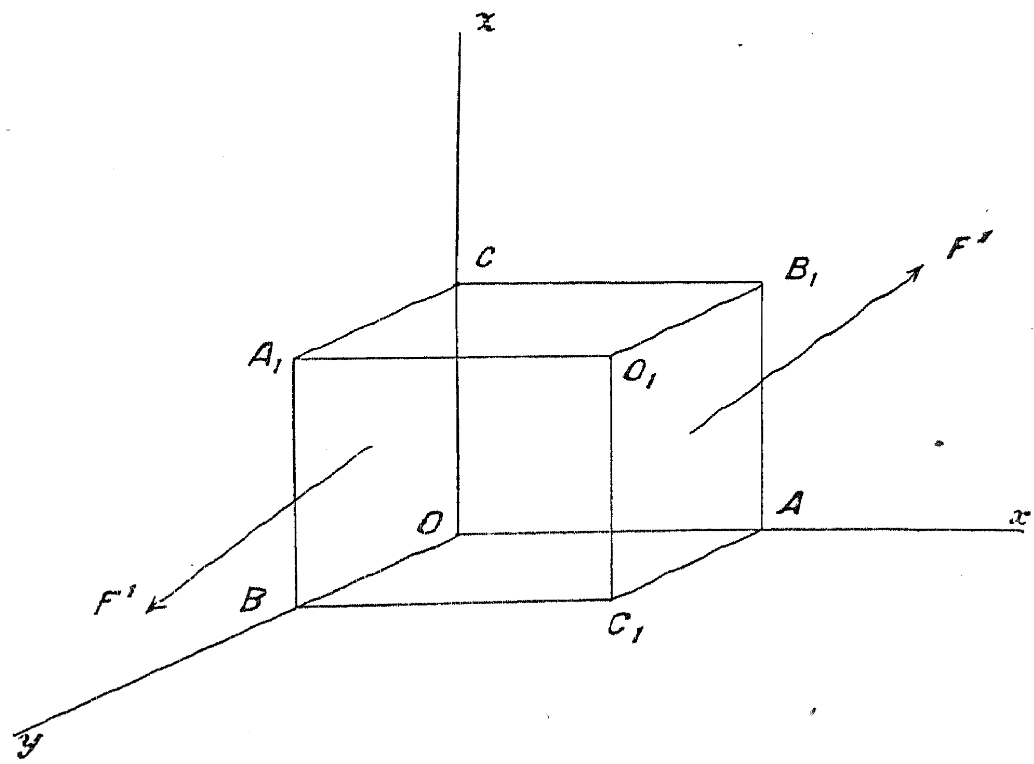
Возьмемъ теперь элементарный параллелепипедъ, стороны котораго OA, OB и OC равны соотвѣтственно dx, dy, dz (см. черт. 5).

Объемъ этого параллелепипеда будетъ

$$d\tau = dx\, dy\, dz.$$

Натяженіе F', дѣйствующее на площадку $AC_1 O_1 B_1$, расположенную перпендикулярно къ оси x-овъ, направлено слѣва направо, т.-е. отъ площадки наружу. На площадку-же $OBA_1 C$, обращенную въ сторону отрицательныхъ x-овъ, натяженіе F' обращено въ противоположную сторону, причемъ, если параллелепипедъ элементарный, то обѣ эти силы отличаются другъ отъ друга только на безконечно-малую величину. Такимъ образомъ, когда элементарная площадка обращена въ сторону какой-либо отрицательной координатной оси, то соотвѣтствующимъ проэкціямъ натяженія слѣдуетъ приписать знакъ минусъ (—).

Черт. 5.



Выразимъ теперь условія равновѣсія нашего элементарнаго параллелепипеда. Для этого требуется, чтобы сумма проэкцій всѣхъ дѣйствующихъ силъ на каждую изъ осей координатъ была-бы равна нулю.

Разсмотримъ послѣдовательно всѣ силы, дѣйствующія параллельно оси x-овъ.

На площадку OBA_1C дѣйствуетъ сила

$$- X_x \, dy \, dz.$$

Для площадки-же $AC_1O_1B_1$ соотвѣтствующая сила будетъ

$$+ \left(X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x} dx\right) dy \, dz,$$

такъ какъ для этой площадки координата x увеличилась на dx.

Равнодѣйствующая этихъ двухъ силъ будетъ

$$+ \frac{\partial X_x}{\partial x} dx \, dy \, dz = \frac{\partial X_x}{\partial x} d\tau.$$

Возьмемъ теперь площадку OAB_1C.

Соотвѣтствующая проэкція натяженія параллельно оси x-овъ будетъ

$$- X_y \, dx \, dz.$$

Для площадки $A_1 O_1 C_1 B$ соотвѣтствующая проэкція будетъ

$$+\left(X_y + \frac{\partial X_y}{\partial y} dy\right) dx dz.$$

Для равнодѣйствующей этихъ двухъ силъ получимъ

$$\frac{\partial X_y}{\partial y} d\tau.$$

Возьмемъ теперь обѣ площадки перпендикулярныя къ оси z-овъ.

Для площадки $OAC_1 B$ проэкція натяженія параллельно оси x-овъ будетъ

$$- X_z dx dy,$$

а для площадки $CB_1 O_1 A_1$

$$+\left(X_z + \frac{\partial X_z}{\partial z} dz\right) dx dy.$$

Равнодѣйствующая равна

$$\frac{\partial X_z}{\partial z} d\tau.$$

Такимъ образомъ сумма проэкцій на ось x-овъ всѣхъ натяженій, дѣйствующихъ на всѣ шесть граней нашего параллелепипеда, будетъ

$$\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) d\tau.$$

Эта сумма есть безконечно-малая величина третьяго порядка по отношенію къ приращеніямъ координатъ.

Но кромѣ силъ упругости (натяженій) на нашъ параллелепипедъ могутъ дѣйствовать другія внѣшнія силы. Внѣшнія силы обыкновенно относятся къ единицѣ массы вещества.

Если плотность вещества параллелепипеда, т.-е. масса единицы объема есть ρ, то масса всего параллелепипеда будетъ $\rho d\tau$.

Обозначимъ внѣшнюю силу, отнесенную къ единицѣ массы, черезъ F_1, а проэкціи ея на оси координатъ черезъ X_1, Y_1 и Z_1. Сила эта приложена къ центру тяжести безконечно малаго параллелепипеда. Умноживъ X_1, Y_1, Z_1 соотвѣтственно на $\rho d\tau$, получимъ проэкціи дѣйствительныхъ внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на нашъ параллелепипедъ.

Этими внѣшними силами теперь уже пренебрегать нельзя, такъ какъ онѣ могутъ быть такого-же порядка малости, какъ и равнодѣйствующая упругихъ натяженій.

Такимъ образомъ общая сумма проэкцій всѣхъ дѣйствующихъ силъ на ось x-овъ будетъ

$$\left(\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}\right)d\tau+\rho X_1\, d\tau.$$

Для равновѣсія параллелепипеда требуется, чтобы эта сумма была бы равна нулю. Приравнявъ ее такимъ образомъ нулю и сокративъ на $d\tau$, получимъ первое условіе равновѣсія параллелепипеда.

Совершенно подобнымъ-же образомъ мы найдемъ условія равновѣсія для проэкцій силъ на оси y-овъ и z-овъ.

Такимъ образомъ мы получимъ слѣдующія три основныя условія равновѣсія:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}+\rho X_1=0\\ \frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}+\rho Y_1=0\\ \frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}+\rho Z_1=0\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

Эти уравненія выражаютъ собою условіе, что параллелепипедъ не можетъ имѣть поступательнаго движенія параллельно одной изъ координатныхъ осей.

Для равновѣсія эти условія, однако, еще *не достаточны*, такъ какъ, кромѣ поступательныхъ движеній, возможны еще вращательныя движенія параллелепипеда около какой нибудь оси, проходящей черезъ его центръ тяжести. Проведемъ такимъ образомъ черезъ центръ тяжести параллелепипеда оси параллельныя осямъ координатъ и выразимъ условія, чтобы сумма моментовъ всѣхъ дѣйствующихъ силъ относительно каждой изъ этихъ осей была бы равна нулю. Тогда мы получимъ три новыхъ соотношенія, которыя, вмѣстѣ съ уравненіями (6), дадутъ намъ требуемыя шесть условій равновѣсія нашего элементарнаго параллелепипеда.

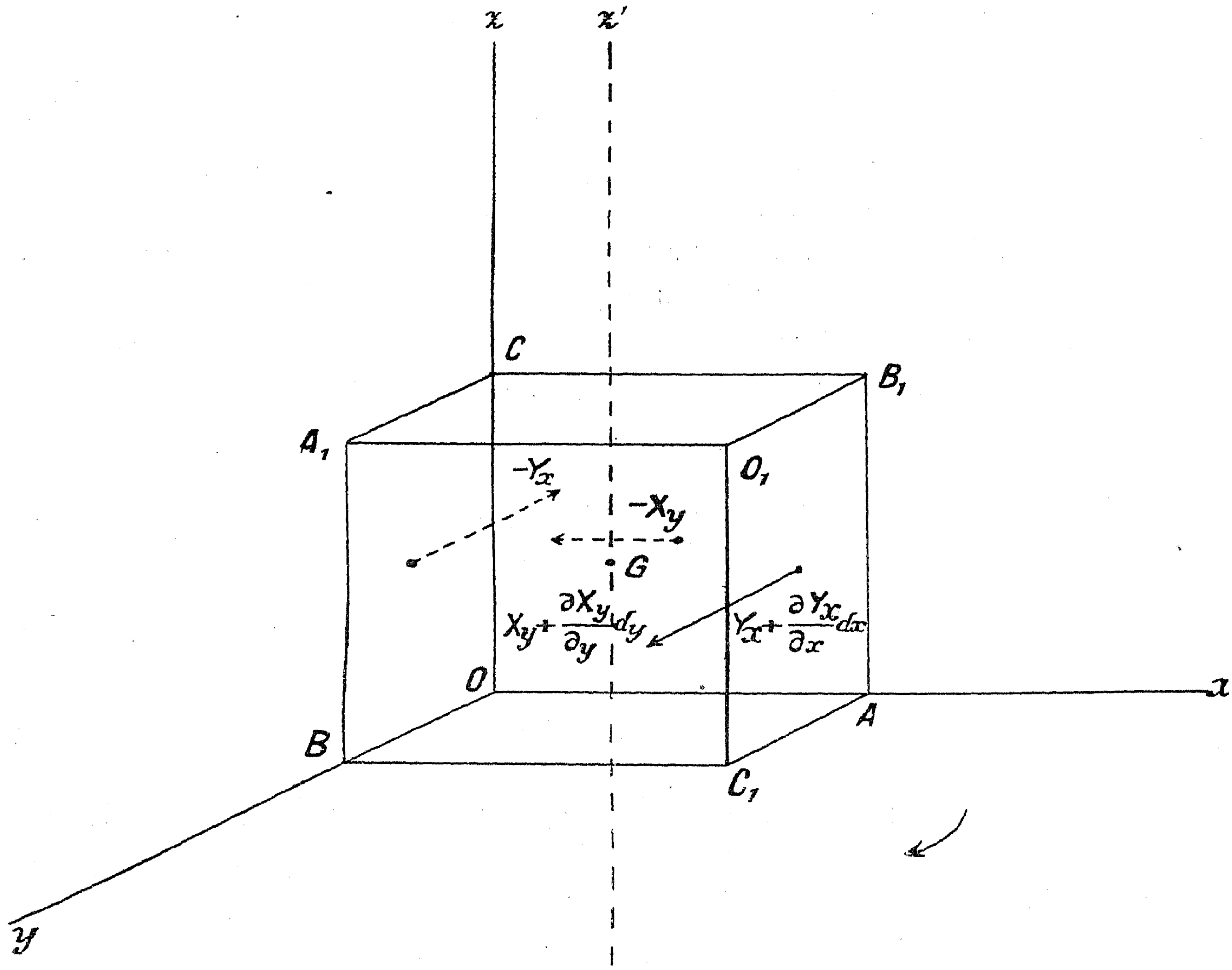
Выразимъ условіе равновѣсія для оси параллельной оси z-овъ и проходящей черезъ центръ тяжести параллелепипеда G (см. черт. 6).

Найдемъ для этого сумму моментовъ всѣхъ силъ относительно оси Gz'.

Условимся считать моментъ силы положительнымъ, когда онъ стремится, если смотрѣть вдоль оси къ началу координатъ, заставить тѣло вращаться въ направленіи движенія часовой стрѣлки.

На заднюю площадку OBA_1C дѣйствуетъ сила $-Y_x\,dydz$; плечо будетъ $\frac{dx}{2}$.

Черт. 6.



Соотвѣтствующій моментъ будетъ положительный и равный

$$Y_x\, dy\, dz\, \frac{dx}{2}.$$

На переднюю площадку $AC_1\, O_1\, B_1$ дѣйствуетъ сила

$$\left(Y_x + \frac{\partial Y_x}{\partial x}\, dx\right) dy\, dz,$$

плечо-же равно $\frac{dx}{2}$.

Соотвѣтствующій моментъ будетъ также положительный и равный

$$Y_x\, dy\, dz\, \frac{dx}{2} + \frac{\partial Y_x}{\partial x}\, dx \cdot dy\, dz \cdot \frac{dx}{2}.$$

Равнодѣйствующій моментъ силъ, дѣйствующихъ на площадки $OBA_1\, C$ и $AC_1\, O_1\, B_1$, будетъ равенъ суммѣ этихъ выраженій, причемъ величинами четвертаго порядка мы можемъ пренебречь.

Итакъ мы будемъ имѣть для искомаго момента

$$Y_x\, dy\, dz\, dx.$$

Обратимся теперь къ площадкамъ $AOCB_1$ и $A_1 O_1 C_1 B$ перпендикулярнымъ оси y-овъ.

На заднюю площадку $AOCB_1$ дѣйствуетъ сила $-X_y\, dx\, dz$; плечо $\frac{dy}{2}$. Моментъ этой силы отрицательный, такъ какъ онъ стремится повернуть параллелепипедъ въ направленіи обратномъ движенію часовой стрѣлки.

$$-X_y\, dx\, dz\, \frac{dy}{2}.$$

На переднюю площадку $A_1 O_1 C_1 B$ дѣйствующая сила будетъ

$$\left(X_y + \frac{\partial X_y}{\partial y} dy\right) dx\, dz,$$

а плечо $\frac{dy}{2}$. Моментъ также отрицательный

$$-X_y\, dx\, dz\, \frac{dy}{2} - \frac{\partial X_y}{\partial y}\, dy\, dx\, dz\, \frac{dy}{2}.$$

Пренебрегая опять величинами высшаго порядка, мы получимъ для равнодѣйствующаго момента

$$-X_y\, dx\, dz\, dy.$$

Другія проэкціи натяженій не даютъ вращательнаго момента около оси Gz'.

Что-же касается внѣшнихъ силъ, то ихъ разсматривать не приходится, такъ какъ моментъ ихъ, въ крайнемъ случаѣ, могъ бы быть величиной только четвертаго порядка малости, но, такъ какъ внѣшнія силы приложены къ центру тяжести безконечно-малаго параллелепипеда, то ихъ моментъ относительно оси Gz' просто равенъ нулю.

Такимъ образомъ общій вращательный моментъ всѣхъ силъ относительно оси Gz' будетъ

$$(Y_x - X_y)\, dx\, dy\, dz.$$

Приравнявъ это выраженіе нулю и сократив на произведеніе дифференціаловъ получимъ новое условіе равновѣсія.

Совершенно подобнымъ-же образомъ мы найдемъ условіе равновѣсія (отсутствіе равнодѣйствующаго вращательнаго момента) относительно

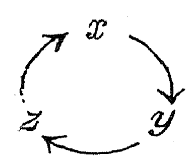
двухъ другихъ осей, проходящихъ черезъ G и соотвѣтственно параллельныхъ осямъ Ox и Oy.

Такимъ образомъ мы получимъ слѣдующія три новыхъ условія равновѣсія:

$$\left.\begin{aligned} Y_x &= X_y \\ Z_y &= Y_z \\ X_z &= Z_x \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (7)$$

Эти формулы показываютъ, что два касательныхъ натяженія, направленныя въ сосѣднихъ плоскостяхъ къ одному и тому же ребру параллелепипеда, равны между собою (см. черт. 3).

Выраженія эти легко запоминаются и пишутся, пользуясь круговой перестановкой буквъ



Такимъ образомъ уравненія (6) и (7) выражаютъ собою окончательныя, необходимыя и *достаточныя* условія равновѣсія нашего элементарнаго параллелепипеда.

Уравненія (7) показываютъ намъ очень любопытное свойство касательныхъ натяженій, а именно, что они всегда попарно равны между собою.

Такимъ образомъ мы видимъ, что, вмѣсто 9 отдѣльныхъ проэкцій натяженій, ранѣе нами установленныхъ, мы имѣемъ въ сущности дѣло только съ шестью отдѣльными величинами.

Для этихъ послѣднихъ цѣлесообразно ввести новыя и болѣе удобныя обозначенія, а именно, пріурочивая цифру 1 къ x, 2 къ y, а 3 къ z,

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= X_x \\ N_2 &= Y_y \\ N_3 &= Z_z \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (8)$$

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= Z_y = Y_z \\ T_2 &= X_z = Z_x \\ T_3 &= Y_x = X_y \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (9)$$

Отдѣльныя N представляютъ собою нормальныя натяженія, а T касательныя, причемъ индексъ при T показываетъ, какая буква *отсутствуетъ* въ соотвѣтствующей проэкціи силъ.

Мы видѣли изъ предыдущаго, что на каждую элементарную площадку внутри тѣла дѣйствуетъ одно нормальное натяженіе и два взаимно перпендикулярныя касательныя натяженія.

Спрашивается теперь, нельзя ли дать нашей элементарной площадкѣ такое положеніе внутри тѣла около выбранной нами точки, чтобы касательныя натяженія были бы равны нулю и чтобы такимъ образомъ равнодѣйствующее натяженіе совпадало-бы по направленію съ нормалью къ площадкѣ?

Оказывается, что это возможно, и что такихъ возможныхъ направленій (направленіе нормали къ площадкѣ) цѣлыхъ три, причемъ всѣ они взаимно перпендикулярны.

Чтобы это доказать, возьмемъ любую систему взаимно перпендикулярныхъ координатныхъ осей x, y, z и какую-нибудь элементарную площадку, нормаль къ которой составляетъ углы α, β и γ съ осями координатъ.

На эту площадку дѣйствуетъ натяженіе F, проэкціи которой на оси координатъ пусть будетъ X, Y, Z.

Мы вывели раньше формулы (5), устанавливающія зависимость между X, Y, Z и проэкціями натяженій X_x, X_y, X_z, Y_x и т. д.

Вводя теперь новыя обозначенія, опредѣляемыя уравненіями (8) и (9), формулы (5) представятся въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} X &= N_1\cos\alpha + T_3\cos\beta + T_2\cos\gamma \\ Y &= T_3\cos\alpha + N_2\cos\beta + T_1\cos\gamma \\ Z &= T_2\cos\alpha + T_1\cos\beta + N_3\cos\gamma \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Мы требуемъ, чтобы равнодѣйствующее натяженіе F совпадало-бы съ нормалью къ площадкѣ.

Для этого надо удовлетворить слѣдующимъ условіямъ:

$$X = F\cos\alpha$$

$$Y = F\cos\beta$$

$$Z = F\cos\gamma.$$

Подставивъ эти выраженія въ формулы (10), получимъ:

$$(N_1 - F)\cos\alpha + T_3\cos\beta + T_2\cos\gamma = 0 \ldots\ldots\ldots (11)$$

$$T_3\cos\alpha + (N_2 - F)\cos\beta + T_1\cos\gamma = 0 \ldots\ldots\ldots (12)$$

$$T_2\cos\alpha + T_1\cos\beta + (N_3 - F)\cos\gamma = 0 \ldots\ldots\ldots (13)$$

Кромѣ того

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Въ этихъ уравненіяхъ проэкціи натяженій N_1, N_2, N_3, T_1, T_2 и T_3 предполагаются заданными.

Мы имѣемъ такимъ образомъ четыре уравненія, изъ которыхъ можемъ опредѣлить четыре неизвѣстныя, α, β, γ и F.

Займемся рѣшеніемъ этихъ уравненій.

Для этого умножимъ уравненіе (11) на T_1, а уравненіе (12) на $-T_2$ и сложимъ оба выраженія. Получимъ

$$\{T_1(N_1 - F) - T_2 T_3\}\cos\alpha + \{T_1 T_3 - T_2(N_2 - F)\}\cos\beta = 0$$

или

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{T_2(N_2 - F) - T_1 T_3}{T_1(N_1 - F) - T_2 T_3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

Теперь умножимъ уравненіе (12) на $(N_3 - F)$, а уравненіе (13) на $-T_1$ и сложимъ оба выраженія. Получимъ

$$\{T_3(N_3 - F) - T_1 T_2\}\cos\alpha + \{(N_2 - F)(N_3 - F) - T_1^2\}\cos\beta = 0$$

или

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{T_1^2 - (N_2 - F)(N_3 - F)}{T_3(N_3 - F) - T_1 T_2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Приравнивая выраженія для $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ изъ формулъ (15) и (16), получимъ

$$[T_2(N_2 - F) - T_1 T_3][T_3(N_3 - F) - T_1 T_2]$$
$$- [T_1(N_1 - F) - T_2 T_3][T_1^2 - (N_2 - F)(N_3 - F)] = 0.$$

Раскроемъ постепенно скобки и расположимъ затѣмъ всѣ члены по степенямъ F.

$$T_2 T_3(N_2 - F)(N_3 - F) - T_1 T_3^2(N_3 - F) - T_1 T_2^2(N_2 - F) + T_1^2 T_2 T_3$$
$$- T_1^3(N_1 - F) + T_1^2 T_2 T_3 + T_1(N_1 - F)(N_2 - F)(N_3 - F)$$
$$- T_2 T_3(N_2 - F)(N_3 - F) = 0.$$

Въ этомъ выраженіи первый и послѣдній члены взаимно сокращаются. Раздѣливъ затѣмъ все выраженіе на общій множитель T_1 и раскрывая далѣе скобки, получимъ:

$$-T_3^2 N_3 + T_3^2 F - T_2^2 N_2 + T_2^2 F + 2T_1 T_2 T_3 - T_1^2 N_1 + T_1^2 F$$
$$+ (N_1 - F)(N_2 N_3 - N_2 F - N_3 F + F^2) = 0$$

или

$$\{-T_3^2 N_3 - T_2^2 N_2 - T_1^2 N_1 + 2T_1 T_2 T_3\} + \{T_3^2 + T_2^2 + T_1^2\} F$$
$$+ N_1 N_2 N_3 - N_1 N_2 F - N_1 N_3 F + N_1 F^2 - N_2 N_3 F + N_2 F^2 + N_3 F^2 - F^3 = 0,$$

или еще

$$-F^3 + (N_1 + N_2 + N_3) F^2 + \{T_3^2 + T_2^2 + T_1^2 - N_1 N_2 - N_1 N_3 - N_2 N_3\} F$$
$$+ \{N_1 N_2 N_3 + 2T_1 T_2 T_3 - T_3^2 N_3 - T_2^2 N_2 - T_1^2 N_1\} = 0.$$

Перемѣнивъ всѣ знаки на обратные и располагая члены въ нѣсколько иномъ порядкѣ, получимъ окончательно

$$F^3 - \{N_1 + N_2 + N_3\} F^2 + \{N_1 N_2 + N_1 N_3 + N_2 N_3 - T_1^2 - T_2^2 - T_3^2\} F$$
$$- \{N_1 N_2 N_3 + 2T_1 T_2 T_3 - N_1 T_1^2 - N_2 T_2^2 - N_3 T_3^2\} = 0 \ldots . (17)$$

Мы получили такимъ образомъ для искомой величины F кубическое уравненіе.

Но всякое кубическое уравненіе имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ вещественный корень. Слѣдовательно, не подлежитъ сомнѣнію, что существуетъ по крайней мѣрѣ одно направленіе, при которомъ равнодѣйствующее натяженіе на нашу элементарную площадку совпадаетъ съ нормалью къ площадкѣ, и гдѣ, слѣдовательно, касательныя натяженія равны нулю. Соотвѣтствующее положеніе плоскости площадки называется *главной плоскостью*, а соотвѣтственное натяженіе F *главнымъ натяженіемъ*.

Положимъ, что этотъ вещественный корень уравненія (17) есть A.

$$F = A.$$

Тогда A будетъ главнымъ натяженіемъ.

Установивши этотъ фактъ, повернемъ, для удобства дальнѣйшихъ разсужденій, координатныя оси такъ, чтобы координатная плоскость yz была бы параллельна данной главной плоскости.

Тогда касательныя натяженія на площадку, перпендикулярную оси x-овъ, будутъ равны нулю.

Слѣдовательно

$$X_x = N_1 = A$$
$$Y_x = T_3 = 0$$
$$Z_x = T_2 = 0.$$

Тогда уравненія (11), (12) и (13) примутъ слѣдующій простой видъ:

$$(A - F)\cos\alpha = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$
$$(N_2 - F)\cos\beta + T_1\cos\gamma = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$
$$T_1\cos\beta + (N_3 - F)\cos\gamma = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

Эта система уравненій вмѣстѣ съ условнымъ уравненіемъ (14), по которому

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

допускаетъ слѣдующія рѣшенія.

1-ое рѣшеніе.

$$\alpha = 0, \quad \cos\alpha = 1, \quad \cos\beta = 0, \quad \cos\gamma = 0 \quad \text{и} \quad F = A.$$

Это рѣшеніе соотвѣтствуетъ уже ранѣе установленной нами главной плоскости съ главнымъ натяженіемъ A.

2-ое рѣшеніе.

$$\cos\alpha = 0$$

и

$$\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = -\frac{T_1}{N_2 - F} \ldots (21) \quad \text{изъ уравненія (19)}$$

$$\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = -\frac{N_3 - F}{T_1} \ldots (22) \quad \text{изъ уравненія (20)}$$

Сравнивая эти два выраженія, находимъ

$$\frac{T_1}{N_2 - F} = \frac{N_3 - F}{T_1}$$

или

$$F^2 - (N_2 + N_3)F + (N_2 N_3 - T_1^2) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (23)$$

Мы приходимъ такимъ образомъ къ квадратному уравненію для F которое имѣетъ, какъ легко въ томъ убѣдиться, два вещественныхъ корня.

Обозначимъ ихъ соотвѣтственно черезъ B и C.

Рѣшая уравненіе (23), находимъ

$$B = \frac{1}{2}\left[(N_2 + N_3) + \sqrt{(N_2 - N_3)^2 + 4T_1^2}\right] \quad \ldots\ldots\ldots (24)$$

$$C = \frac{1}{2}\left[(N_2 + N_3) - \sqrt{(N_2 - N_3)^2 + 4T_1^2}\right] \quad \ldots\ldots\ldots (25)$$

Подкоренная величина всегда положительна, а потому оба корня вещественны.

Мы видимъ такимъ образомъ, что кубическое уравненіе (17) имѣетъ три вещественныхъ корня A, B и C, причемъ $A = N_1$. Существуетъ, слѣдовательно, всегда, для *всякой* точки внутри твердаго тѣла, *три* главныхъ натяженія, а, слѣдовательно, и три положенія элементарной площадки, при которыхъ равнодѣйствующее натяженіе совпадаетъ съ нормалью къ площадкѣ.

Найдемъ теперь соотвѣтствующія положенія площадки, или, лучше, направленіе соотвѣтственныхъ нормалей.

Одно такое направленіе совпадаетъ по условію съ осью x-овъ.

Тогда

$$\alpha = 0 \qquad \beta = 90^\circ \qquad \gamma = 90^\circ.$$

Другія два рѣшенія обозначимъ соотвѣтственно черезъ

$$\alpha',\ \beta',\ \gamma'$$

и

$$\alpha'',\ \beta'',\ \gamma''.$$

Мы только что видѣли, что эти два рѣшенія соотвѣтствуютъ случаю

$$\cos\alpha' = 0 \quad \text{и} \quad \cos\alpha'' = 0.$$

Отсюда слѣдуетъ, что другія два направленія параллельны плоскости yz.

Чтобы ихъ найти обратимся опять къ уравненіямъ (21) и (22) и исключимъ изъ нихъ F.

Введемъ для сокращенія слѣдующее обозначеніе:

$$\xi = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

Тогда изъ уравненія (21) получимъ

$$\xi N_2 - \xi F + T_1 = 0, \dots\dots\dots\dots\dots\dots (27)$$

а изъ уравненія (22)

$$\xi T_1 - F + N_3 = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (28)$$

Умноживъ уравненіе (28) на $-\xi$ и сложивъ его съ уравненіемъ (27), получимъ

$$N_2 \xi + T_1 - T_1 \xi^2 - N_3 \xi = 0$$

или, раздѣливши это уравненіе на T_1 и перемѣнивъ всѣ знаки на обратные,

$$\xi^2 - \frac{N_2 - N_3}{T_1}\xi - 1 = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (29)$$

Это квадратное уравненіе допускаетъ два вещественныхъ корня. Обозначимъ ихъ соотвѣтственно черезъ ξ_1 и ξ_2.

$$\xi_1 = \frac{\cos\beta'}{\cos\gamma'},$$

$$\xi_2 = \frac{\cos\beta''}{\cos\gamma''}.$$

Рѣшая уравненіе (29), находимъ

$$\frac{\cos\beta'}{\cos\gamma'} = \frac{1}{2T_1}\left[(N_2 - N_3) + \sqrt{(N_2 - N_3)^2 + 4T_1^2}\right] \dots\dots\dots (30)$$

$$\frac{\cos\beta''}{\cos\gamma''} = \frac{1}{2T_1}\left[(N_2 - N_3) - \sqrt{(N_2 - N_3)^2 + 4T_1^2}\right] \dots\dots\dots (31)$$

Комбинируя эти уравненія съ условными уравненіями

$$\cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1$$

и

$$\cos^2\beta'' + \cos^2\gamma'' = 1,$$

найдемъ всѣ четыре неизвѣстныя величины $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$, $\cos\beta''$ и $\cos\gamma''$.

Изъ теоріи квадратныхъ уравненій извѣстно, что произведеніе корней равно постоянному члену въ квадратномъ уравненіи, приведенномъ къ виду уравненія (29).

Слѣдовательно

$$\xi_1 \xi_2 = -1$$

или

$$\cos\beta' \cos\beta'' + \cos\gamma' \cos\gamma'' = 0.$$

Это уравненіе показываетъ, что оба искомыя направленія нормалей, параллельныя плоскости yz, *взаимно перпендикулярны*, третье-же направленіе параллельно оси x-овъ.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что, при любой системѣ прямоугольныхъ координатныхъ осей x, y, z, существуетъ въ каждой точкѣ твердаго тѣла три взаимно перпендикулярныхъ направленія, для которыхъ равнодѣйствующее натяженіе совпадаетъ съ нормалью къ элементарной площадкѣ. Существуетъ такимъ образомъ всегда три главныя плоскости и три главныхъ натяженія.

Воспользуемся теперь извѣстной теоремой теоріи кубическихъ уравненій, а именно, что сумма трехъ корней равна съ обратнымъ знакомъ коэффиціенту при неизвѣстной во второй степени.

Обращаясь къ уравненію (17), мы видимъ, такимъ образомъ, что

$$N_1 + N_2 + N_3 = A + B + C \qquad (32)$$

A, B и C для данной точки твердаго тѣла суть вполнѣ опредѣленныя количества, какъ по величинѣ, такъ и по направленію, а N_1, N_2 и N_3 зависятъ отъ выбора направленія координатныхъ осей.

Уравненіе (32) выражаетъ собою, такимъ образомъ, слѣдующую теорему:

При совершенно произвольномъ выборѣ системы прямоугольныхъ координатныхъ осей, сумма нормальныхъ натяженій для трехъ взаимно перпендикулярныхъ площадокъ есть всегда величина постоянная.

Возьмемъ теперь какую-нибудь опредѣленную систему координатныхъ осей x, y, z, характеризуемую проэкціями натяженій N_1, N_2, N_3, T_1, T_2 и T_3.

Пусть направленіе главнаго натяженія A въ выбранной нами точкѣ составляетъ съ осями координатъ углы, *косинусы* которыхъ равны соотвѣтственно l_1, m_1, n_1. Для главнаго натяженія B соотвѣтственныя величины пусть будутъ l_2, m_2, n_2, а для натяженія C—l_3, m_3, n_3.

Эти величины сопоставлены въ слѣдующей табличкѣ.

	x	y	z
A	l_1	m_1	n_1
B	l_2	m_2	n_2
C	l_3	m_3	n_3

Направленія въ каждой вертикальной и горизонтальной группѣ величинъ этой таблички взаимно перпендикулярны.

На основаніи уравненій (10) мы можемъ написать слѣдующія 9 уравненій:

$$\left.\begin{aligned} Al_1 &= N_1 l_1 + T_3 m_1 + T_2 n_1 \\ Am_1 &= T_3 l_1 + N_2 m_1 + T_1 n_1 \\ An_1 &= T_2 l_1 + T_1 m_1 + N_3 n_1 \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (33)$$

$$\left.\begin{aligned} Bl_2 &= N_1 l_2 + T_3 m_2 + T_2 n_2 \\ Bm_2 &= T_3 l_2 + N_2 m_2 + T_1 n_2 \\ Bn_2 &= T_2 l_2 + T_1 m_2 + N_3 n_2 \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (34)$$

$$\left.\begin{aligned} Cl_3 &= N_1 l_3 + T_3 m_3 + T_2 n_3 \\ Cm_3 &= T_3 l_3 + N_2 m_3 + T_1 n_3 \\ Cn_3 &= T_2 l_3 + T_1 m_3 + N_3 n_3 \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (35)$$

Эти формулы даютъ намъ проэкціи главныхъ натяженій A, B, C, выраженныя черезъ проэкціи натяженій N и T по осямъ координатъ.

Возведя въ квадратъ каждое изъ уравненій (33) и принимая во вниманіе, что

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1,$$

найдемъ абсолютную величину A. Такимъ-же образомъ найдемъ B и C.

Важнѣе, однако, знать выраженія натяженій N и T черезъ главныя натяженія A, B и C.

Для этого надо рѣшить систему предыдущихъ уравненій относительно N_1, N_2 и т. д.

Задача эта рѣшается чрезвычайно просто слѣдующимъ пріемомъ.

Найдемъ, напримѣръ, выраженіе для N_1.

Для этого умножимъ первое уравненіе въ группѣ (33) на l_1, первое уравненіе въ группѣ (34) на l_2, а первое уравненіе въ группѣ (35) на l_3, и сложимъ эти три уравненія. Тогда мы получимъ

$$Al_1^2 + Bl_2^2 + Cl_3^2 = N_1 \{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2\} + T_3 \{l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3\} \\ + T_2 \{l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3\}.$$

l_1, l_2, l_3 суть косинусы угловъ, составляемыхъ направленіемъ оси x

съ тремя взаимно перпендикулярными направленіями A, B и C, слѣдовательно

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1.$$

Съ другой стороны $l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3$ представляетъ собою сумму произведеній косинусовъ угловъ, составляемыхъ направленіями x и y съ соотвѣтственными направленіями A, B и С, т.-е. сумма эта равна косинусу угла между направленіями осей x и y. Но, такъ какъ этотъ уголъ прямой, то

$$l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 = 0.$$

Точно также докажемъ, что

$$l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3 = 0.$$

Слѣдовательно

$$N_1 = Al_1^2 + Bl_2^2 + Cl_3^2 \qquad (36)$$

Такимъ-же способомъ найдемъ для другихъ двухъ нормальныхъ натяженій

$$N_2 = Am_1^2 + Bm_2^2 + Cm_3^2 \qquad (37)$$

и

$$N_3 = An_1^2 + Bn_2^2 + Cn_3^2 \qquad (38)$$

Найдемъ теперь выраженіе для касательнаго натяженія T_1.

Для этого умножимъ второе уравненіе въ каждой группѣ уравненій (33), (34) и (35) соотвѣтственно на n_1, n_2 и n_3, и сложимъ всѣ три уравненія. Получимъ

$$Am_1 n_1 + Bm_2 n_2 + Cm_3 n_3 = T_3 (l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3)$$
$$+ N_2 (m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3) + T_1 (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2).$$

Такъ какъ, на основаніи тѣхъ-же самыхъ соображеній,

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

$$l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3 = 0$$

и

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0,$$

то мы получимъ окончательно

$$T_1 = Am_1 n_1 + Bm_2 n_2 + Cm_3 n_3 \qquad (39)$$

Точно также найдемъ:

$$T_2 = Al_1 n_1 + Bl_2 n_2 + Cl_3 n_3 \ldots\ldots\ldots\ldots (40)$$

и

$$T_3 = Al_1 m_1 + Bl_2 m_2 + Cl_3 m_3 \ldots\ldots\ldots\ldots (41)$$

Формулы (36)—(41) даютъ намъ проэкціи нормальныхъ и касательныхъ натяженій, выраженныя черезъ главныя натяженія A, B, C.

Формулы эти имѣютъ симметричный и изящный видъ.

---

§ 2.

Деформаціи.

До сихъ поръ мы изучали свойства упругихъ силъ, дѣйствующихъ внутри твердаго тѣла.

Теперь займемся изученіемъ деформацій твердаго тѣла, но только съ чисто геометрической точки зрѣнія, совершенно не касаясь пока тѣхъ причинъ, которыя вызвали тѣ или иныя деформаціи.

Перемѣщеніе твердаго тѣла, какъ цѣлаго, мы разсматривать не будемъ, а займемся исключительно только *относительнымъ* перемѣщеніемъ однѣхъ частицъ твердаго тѣла по отношенію къ другимъ, т.-е. *деформаціями*.

Для этой цѣли возьмемъ *неподвижную* систему координатныхъ осей x, y, z, начало которой находится въ какой-нибудь точкѣ внутри твердаго тѣла.

Возьмемъ произвольную точку M твердаго тѣла, нормальныя координаты коей пусть будутъ x, y, z.

При деформаціи эта точка испытываетъ небольшое перемѣщеніе, проэкціи котораго на оси координатъ пусть будутъ

$$u, \quad v, \quad w.$$

Эти три величины суть не только функціи времени t, но и координатъ x, y, z самой точки M.

Напримѣръ

$$u = f(t, x, y, z).$$

Возьмемъ теперь сосѣднюю съ M точку M', координаты коей пусть будутъ

$$x + \Delta x, \quad y + \Delta y, \quad z + \Delta z,$$

а проэкціи соотвѣтствующаго перемѣщенія

$$u', \quad v', \quad w'.$$

Δx, Δy, Δz не суть дифференціалы, а лишь малыя приращенія координатъ.

Тогда мы можемъ положить

$$u' = u + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z$$

$$v' = v + \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial v}{\partial z}\Delta z$$

$$w' = w + \frac{\partial w}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial w}{\partial z}\Delta z.$$

Теорія упругости разсматриваетъ только случай малыхъ деформацій, гдѣ не только u, v, w, но и всѣ 9 дифференціальныхъ коеффиціента $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и т. д. малы, по крайней мѣрѣ настолько малы, что произведеніями и квадратами этихъ величинъ можно пренебречь.

Введемъ теперь слѣдующія обозначенія:

$$\left.\begin{aligned} \Delta u &= u' - u \\ \Delta v &= v' - v \\ \Delta w &= w' - w \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (42)$$

Тогда предыдущія уравненія примутъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z \\ \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial v}{\partial z}\Delta z \\ \Delta w &= \frac{\partial w}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial w}{\partial z}\Delta z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (43)$$

Пусть нормальное разстояніе между точками M и M' есть s; послѣ

деформаціи это разстояніе будетъ уже $s + \Delta s$[1]), гдѣ

$$s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2},$$

а Δs есть соотвѣтствующее приращеніе этой величины.

Послѣ деформаціи новыя координаты точекъ M и M' будутъ соотвѣтственно

$$x + u, \quad y + v, \quad z + w$$

и

$$x + \Delta x + u', \quad y + \Delta y + v', \quad z + \Delta z + w'.$$

Такимъ образомъ, на основаніи обозначеній (42), мы получимъ, пренебрегая квадратами Δu, Δv и Δw, для новаго разстоянія $s + \Delta s$ между точками M и M', слѣдующее выраженіе:

$$\begin{aligned} s + \Delta s &= \sqrt{(\Delta x + \Delta u)^2 + (\Delta y + \Delta v)^2 + (\Delta z + \Delta w)^2} \\ &= \sqrt{\{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2\} + 2\,\{\Delta x \cdot \Delta u + \Delta y \cdot \Delta v + \Delta z\, \Delta w\}} \\ &= s\sqrt{1 + 2\left\{\frac{\Delta x}{s^2}\Delta u + \frac{\Delta y}{s^2}\Delta v + \frac{\Delta z}{s^2}\Delta w\right\}} \\ &= s + \frac{1}{s}\left[\Delta x \cdot \Delta u + \Delta y \cdot \Delta v + \Delta z \cdot \Delta w\right] \end{aligned}$$

или

$$\Delta s = \frac{1}{s}\left[\Delta u \cdot \Delta x + \Delta v\, \Delta y + \Delta w \cdot \Delta z\right].$$

Подставляя въ это выраженіе значенія Δu, Δv и Δw изъ формулъ (43), получимъ окончательно:

$$\begin{aligned} \Delta s = \frac{1}{s}\Big[\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \Delta x^2 + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y^2 + \frac{\partial w}{\partial z}\Delta z^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x \cdot \Delta y \\ + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\Delta y\, \Delta z + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Delta z\, \Delta x\Big] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (44) \end{aligned}$$

Таково общее выраженіе для Δs.

Предположимъ теперь, что первоначальное направленіе s параллельно оси x-овъ.

Тогда

$$\Delta x = s, \quad \Delta y = 0 \quad \text{и} \quad \Delta z = 0.$$

---

1) s есть величина такого-же порядка малости, какъ и Δx, Δy, Δz.

Уравненіе (44) дастъ въ этомъ случаѣ

$$\Delta s = \Delta(\Delta x) = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x.$$

Такимъ-же образомъ, предполагая поочередно s параллельнымъ осямъ y и z, получимъ

$$\Delta(\Delta y) = \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y$$

и

$$\Delta(\Delta z) = \frac{\partial w}{\partial z}\Delta z.$$

Итакъ, если стороны элементарнаго параллелепипеда, ребра котораго соотвѣтственно параллельны осямъ координатъ, были до деформаціи равны

$$\Delta x, \quad \Delta y, \quad \Delta z,$$

то послѣ деформаціи они будутъ, на основаніи только что найденныхъ выраженій,

$$\Delta x\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad \Delta y\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad \Delta w\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Первоначальный объемъ V параллелепипеда равенъ произведенію $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$.

$$V = \Delta x\,\Delta y\,\Delta z.$$

Послѣ деформаціи объемъ будетъ

$$V + \Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

или, пренебрегая членами высшихъ порядковъ и отнимая отъ обѣихъ частей равенства V,

$$\Delta V = V\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right].$$

Эта сумма трехъ первыхъ производныхъ играетъ въ разсматриваемой теоріи чрезвычайно важную роль. Обозначимъ ее одной буквой θ.

Тогда

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \text{(45)}$$

и

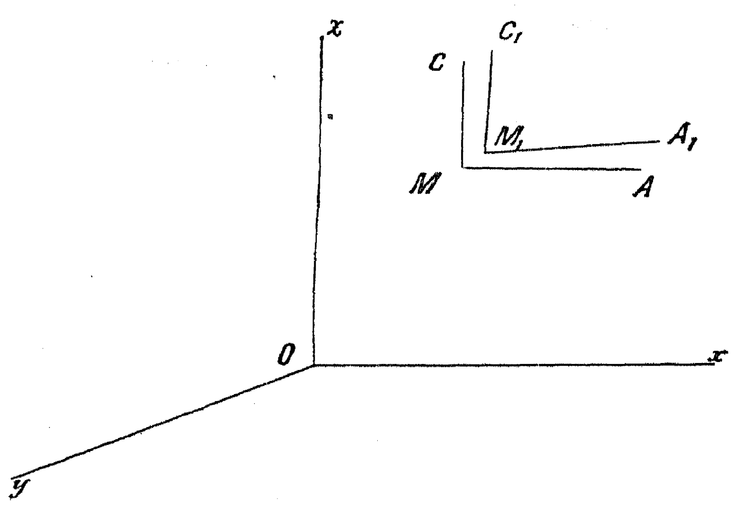
$$\frac{\Delta V}{V} = \theta \qquad \text{(46)}$$

Количество θ представляетъ собою такимъ образомъ объемное расширеніе около данной точки M, т.-е. *увеличеніе единицы объема.*

θ, конечно, можетъ быть и отрицательнымъ; тогда мы будемъ имѣть случай объемнаго сжатія.

При деформаціяхъ твердаго тѣла какая-нибудь прямая s, соединяющая двѣ близкія точки M и M', не только измѣняетъ свою длину (см. формулу (44)), но она можетъ нѣсколько измѣнить и свое направленіе относительно неподвижныхъ координатныхъ осей.

Черт. 7.



Возьмемъ опять элементарный параллелепипедъ со сторонами Δx, Δy, Δz.

Разсмотримъ только двѣ стороны этого параллелепипеда MA и MC, соотвѣтственно параллельныя осямъ Ox и Oz (см. черт. 7).

До деформаціи координаты точекъ M и A были

Точка M	*Точка A*
$x, \ y, \ z.$	$x + \Delta x, \ y, \ z.$

Послѣ деформаціи эти координаты будутъ:

Точка M_1	*Точка* A_1	
$x+u, \ y+v, \ z+w$	$x+\Delta x+u+\Delta u, \ y+v+\Delta v, \ z+w+\Delta w$	(см. формулы 42).

Такимъ образомъ проэкціи прямой $M_1 A_1$ на оси координатъ будутъ

$$\Delta x + \Delta u, \qquad \Delta v \quad \text{и} \quad \Delta w,$$

гдѣ Δu, Δv, Δw опредѣляются формулами (43), въ которыхъ для точки A надо положить Δy и Δz равными нулю.

На основаніи предыдущаго проэкціи эти выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta x, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x, \qquad \frac{\partial w}{\partial x}\Delta x.$$

Обозначимъ углы, составляемые направленіемъ $M_1 A_1$ съ осями координатъ, соотвѣтственно черезъ α_1, β_1 и γ_1. Тогда, пренебрегая членами

высшихъ порядковъ, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\alpha_1 &= \frac{1+\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+2\frac{\partial u}{\partial x}}}\\
\cos\beta_1 &= \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\sqrt{1+2\frac{\partial u}{\partial x}}}\\
\cos\gamma_1 &= \frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{\sqrt{1+2\frac{\partial u}{\partial x}}}
\end{aligned}\right\}\dots\dots\dots\dots(47)$$

Совершенно подобнымъ-же образомъ найдемъ для проэкцій M_1C_1 на оси координатъ

$$\Delta u, \quad \Delta v, \quad \Delta z+\Delta w,$$

гдѣ теперь въ формулахъ (43) надо положить Δx и Δy равными нулю.

Итакъ проэкціи M_1C_1 будутъ

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z, \quad \frac{\partial v}{\partial z}\Delta z, \quad \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\Delta z.$$

Обозначивъ углы, составляемые направленіемъ M_1C_1 съ осями координатъ, соотвѣтственно черезъ α_3, β_3 и γ_3, будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned}
\cos\alpha_3 &= \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{\sqrt{1+2\frac{\partial w}{\partial z}}}\\
\cos\beta_3 &= \frac{\frac{\partial v}{\partial z}}{\sqrt{1+2\frac{\partial w}{\partial z}}}\\
\cos\gamma_3 &= \frac{\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)}{\sqrt{1+2\frac{\partial w}{\partial z}}}
\end{aligned}\right\}\dots\dots\dots\dots(48)$$

Первоначальный уголъ между направленіями M_1A_1 и M_1C_1 (до деформаціи) былъ $\frac{\pi}{2}$. Послѣ деформаціи этотъ уголъ уменьшился. Обозначимъ *уменьшеніе* этого угла черезъ $2\varphi_2$, причемъ индексъ 2 обозначаетъ, что соотвѣтствующая величина относится къ сторонамъ, соотвѣтственно параллельнымъ осямъ Ox и Oz. Это обозначеніе аналогично тому, которое мы установили раньше для касательныхъ натяженій T.

На основанiи извѣстной теоремы аналитической геометрiи, мы получимъ для косинуса угла между направленiями $M_1 A_1$ и $M_1 C_1$ слѣдующее выраженiе:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi_2\right) = \cos\alpha_1 \cos\alpha_3 + \cos\beta_1 \cos\beta_3 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_3$$

или, на основанiи формулъ (47) и (48),

$$\sin 2\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{1+2\frac{\partial u}{\partial x}}\cdot\sqrt{1+2\frac{\partial w}{\partial z}}}\left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right],$$

или, окончательно, пренебрегая членами высшихъ порядковъ,

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right].$$

φ_2 представляетъ собою половину того угла, на который сблизились стороны параллелепипеда, соотвѣтственно параллельныя осямъ Ox и Oz.

Обозначивъ соотвѣтствующiя величины для сторонъ Δy и Δx черезъ φ_3, а для сторонъ Δz и Δy черезъ φ_1, получимъ, совершенно подобнымъ-же образомъ, слѣдующую группу формулъ:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right] \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right] \\ \varphi_3 &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (49)$$

Чтобы лучше выяснить себѣ геометрическiй смыслъ этихъ количествъ, предположимъ, что изъ 9 дифференцiальныхъ коеффицiентовъ $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и т. д. всѣ равны нулю за исключенiемъ $\frac{\partial u}{\partial z}$ и $\frac{\partial w}{\partial x}$.

Итакъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

Этотъ случай соотвѣтствуетъ совершенно спеціальному типу деформаціи.

Такъ какъ по предположенію $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ и $\frac{\partial w}{\partial z}$ равны нулю, то, на основаніи предыдущихъ выводовъ, стороны параллелепипеда Δx, Δy, Δz послѣ деформаціи не измѣняютъ своей длины.

Далѣе изъ формулъ (49) слѣдуетъ, что

$$\varphi_1 = 0$$

и

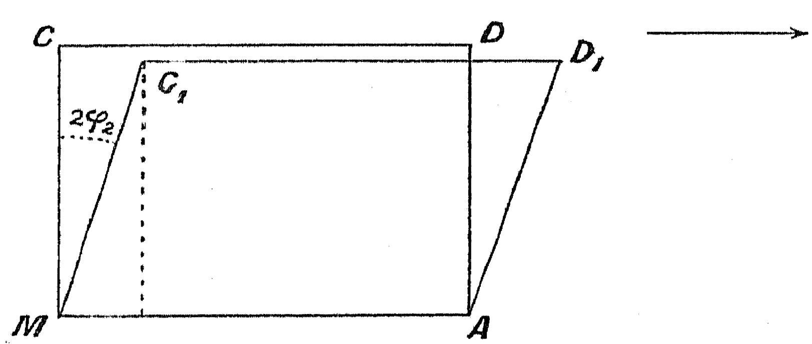
$$\varphi_3 = 0.$$

Остается такимъ образомъ только φ_2.

Такъ какъ намъ важно изучить лишь *деформацію,* иначе говоря *относительное* перемѣщеніе сторонъ параллелепипеда, то мы можемъ предположить, что точка M неподвижна, иначе говоря, что u, v и w равны нулю.

Такъ какъ, въ силу соотношеній (50), $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ и $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$, а слѣдовательно и $\Delta v = 0$ (см. формулы (43)), то всѣ точки параллелепипеда, лежащія въ одной и той-же плоскости, перпендикулярной къ оси y, не выходятъ при деформаціи изъ этой плоскости.

Черт. 8.



Возьмемъ теперь стороны параллелепипеда соотвѣтственно параллельныя осямъ Ox и Oz (см. черт. 8).

$$MA = \Delta x$$

$$MC = \Delta z.$$

Мы получимъ въ данномъ сѣченіи прямоугольникъ $MCDA$, причемъ, какъ только что было доказано, различныя точки этого сѣченія при деформаціи не выходятъ изъ этой плоскости.

Для выясненія вопроса, какъ перемѣстится верхняя сторона прямоугольника CD *относительно нижней* MA, мы можемъ считать прямую MA неподвижной.

Мы видѣли раньше, что уголъ между MA и MC уменьшается на величину

$$2\varphi_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right);$$

слѣдовательно направленія MC и MC_1, а также AD и AD_1 составляютъ между собою уголъ равный $2\varphi_2$.

Съ другой стороны, въ силу соотношеній (50), по которымъ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$CD = C_1 D_1$$

и

$$MC = MC_1, \text{ а также } AD = AD_1.$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что данная деформація сводится къ скольженію или сдвигу верхней грани параллелепипеда CD по отношенію къ нижней MA въ направленіи, указанномъ стрѣлкой.

Величина этого сдвига характеризуется угломъ $2\varphi_2$.

На основаніи этого, тѣ количества, которыя опредѣляются формулами (49), называются иногда *скольженіями или сдвигами.*

Благодаря такому сдвигу первоначальный прямоугольникъ со сторонами Δx и Δz превращается въ параллелограммъ MC_1D_1A, стороны котораго остаются соотвѣтственно равными Δx и Δz.

Площадь прямоугольника $MCDA = \Delta x . \Delta z$, а площадь параллелограмма $MC_1 D_1 A = \Delta x \Delta z . \cos 2\varphi_2$.

Разлагая $\cos 2\varphi_2$ въ рядъ по степенямъ φ_2, получимъ

$$\cos 2\varphi_2 = 1 - 2\varphi_2^2.$$

φ_2 такого-же порядка малости, какъ $\frac{\partial u}{\partial z}$ и $\frac{\partial w}{\partial x}$; а, такъ какъ въ этой теоріи мы пренебрегаемъ квадратами и произведеніями этихъ малыхъ величинъ, то съ даннымъ приближеніемъ можно положить

$$\cos 2\varphi_2 = 1.$$

Такимъ образомъ площадь параллелограмма $MC_1 D_1 A$ равна площади прямоугольника $MCDA$, иначе говоря *сдвигъ не сопровождается измѣненіемъ объема элементарнаго параллелепипеда.* Это-же слѣдуетъ и изъ того, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \theta = 0.$$

Резюмируя все сказанное, мы видимъ, что главными элементами деформаціи являются: во-первыхъ, объемное расширеніе единицы объема, характеризуемое величиной

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

и, во-вторыхъ, сдвиги, характеризуемые величинами φ_1, φ_2, φ_3, значеніе которыхъ опредѣляется формулами (49).

---

§ 3.

Зависимость между упругими силами и деформаціями.

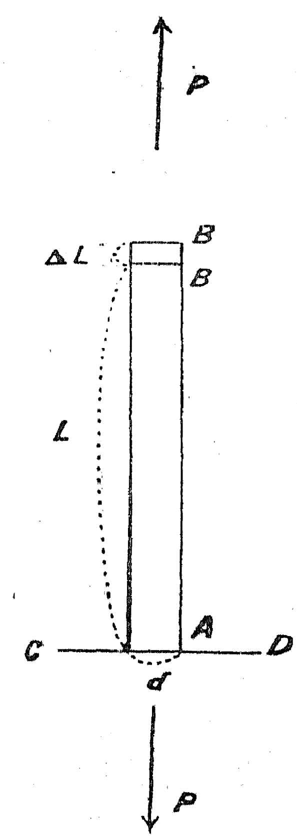
Въ предыдущихъ двухъ параграфахъ мы изучили совершенно независимо другъ отъ друга: во-первыхъ, свойства упругихъ силъ, дѣйствующихъ внутри твердаго тѣла, а, во-вторыхъ, деформаціи.

Теперь постараемся установить непосредственную связь между тѣми и другими величинами.

Для этого намъ придется обратиться къ опыту.

Возьмемъ изъ даннаго твердаго матеріала цилиндрическій стержень AB длиною L (см. черт. 9) съ круговымъ сѣченіемъ, діаметръ котораго пусть будетъ d.

Черт. 9.



Тогда площадь сѣченія будетъ

$$q = \frac{1}{4}\pi d^2.$$

Закрѣпимъ нижній конецъ стержня въ CD и подвергнемъ его полному растягивающему усилію P, направленному параллельно оси стержня вверхъ.

Величина растягивающей силы, отнесенной къ *единицѣ сѣченія,* будетъ

$$F = \frac{P}{q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (51)$$

Подъ вліяніемъ этой силы стержень удлинится на величину ΔL.

Посмотримъ теперь отъ чего ΔL можетъ зависѣть.

Ограничиваясь малыми деформаціями, мы можемъ считать, что ΔL пропорціонально F. Съ другой стороны ΔL очевидно пропорціонально первоначальной длинѣ стержня L.

Такимъ образомъ ΔL должно быть пропорціонально произведенію $L\frac{P}{q}$.

Коэффиціентъ пропорціональности долженъ зависѣть отъ свойствъ

испытуемаго матеріала. Обозначимъ его черезъ $\frac{1}{E}$. Тогда мы получимъ слѣдующее основное соотношеніе:

$$\Delta L = \frac{1}{E} \cdot L \frac{P}{q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (52)$$

Отсюда находимъ

$$E = \frac{L}{\Delta L} \cdot \frac{P}{q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (53)$$

Опытъ дѣйствительно показываетъ, что, пока предѣлъ упругости не перейденъ, E есть величина постоянная, иначе говоря, что ΔL дѣйствительно пропорціонально P.

Коеффиціентъ E называется *модулемъ продольной упругости* или модулемъ Young'а. Этотъ модуль является самой характерной величиной, опредѣляющей упругія свойства даннаго матеріала.

Чтобы лучше уяснить себѣ физическое значеніе количества E, предположимъ на время, что формула (52), опредѣляющая собою законъ растяженія стержня, остается вѣрной и примѣнимой для любой величины P, и сдѣлаемъ P столь большимъ, что $\Delta L = L$, т.-е., что нашъ стержень удлинился вдвое. Фактически сдѣлать это, конечно, невозможно, такъ какъ, при значительныхъ величинахъ P, предѣлъ упругости будетъ перейденъ и затѣмъ уже стержень разорвется; но мы дѣлаемъ это предположеніе только для того, чтобы уяснить себѣ, что представило бы собою количество E, если-бы формула (52) оставалась все время примѣнимой.

Положивши еще $q = 1$, мы въ этомъ случаѣ получимъ изъ формулы (53)

$$E = P.$$

Такимъ образомъ модуль упругости представляетъ собою ту силу, которую нужно было-бы приложить къ концу стержня, площадь сѣченія коего равна 1, чтобы удлинить этотъ стержень вдвое.

Таковъ физическій смыслъ модуля Young'а E.

E обыкновенно выражается въ килограммахъ на квадратный миллиметръ и, такъ какъ твердыя тѣла вообще сильно сопротивляются измѣненію своей длины, то E будетъ выражаться весьма большимъ числомъ.

Для опредѣленія модуля упругости изъ опыта, пользуются формулой (52). Опредѣляютъ удлиненіе ΔL стержня или проволоки при сравнительно незначительныхъ нагрузкахъ P и отсюда уже, зная L и q, выводятъ величину E.

Въ нижеслѣдующей табличкѣ приведены численныя значенія модуля продольной упругости для нѣкоторыхъ матеріаловъ.

Матеріалъ.	E въ килограммахъ на 1 □ миллиметръ.
Сталь	22000
Желѣзо (мягкое)	20790
Платина (жесткая)	17040
Мѣдь (жесткая)	12450
Серебро (мягкое)	7140
Свинецъ около	1800
Дерево: ель ‖ волокнамъ	1113
Дерево: сосна ‖ волокнамъ	564

Числа эти не представляютъ собою нѣчто абсолютное, такъ какъ величина модуля продольной упругости измѣняется въ извѣстныхъ предѣлахъ въ зависимости отъ чистоты и физическихъ свойствъ испытуемаго матеріала.

Модуль упругости E выражаютъ иногда въ абсолютной системѣ единицъ C. G. S., т.-е. въ динахъ на квадратный сантиметръ.

Взявши сѣченіе q въ 1 квадратный сантиметръ надо увеличить числа предыдущей таблички въ 100 разъ.

Съ другой стороны

$$1 \text{ килограммъ} = 1000 \text{ грам.} = 981000 \text{ динамъ.}$$

Такимъ образомъ, чтобы выразить модуль упругости въ абсолютной системѣ единицъ, надо предыдущія числа умножить на

$$0{,}981 \cdot 10^8.$$

Напримѣръ, модуль продольной упругости для стали будетъ

$$E = 2{,}16 \cdot 10^{12} \quad \text{C. G. S.}$$

Въ предыдущемъ опытѣ, послужившимъ для опредѣленія модуля Young'a, мы предположили, что нижній конецъ стержня A закрѣпленъ, а растягивающее усиліе P приложено къ верхнему основанію стержня B. Но легко видѣть, что реакцію опоры CD мы можемъ замѣнить такою-же силою P, дѣйствующей въ противоположномъ направленіи на нижнее основаніе стержня A (см. черт. 9).

испытуемаго матеріала. Обозначимъ его черезъ $\frac{1}{E}$. Тогда мы получимъ слѣдующее основное соотношеніе:

$$\Delta L = \frac{1}{E} \cdot L \frac{P}{q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (52)$$

Отсюда находимъ

$$E = \frac{L}{\Delta L} \cdot \frac{P}{q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (53)$$

Опытъ дѣйствительно показываетъ, что, пока предѣлъ упругости не перейденъ, E есть величина постоянная, иначе говоря, что ΔL дѣйствительно пропорціонально P.

Коеффиціентъ E называется *модулемъ продольной упругости* или модулемъ Young'а. Этотъ модуль является самой характерной величиной, опредѣляющей упругія свойства даннаго матеріала.

Чтобы лучше уяснить себѣ физическое значеніе количества E, предположимъ на время, что формула (52), опредѣляющая собою законъ растяженія стержня, остается вѣрной и примѣнимой для любой величины P, и сдѣлаемъ P столь большимъ, что $\Delta L = L$, т.-е., что нашъ стержень удлинился вдвое. Фактически сдѣлать это, конечно, невозможно, такъ какъ, при значительныхъ величинахъ P, предѣлъ упругости будетъ перейденъ и затѣмъ уже стержень разорвется; но мы дѣлаемъ это предположеніе только для того, чтобы уяснить себѣ, что представило бы собою количество E, если-бы формула (52) оставалась все время примѣнимой.

Положивши еще $q = 1$, мы въ этомъ случаѣ получимъ изъ формулы (53)

$$E = P.$$

Такимъ образомъ модуль упругости представляетъ собою ту силу, которую нужно было-бы приложить къ концу стержня, площадь сѣченія коего равна 1, чтобы удлинить этотъ стержень вдвое.

Таковъ физическій смыслъ модуля Young'а E.

E обыкновенно выражается въ килограммахъ на квадратный миллиметръ и, такъ какъ твердыя тѣла вообще сильно сопротивляются измѣненію своей длины, то E будетъ выражаться весьма большимъ числомъ.

Для опредѣленія модуля упругости изъ опыта, пользуются формулой (52). Опредѣляютъ удлиненіе ΔL стержня или проволоки при сравнительно незначительныхъ нагрузкахъ P и отсюда уже, зная L и q, выводятъ величину E.

Въ нижеслѣдующей табличкѣ приведены численныя значенія модуля продольной упругости для нѣкоторыхъ матеріаловъ.

Матеріалъ.	E въ килограммахъ на 1 □ миллиметръ.
Сталь	22000
Желѣзо (мягкое)	20790
Платина (жесткая)	17040
Мѣдь (жесткая)	12450
Серебро (мягкое)	7140
Свинецъ около	1800
Дерево ель ‖ волокнамъ	1113
Дерево сосна ‖ волокнамъ	564

Числа эти не представляютъ собою нѣчто абсолютное, такъ какъ величина модуля продольной упругости измѣняется въ извѣстныхъ предѣлахъ въ зависимости отъ чистоты и физическихъ свойствъ испытуемаго матеріала.

Модуль упругости E выражаютъ иногда въ абсолютной системѣ единицъ C. G. S., т.-е. въ динахъ на квадратный сантиметръ.

Взявши сѣченіе q въ 1 квадратный сантиметръ надо увеличить числа предыдущей таблички въ 100 разъ.

Съ другой стороны

$$1 \text{ килограммъ} = 1000 \text{ грам.} = 981000 \text{ динамъ.}$$

Такимъ образомъ, чтобы выразить модуль упругости въ абсолютной системѣ единицъ, надо предыдущія числа умножить на

$$0{,}981 \cdot 10^8.$$

Напримѣръ, модуль продольной упругости для стали будетъ

$$E = 2{,}16 \cdot 10^{12} \quad \text{C. G. S.}$$

Въ предыдущемъ опытѣ, послужившимъ для опредѣленія модуля Young'a, мы предположили, что нижній конецъ стержня A закрѣпленъ, а растягивающее усиліе P приложено къ верхнему основанію стержня B. Но легко видѣть, что реакцію опоры CD мы можемъ замѣнить такою-же силою P, дѣйствующей въ противоположномъ направленіи на нижнее основаніе стержня A (см. черт. 9).

Такимъ образомъ мы можемъ представить себѣ стержень свободнымъ и подверженнымъ вліянію двухъ силъ P, дѣйствующихъ въ противоположныхъ направленіяхъ на основанія цилиндрическаго стержня A и B. Отъ этого результатъ нисколько не измѣнится.

Формулу (52) мы можемъ, на основаніи соотношенія (51), написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$F = E \cdot \frac{\Delta L}{L} \quad \text{.....................} (54)$$

Здѣсь $\frac{\Delta L}{L}$ представляетъ собою удлиненіе единицы длины, а F соотвѣтствующее нормальное натяженіе, отнесенное, какъ всегда, къ единицѣ поверхности. $\frac{\Delta L}{L}$ есть отвлеченное число.

Эта формула показываетъ, что, чѣмъ больше модуль продольной упругости, тѣмъ большее усиліе надо приложить, чтобы вызвать опредѣленное относительное удлиненіе стержня.

Само собою разумѣется, что если F направлено въ противоположную сторону, то у насъ будетъ не удлиненіе, а продольное сжатіе стержня.

Для *относительнаго-же* удлиненія или сжатія $\frac{\Delta L}{L}$ мы будемъ имѣть

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{F}{E} \quad \text{.....................} (55)$$

При растяженіи стержня подъ вліяніемъ растягивающаго усилія P, деформація не ограничивается однимъ только удлиненіемъ стержня на величину ΔL.

Опытъ показываетъ, что при этомъ измѣняются и поперечные размѣры стержня. Сѣченіе его остается по прежнему круговымъ, но діаметръ стержня d *уменьшается* на величину Δd.

Относительное уменьшеніе діаметра будетъ

$$\frac{\Delta d}{d},$$

причемъ мы будемъ считать Δd положительнымъ, т.-е. подразумѣвать подъ Δd абсолютную величину измѣненія діаметра d.

Теперь опытъ показываетъ, что отношеніе относительнаго уменьшенія поперечныхъ размѣровъ стержня $\left(\frac{\Delta d}{d}\right)$ къ относительному удлиненію $\left(\frac{\Delta L}{L}\right)$ есть всегда *величина постоянная*. Обозначимъ ее черезъ σ.

$$\sigma = \frac{\frac{\Delta d}{d}}{\frac{\Delta L}{L}} \quad \text{.....................} (56)$$

Замѣняя здѣсь $\frac{\Delta L}{L}$ его выраженіемъ изъ уравненія (55), получимъ

$$\sigma = E\frac{\frac{\Delta d}{d}}{F}$$

или

$$\frac{\Delta d}{d} = \sigma \cdot \frac{F}{E} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (56)$$

σ есть отвлеченное число и называется *модулемъ поперечнаго сжатія* или-же *коеффиціентомъ Poisson'a.*

Какъ мы увидимъ дальше, коеффиціенты E и σ суть тѣ двѣ величины, которыя характеризуютъ *вполнѣ* упругія свойства всякаго однороднаго и изотропнаго твердаго тѣла.

Опытъ показываетъ, что модуль поперечнаго сжатія остается постояннымъ не только для одного и того-же тѣла, но и для разныхъ тѣлъ онъ сохраняетъ приблизительно одно и то-же значеніе; въ большинствѣ случаевъ σ мало отличается отъ $\frac{1}{4}$. Тогда какъ E, какъ мы видѣли, значительно мѣняется въ зависимости отъ свойствъ испытуемаго матеріала, σ остается приблизительно равнымъ $\frac{1}{4}$.

Это условіе $\sigma = \frac{1}{4}$ соотвѣтствуетъ предположенію Poisson'a.

Установивши понятія о модуляхъ продольнаго растяженія и поперечнаго сжатія, займемся опредѣленіемъ зависимости между упругими натяженіями и деформаціями.

Для этой цѣли вырѣжемъ изъ даннаго матеріала прямоугольный параллелепипедъ со сторонами Δx, Δy, Δz, соотвѣтственно параллельными осямъ координатъ (см. черт. 10).

Координаты точки M пусть будутъ x, y, z.

Подвергнемъ площадки этого параллелепипеда попарно растягивающимъ нормальнымъ усиліямъ N_1, N_2, N_3, дѣйствующимъ на соотвѣтствующія площадки въ противоположныя стороны. Эти натяженія N отнесены къ единицѣ поверхности.

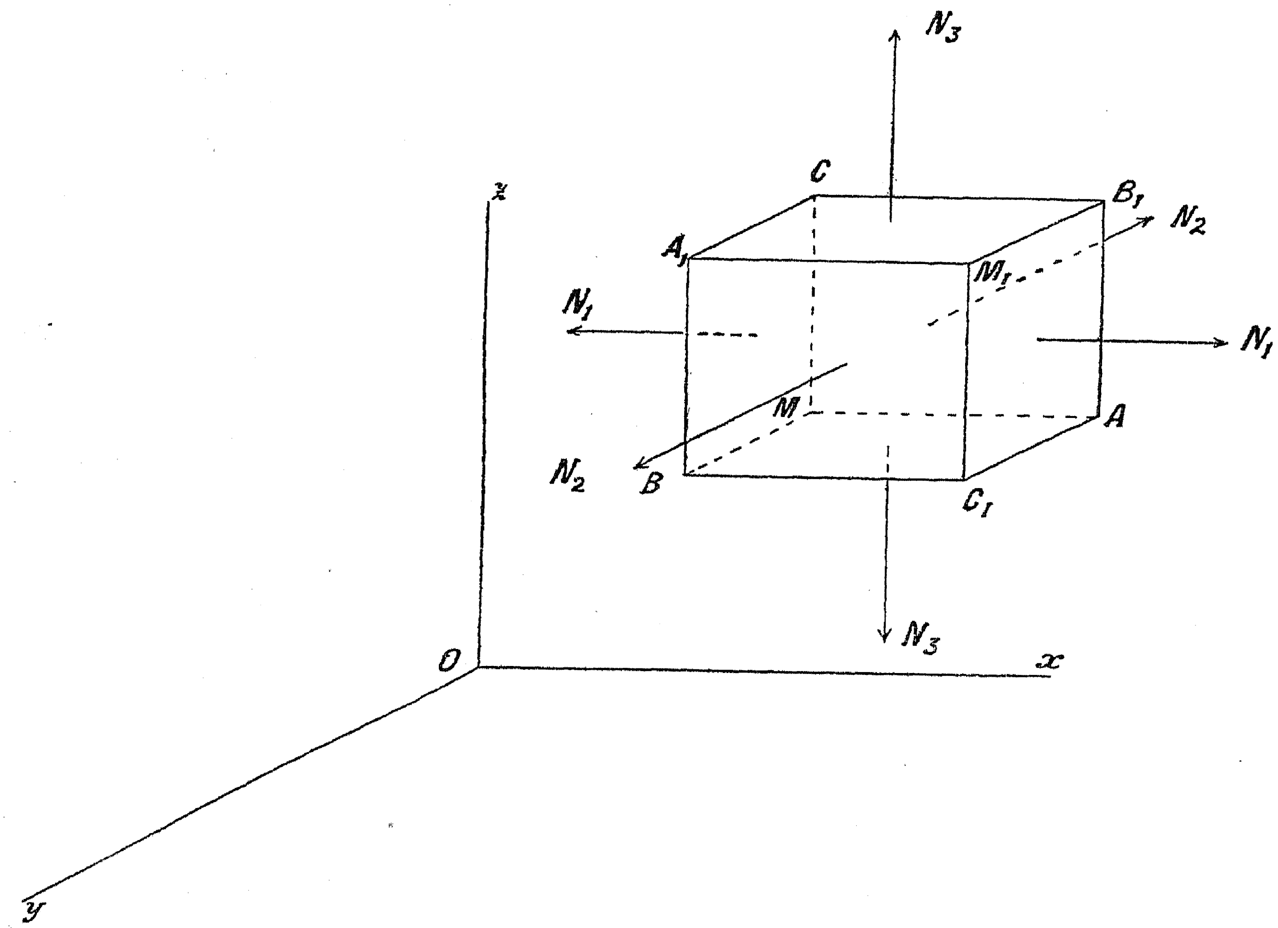
Разсмотримъ удлиненіе параллелепипеда въ направленіи параллельномъ оси x-овъ.

Согласно формулѣ (55), удлиненіе единицы длины въ данномъ направленіи будетъ равно

$$\frac{N_1}{E}.$$

Силы N_2 и N_3, растягивающія параллелепипедъ въ направленіяхъ перпендикулярныхъ къ оси x-овъ, вызываютъ каждая, благодаря вліянію

Черт. 10.



поперечнаго сжатія, сокращеніе размѣровъ параллелепипеда въ направленіи Ox.

Относительное сокращеніе единицы длины въ данномъ направленіи, вызываемое каждой изъ силъ N_2 и N_3, будетъ, на основаніи формулы (56),

$$\sigma \frac{N_2}{E}$$

и

$$\sigma \frac{N_3}{E}.$$

Такимъ образомъ полное, относительное удлиненіе реберъ Δx параллелепипеда представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{1}{E}[N_1 - \sigma(N_2 + N_3)].$$

Съ другой стороны мы видѣли, изучая деформаціи твердаго тѣла (слѣдствіе формулы (44)), что удлиненіе ребра параллелепипеда Δx выражается величиной

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x.$$

Слѣдовательно, удлиненіе единицы длины въ данномъ направленіи будетъ просто равно

$$\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Сравнивая оба эти выраженія, находимъ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E}[N_1 - \sigma(N_2 + N_3)] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (57)$$

Совершенно подобнымъ-же образомъ мы найдемъ слѣдующія два соотношенія (круговая перестановка буквъ):

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E}[N_2 - \sigma(N_3 + N_1)] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (58)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{E}[N_3 - \sigma(N_1 + N_2)] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (59)$$

Эти три формулы устанавливаютъ зависимость между нормальными натяженіями N_1, N_2 и N_3 и производными отъ смѣщеній u, v, w по перемѣннымъ x, y и z.

Сложивши эти три выраженія и принимая во вниманіе, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \theta, \quad \text{(см. формулы (45) и (46))}$$

т.-е. равно объемному расширенію единицы объема, получимъ:

$$\theta = \frac{1}{E}[1 - 2\sigma][N_1 + N_2 + N_3] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (60)$$

Внутри твердаго тѣла сумма трехъ нормальныхъ натяженій $N_1 + N_2 + N_3$ для данной точки есть, какъ мы видѣли раньше, всегда величина постоянная, независящая отъ направленія координатныхъ осей.

Эта величина равна суммѣ трехъ главныхъ натяженій $A + B + C$ (см. формулу (32)).

Изъ формулы-же (60) находимъ

$$N_1 + N_2 + N_3 = \frac{E}{1 - 2\sigma} \cdot \theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (61)$$

Понятно также, что и объемное расширеніе единицы объема не можетъ зависѣть отъ выбора направленія координатныхъ осей, что и под-

тверждается формулой (61), потому что

$$N_1 + N_2 + N_3 = A + B + C$$

есть величина постоянная для данной точки твердаго тѣла.

Найдемъ теперь непосредственное выраженіе каждой нормальной составляющей черезъ элементы деформаціи параллелепипеда.

Присоединяя къ правой части уравненія (57)

$$+\frac{1}{E}\sigma N_1 \quad \text{и} \quad -\frac{1}{E}\sigma N_1,$$

получимъ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E}\left[(1+\sigma)N_1 - \sigma(N_1 + N_2 + N_3)\right],$$

или, принимая во вниманіе соотношеніе (61),

$$E\frac{\partial u}{\partial x} = (1+\sigma)N_1 - \frac{\sigma}{(1-2\sigma)}\cdot E\theta.$$

Отсюда находимъ окончательно

$$N_1 = \frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\theta + \frac{E}{1+\sigma}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (62)$$

Точно также найдемъ

$$N_2 = \frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\theta + \frac{E}{1+\sigma}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (63)$$

$$N_3 = \frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\theta + \frac{E}{1+\sigma}\cdot\frac{\partial w}{\partial z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (64)$$

Эти формулы, представляющія собою окончательныя выраженія нормальныхъ натяженій черезъ элементы деформаціи, имѣютъ простой и изящный видъ. Въ нихъ входятъ постоянныя E и σ, характеризующія упругія свойства даннаго твердаго тѣла.

Вмѣсто того, чтобы характеризовать упругія свойства матеріала коэффиціентами E и σ, т. е. модулями продольнаго растяженія и поперечнаго сжатія, можно, согласно съ французскимъ математикомъ Lamé, жившимъ въ началѣ прошлаго столѣтія, характеризовать ихъ двумя другими коэффиціентами λ и μ, связанными съ E и σ слѣдующими соотношеніями:

$$\lambda = \frac{\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}E \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (65)$$

и

$$\mu = \frac{1}{2}\,\frac{E}{1+\sigma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (66)$$

Тогда наши уравненія для нормальныхъ натяженій примутъ слѣдующій простой видъ:

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \\ N_2 &= \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \\ N_3 &= \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (67)$$

Выразимъ еще σ и E черезъ λ и μ.

Изъ уравненія (66) имѣемъ

$$\frac{E}{1+\sigma} = 2\mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (68)$$

Подставляя эту величину въ формулу (65), находимъ

$$\lambda(1 - 2\sigma) = 2\mu\sigma$$

или

$$\lambda = 2\sigma(\lambda + \mu).$$

Такимъ образомъ мы будемъ имѣть

$$\sigma = \frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (69)$$

λ и μ по своему физическому смыслу (см. формулы (67) и (68)) суть всегда величины положительныя.

Съ другой стороны

$$\sigma = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1+\frac{\lambda}{\mu}}.$$

Ничего не предрѣшая относительно численныхъ значеній λ и μ, мы можемъ тѣмъ не менѣе опредѣлить тѣ крайніе предѣлы, между которыми σ обязательно должно заключаться.

Крайнія возможныя значенія для отношенія $\frac{\lambda}{\mu}$ суть 0 и ∞; слѣдовательно величина σ обязательно должна заключаться между предѣлами

$$0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}.$$

Мы видѣли въ дѣйствительности, что, для большинства тѣлъ, σ приблизительно равно полусуммѣ этихъ крайнихъ значеній, т.-е. $\frac{1}{4}$.

Изъ формулы (69) мы имѣемъ далѣе

$$1+\sigma=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}$$

и

$$1-2\sigma=\frac{\mu}{\lambda+\mu}.$$

Слѣдовательно

$$\frac{\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}=\frac{\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda+\mu}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\cdot\frac{\mu}{\lambda+\mu}}=\frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{\lambda+\mu}{3\lambda+2\mu}.$$

Подставляя это выраженіе въ формулу (65), находимъ

$$E=\frac{\mu}{\lambda+\mu}(3\lambda+2\mu)\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(70)$$

Формулы (69) и (70) даютъ выраженія σ и E черезъ новые коэффиціенты упругости λ и μ.

Коэффиціентъ μ получилъ особое названіе. Онъ называется *модулемъ твердости* (Starrheit, rigidité) или еще *модулемъ сдвига*. Причину, почему этому коэффиціенту присвоено такое названіе, мы увидимъ изъ дальнѣйшаго, когда выведемъ выраженіе для касательныхъ натяженій въ функціи отъ элементовъ деформаціи.

Въ теоріи упругости разсматривается иногда еще одинъ коэффиціентъ упругости, который получается слѣдующимъ образомъ.

Предположимъ, что на нашъ параллелепипедъ дѣйствуетъ со всѣхъ сторонъ на каждую площадку внѣшнее нормальное *давленіе* p, одинаковое для каждой площадки.

Тогда

$$N_1=N_2=N_3=-p.$$

Параллелепипедъ будетъ въ этомъ случаѣ подверженъ всестороннему сжатію и θ будетъ отрицательно.

Сложивши въ этомъ предположеніи всѣ три уравненія (67), мы будемъ имѣть (см. также формулу (45))

$$-3p=3\lambda\theta+2\mu\theta$$

или

$$p=-\left[\lambda+\frac{2}{3}\mu\right]\theta.$$

Коэффиціентъ при θ, который мы обозначимъ черезъ k,

$$k=\lambda+\frac{2}{3}\mu,\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(71)$$

характеризуетъ ту величину внѣшняго постояннаго давленія, которое вызываетъ данное всестороннее сжатіе θ.

Итакъ

$$p = -k\theta \quad \dots\dots\dots (72)$$

k называется *модулемъ всесторонняго сжатія.*

Выразимъ k черезъ E и σ.

На основаніи уравненій (71), (65) и (66) мы будемъ имѣть

$$k = \frac{E}{1+\sigma}\left[\frac{\sigma}{1-2\sigma} + \frac{1}{3}\right] = \frac{E}{1+\sigma}\cdot\frac{3\sigma+1-2\sigma}{3(1-2\sigma)},$$

или

$$k = \frac{1}{3}\cdot\frac{E}{1-2\sigma} \quad \dots\dots\dots (73)$$

Посмотримъ еще, что даютъ намъ различныя формулы, связывающія разные коэффиціенты упругости, если мы положимъ, согласно съ Poisson'омъ, $\sigma = \frac{1}{4}$.

Изъ формулъ (65), (66) и (73) получается въ этомъ предположеніи

$$\lambda = \frac{2}{5}E \quad \dots\dots\dots (74)$$

$$\mu = \frac{2}{5}E \quad \dots\dots\dots (75)$$

$$k = \frac{2}{3}E \quad \dots\dots\dots (76)$$

Слѣдовательно

$$\lambda = \mu \quad \dots\dots\dots (77)$$

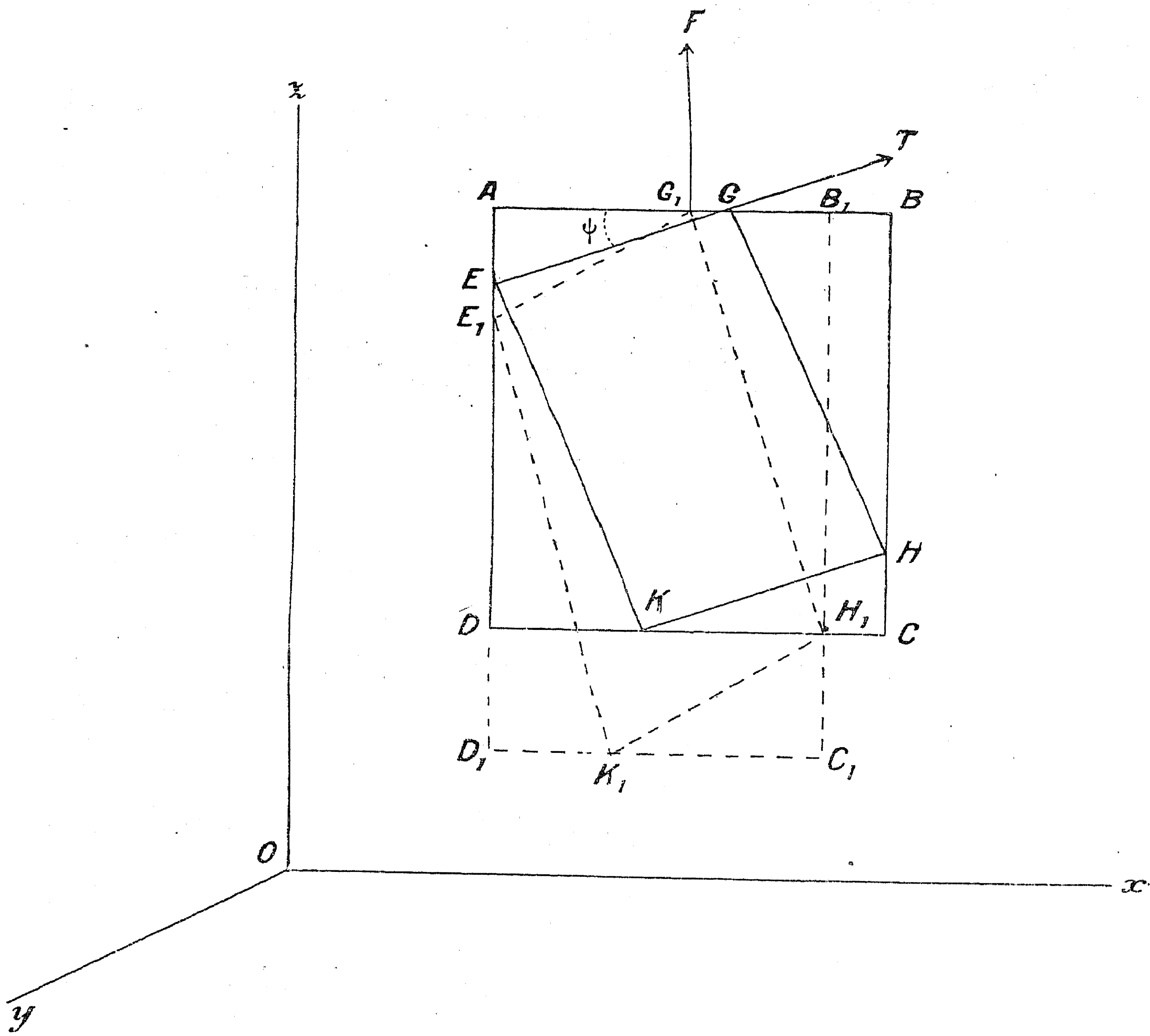
Итакъ, при $\sigma = \frac{1}{4}$, коэффиціентъ λ равенъ модулю сдвига μ, а въ свою очередь модуль сдвига равенъ $\frac{2}{5}$ модуля продольной упругости.

Перейдемъ теперь къ выясненію зависимости касательныхъ натяженій T отъ элементовъ деформаціи нашего параллелепипеда.

Возьмемъ опять прямоугольный параллелепипедъ. Сѣченіе его плоскостью параллельной плоскости координатъ zx представится прямоугольникомъ $ABCD$ (см. черт. 11).

Предположимъ далѣе, что на верхнее и нижнее основанія параллелепипеда AB и CD дѣйствуютъ въ разныя стороны нормально къ этимъ площадкамъ растягивающія усилія F, гдѣ величина F отнесена по предположенію къ единицѣ поверхности.

Черт. 11.



Проведемъ черезъ параллелепипедъ 4 плоскія сѣченія, параллельныя оси y-овъ, такъ, чтобы получить въ пересѣченіи съ плоскостью $ABCD$ прямоугольникъ $EGHK$.

Подъ вліяніемъ растягивающихъ усилій F, вызывающихъ продольное расширеніе и поперечное сжатіе параллелепипеда, послѣдній приметъ *форму*, изображенную прямоугольникомъ $AB_1\,C_1\,D_1$, причемъ, для удобства дальнѣйшихъ разсужденій, мы начертили новый параллелепипедъ такъ, что его лѣвая и верхняя грани AD и AB совпадаютъ по направленію съ первоначальнымъ ихъ положеніемъ до растяженія.

При деформаціи нашего параллелепипеда подъ вліяніемъ нормальныхъ натяженій F, прямоугольникъ $EGHK$ перейдетъ въ параллелограммъ $E_1\,G_1\,H_1\,K_1$.

Обозначимъ острый уголъ между прямыми AG и EG черезъ ψ.

$$< AGE = \psi.$$

Далѣе, если поверхность, соотвѣтствующая участку AG, мы обозначимъ черезъ S, а поверхность, соотвѣтствующая участку EG, черезъ S_1, то

$$S_1 = \frac{S}{\cos\psi}.$$

Полная сила, дѣйствующая на AG и EG, будетъ $F.S$, а полное натяженіе, дѣйствующее на единицу поверхности EG, будетъ F_1, гдѣ

$$F_1 = \frac{FS}{S_1} = F\cos\psi.$$

Эта сила направлена вертикально вверхъ.

Проэкція этого натяженія на направленіе EG, т.-е. касательное натяженіе T, параллельное плоскости zx, выразится такъ:

$$T = F\cos\psi\sin\psi\,.\,.(78) \qquad \text{(см. также формулу (3))}$$

Такъ какъ уголъ $BGH = \frac{\pi}{2} - \psi$, то точно такъ-же найдемъ, что касательное натяженіе по направленію HG равно

$$T = F\sin\psi\cos\psi.$$

Такимъ образомъ оба касательныя натяженія, дѣйствующія на поверхности EG и GH въ направленіи къ точкѣ G, равны между собою, что согласно и съ выводами § 1.

Обозначимъ далѣе удлиненіе единицы длины въ направленіи AD черезъ s, а *укорачиваніе* единицы длины въ направленіи AB черезъ s'.

Тогда, въ силу соотношеній (55) и (56),

$$s = \frac{F}{E} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (79)$$

и

$$s' = \sigma\frac{F}{E} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (80)$$

Послѣ деформаціи уголъ $AGE = \psi$ сдѣлается равнымъ AG_1E_1, т.-е. увеличится на величину $\Delta\psi$.

Изъ треугольника AG_1E_1 имѣемъ .

$$\operatorname{tg}(\psi + \Delta\psi) = \frac{AE_1}{AG_1}.$$

Съ другой стороны

$$AE_1 = AE(1 + s),$$

а

$$AG_1 = AG(1 - s')$$

и

$$\frac{AE}{AG} = \operatorname{tg}\psi;$$

слѣдовательно

$$\operatorname{tg}(\psi + \Delta\psi) = \operatorname{tg}\psi\cdot\frac{1+s}{1-s'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (81)$$

Такъ какъ $\Delta\psi$, s и s' суть малыя величины, то, пренебрегая членами высшихъ порядковъ, будемъ имѣть

$$\operatorname{tg}(\psi + \Delta\psi) = \frac{\operatorname{tg}\psi + \Delta\psi}{1 - \Delta\psi . \operatorname{tg}\psi} = (\operatorname{tg}\psi + \Delta\psi)(1 + \Delta\psi \operatorname{tg}\psi)$$

$$= \operatorname{tg}\psi + \Delta\psi(1 + \operatorname{tg}^2\psi) = \operatorname{tg}\psi + \frac{\Delta\psi}{\cos^2\psi}$$

и

$$\frac{1+s}{1-s'} = (1+s)(1+s') = 1 + s + s'$$

или, въ силу соотношеній (79) и (80),

$$\frac{1+s}{1-s'} = 1 + (1+\sigma)\frac{F}{E}.$$

Подставляя эти выраженія въ формулу (81), получимъ

$$\frac{\Delta\psi}{\cos^2\psi} = \operatorname{tg}\psi\cdot(1+\sigma)\frac{F}{E}$$

или

$$\Delta\psi = \frac{1+\sigma}{E}\cdot F . \sin\psi\cos\psi.$$

Но, такъ какъ $F\sin\psi\cos\psi$ по формулѣ (78) равно касательному натяженію T, то мы получимъ окончательно

$$\Delta\psi = \frac{1+\sigma}{E}\cdot T \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (82)$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что измѣненіе угла ψ пропорціонально касательному натяженію T.

Такъ какъ по направленію HG дѣйствуетъ *то-же* касательное натяженіе T, то послѣ деформаціи уголъ BGH, превращаясь въ уголъ BG_1H_1, увеличится на ту-же величину $\Delta\psi$.

Такимъ образомъ, въ результатѣ, первоначальный прямой уголъ EGH отъ деформаціи сдѣлается равнымъ $E_1G_1H_1$, т.-е. уменьшится на величину

$$2\Delta\psi.$$

На ту-же величину $2\Delta\psi$ увеличится и уголъ GHK, сдѣлавшись равнымъ $G_1H_1K_1$.

Такимъ образомъ, разсматривая только *относительную* деформацію прямоугольника $EGHK$, мы видимъ, что уголъ $2\Delta\psi$ характеризуетъ собою угловой сдвигъ верхней грани EG по отношенію къ нижней KH.

Установивши это, повернемъ оси z и x такъ, чтобы ось Oz была-бы перпендикулярна къ верхней площадкѣ EG; тогда T будетъ параллельно оси x-овъ и представитъ собою ничто иное какъ то касательное натяженіе, которое мы обозначили раньше черезъ X_z или T_2 (см. черт. 3 и формулы (9)). Кромѣ того $2\Delta\psi$ представитъ собою соотвѣтствующій уголъ сдвига, который мы обозначили раньше черезъ $2\varphi_2$ (см. черт. 8).

Слѣдовательно

$$\Delta\psi = \varphi_2.$$

Но, по второй изъ формулъ (49),

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \Delta\psi.$$

Подставляя это выраженіе $\Delta\psi$ въ формулу (82), получимъ

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1+\sigma}{E}\cdot T_2$$

или, окончательно,

$$T_2 = \frac{1}{2}\,\frac{E}{1+\sigma}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

или еще, въ силу соотношенія (66),

$$T_2 = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (83)$$

Такъ какъ $\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$ равно полному углу сдвига $2\varphi_2$, то

$$T_2 = \mu\cdot(2\varphi_2).$$

Мы видимъ такимъ образомъ, что коэффиціентъ μ характеризуетъ собою свойство даннаго матеріала сопротивляться сдвигу, такъ какъ, чѣмъ больше μ, тѣмъ больше должно быть касательное натяженіе, долженствующее произвести опредѣленный сдвигъ $(2\varphi_2)$. Въ виду этого, коэффиціенту μ и присвоено, какъ мы на то раньше указывали, названіе *модуля сдвига.* Сдвигъ сопровождается всегда измѣненіемъ формы тѣла, а потому μ характеризуетъ также свойство даннаго матеріала сопротивляться измѣненію своей формы, почему коэффиціентъ μ и называется иногда *модулемъ твердости* (rigidité).

Подобно тому, какъ мы вывели выраженіе для касательнаго натяженія T_2 въ функціи отъ элементовъ, характеризующихъ деформацію твердаго тѣла, мы могли-бы вывести формулы и для другихъ двухъ касательныхъ натяженій T_3 и T_1. Но соотвѣтствующія выраженія найдутся очень просто изъ ранѣе выведенной формулы (83) простой круговой перестановкой буквъ.

Такимъ образомъ мы получимъ слѣдующую окончательную группу формулъ:

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \mu\left\{\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right\} \\ T_2 &= \mu\left\{\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right\} \\ T_3 &= \mu\left\{\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right\} \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots\dots (84)$$

Такимъ образомъ поставленная нами въ началѣ этого параграфа задача рѣшена.

Формулы (67) даютъ величины трехъ нормальныхъ, а формулы (84) трехъ касательныхъ натяженій, выраженныя черезъ элементы деформаціи, т.-е. черезъ различныя производныя по x, y и z отъ проэкцій смѣщеній данной точки u, v и w и черезъ двѣ постоянныя λ и μ, характеризующія собою упругія свойства даннаго твердаго тѣла.

Этимъ изложеніемъ основныхъ положеній теоріи упругости мы здѣсь и ограничимся.

Глава II.

Распространеніе упругихъ колебаній.

§ 1.

Продольныя и поперечныя колебанія.

Въ предыдущей главѣ мы изучили свойства упругихъ натяженій внутри твердаго тѣла, затѣмъ деформаціи элементарнаго параллелепипеда и, наконецъ, установили непосредственную зависимость между упругими силами и деформаціями.

Теперь приступимъ къ выводу основныхъ уравненій движенія для любой точки даннаго твердаго тѣла.

Для этой цѣли возьмемъ около произвольной точки M внутри тѣла, съ координатами x, y и z, элементарный параллелепипедъ, стороны котораго соотвѣтственно равны dx, dy и dz. Обозначивъ плотность вещества въ данной точкѣ черезъ ρ, масса этого параллелепипеда будетъ $\rho d\tau$, гдѣ $d\tau = dxdydz$.

Проэкціи перемѣщенія точки M на оси координатъ обозначимъ, какъ и раньше, соотвѣтственно черезъ u, v и w.

Эти величины суть не только функціи координатъ точки M, т.-е. функціи x, y, z, но и времени t.

Вторыя производныя отъ перемѣщеній по времени, т.-е. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, представляютъ собою проэкціи ускоренія движенія точки M.

Въ силу основной теоремы механики, произведеніе изъ массы элементарнаго параллелепипеда на ускореніе $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ должно равняться суммѣ проэкцій на ось x-овъ всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на данный параллелепипедъ.

Въ § 1 предыдущей главы, при выводѣ формулъ (6), опредѣляющія условія равновѣсія элементарнаго параллелепипеда, мы видѣли, что сумма

всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на параллелепипедъ параллельно оси x-овъ равна

$$\left[\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}+\rho X_1\right]d\tau,$$

гдѣ X_1 есть проэкція внѣшней силы, дѣйствующей на единицу массы, помѣщенной въ точкѣ M, а X_x, X_y и X_z суть проэкціи натяженій.

Такимъ образомъ мы будемъ имѣть:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}d\tau=\left[\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}+\rho X_1\right]d\tau.$$

Подобныя-же уравненія мы можемъ написать и для другихъ двухъ составляющихъ ускоренія. Сокращая эти равенства на $d\tau$, получимъ слѣдующую основную группу уравненій:

$$\left.\begin{aligned}\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}&=\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}+\rho X_1\\ \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}&=\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}+\rho Y_1\\ \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}&=\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}+\rho Z_1\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Таковы уравненія движенія точки M.

При равновѣсіи, лѣвыя части этихъ равенствъ равны нулю, и тогда мы получимъ извѣстную уже группу уравненій (6) § 1 предыдущей главы, опредѣляющія условія равновѣсія элементарнаго параллелепипеда.

Введемъ теперь въ уравненія (1) тѣ обозначенія, которыя мы установили раньше для нормальныхъ и касательныхъ натяженій (см. формулы (8) и (9) § 1 главы I).

Тогда мы будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned}\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}&=\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial T_3}{\partial y}+\frac{\partial T_2}{\partial z}+\rho X_1\\ \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}&=\frac{\partial T_3}{\partial x}+\frac{\partial N_2}{\partial y}+\frac{\partial T_1}{\partial z}+\rho Y_1\\ \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}&=\frac{\partial T_2}{\partial x}+\frac{\partial T_1}{\partial y}+\frac{\partial N_3}{\partial z}+\rho Z_1\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Въ вопросахъ сейсмологіи, внѣшнія силы X_1, Y_1, Z_1, обусловливаемыя тяготѣніемъ, чрезвычайно малы въ сравненіи съ различными натяженіями, дѣйствующими въ данной точкѣ, а потому мы можемъ этими силами въ первомъ приближеніи пренебречь.

Мы положимъ, такимъ образомъ, въ уравненіяхъ (2) X_1, Y_1 и Z_1 равными нулю.

Займемся теперь преобразованіемъ уравненій (2) и начнемъ съ перваго изъ нихъ.

Въ это уравненіе входитъ нормальное натяженіе N_1 и два касательныхъ натяженія T_3 и T_2, которыя мы можемъ выразить черезъ элементы деформаціи.

Дѣйствительно, первое уравненіе (67) и второе, и третье изъ уравненій (84) предыдущей главы даютъ намъ

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$T_3 = \mu\left\{\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right\}$$

$$T_2 = \mu\left\{\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right\},$$

гдѣ θ представляетъ собою расширеніе единицы объема, причемъ, какъ мы видѣли раньше (см. формулу (45) гл. I),

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Отсюда находимъ

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = \lambda\frac{\partial\theta}{\partial x} + 2\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial y} = \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial z} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}.$$

Подставивъ эти выраженія въ первую изъ формулъ (2) и положивши $X_1 = 0$, получимъ

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\} + \mu\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}\right\}$$

$$= \lambda\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\} + \mu\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right\}$$

$$= \lambda\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\} + \mu\frac{\partial\theta}{\partial x}.$$

Въ математической физикѣ принято, для сокращенія письма, обозначать сумму вторыхъ производныхъ какой-нибудь функціи по координатамъ

x, y, z символомъ Δ. Такимъ образомъ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Вводя это обозначеніе, мы получимъ окончательно

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

Совершенно подобнымъ-же образомъ мы найдемъ выраженія и для другихъ двухъ составляющихъ перемѣщеній v и w.

Такимъ образомъ мы получимъ слѣдующую окончательную основную группу уравненій:

$$\left.\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \mu \Delta v + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \mu \Delta w + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Это суть основныя дифференціальныя уравненія движенія для любой точки твердаго тѣла, внутри котораго дѣйствуютъ только упругія натяженія.

Въ эти уравненія входятъ, кромѣ различныхъ производныхъ отъ смѣщеній, еще два коеффиціента упругости λ и μ и плотность вещества ρ.

Эти уравненія принадлежатъ къ классу линейныхъ дифференціальныхъ уравненій второго порядка съ частными производными.

Эти уравненія для нашихъ цѣлей являются фундаментальными и они представляютъ собою точку отправленія нашихъ дальнѣйшихъ выводовъ и заключеній.

Возьмемъ теперь производную отъ перваго уравненія по x, отъ второго по y и отъ третьяго по z и сложимъ всѣ эти уравненія. Принимая во вниманіе, что результатъ дифференцированія не зависитъ отъ порядка, въ которомъ само дифференцированіе производится, мы будемъ имѣть

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \mu \Delta \left\{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right\} + (\lambda + \mu)\left\{\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\right\}$$

или, принимая во вниманіе соотношенія (3) и (4),

$$\rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \mu \Delta \theta + (\lambda + \mu) \Delta \theta,$$

или, окончательно,

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho} \cdot \Delta\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Въ это уравненіе входитъ только одна перемѣнная зависимая θ, т.-е. увеличеніе или уменьшеніе единицы объема, въ зависимости отъ того будетъ ли θ положительно или отрицательно.

θ, какъ интегралъ этого уравненія, будетъ нѣкоторой функціей отъ x, y, z и t.

$$\theta = F(x, y, z, t).$$

Положивши въ этомъ выраженіи $t =$ Const., мы будемъ знать, какъ распредѣляется θ во всемъ твердомъ тѣлѣ въ опредѣленный моментъ, т.-е. гдѣ будетъ сгущеніе или сжатіе, и гдѣ расширеніе матеріи. Положивши-же x, y и z постоянными, мы будемъ знать, какъ въ данной точкѣ твердаго тѣла θ мѣняется съ теченіемъ времени.

Въ случаѣ, если изъ какой-нибудь точки твердаго тѣла исходитъ колебательное движеніе, то уравненіе (6) опредѣляетъ собою законъ распространенія волнъ сжатія и расширенія.

Изъ основныхъ уравненій (5) можно вывести другое чрезвычайно важное слѣдствіе.

Возьмемъ производную по y отъ третьяго уравненія и производную по z отъ второго уравненія въ группѣ уравненій (5) и вычтемъ второе уравненіе изъ третьяго.

Тогда мы будемъ имѣть

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right\} = \mu \, \Delta \left\{ \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Члены, содержащіе множитель $(\lambda + \mu)$, взаимно сократятся.

Въ этомъ выраженіи величину $\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$ можно разсматривать какъ новую перемѣнную зависимую. Обозначимъ ее черезъ 2ξ, а другія двѣ величины, которыя получаются отсюда круговой перестановкой буквъ, соотвѣтственно черезъ 2η и 2ζ.

Такимъ образомъ мы будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right] \\ \eta &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right] \\ \zeta &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right] \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

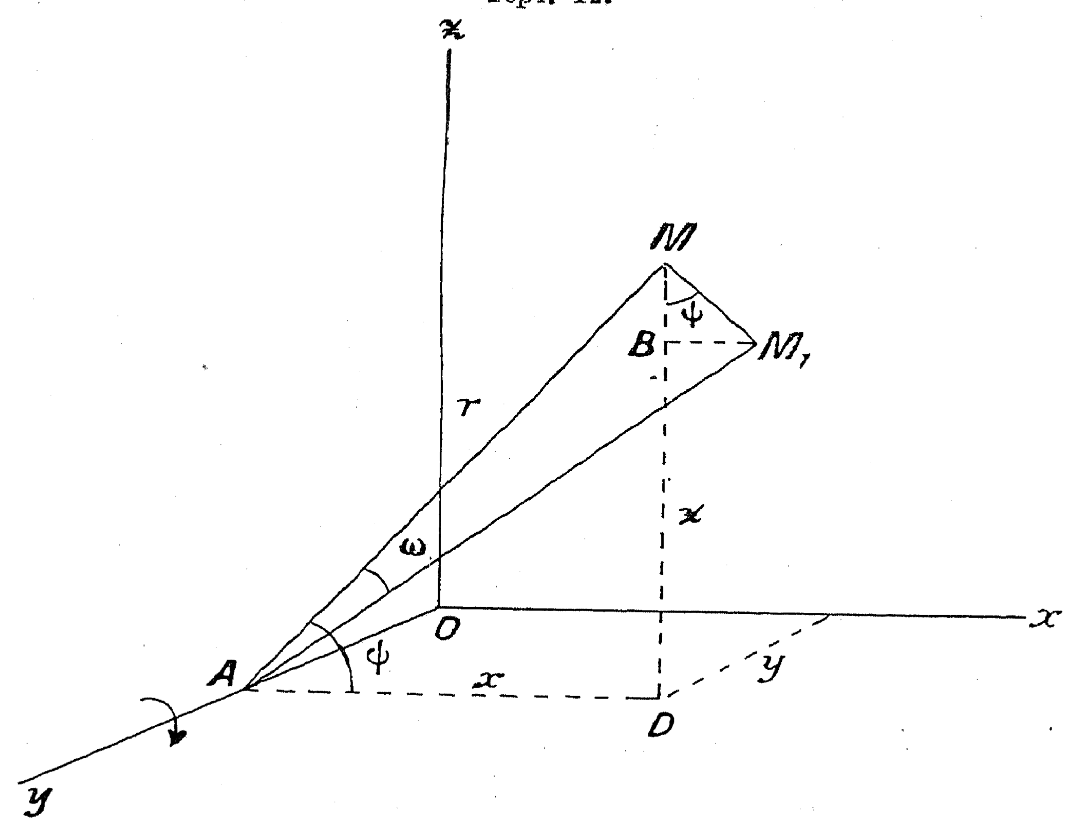
Тогда, на основаніи формулы (7), мы получимъ слѣдующую группу уравненій:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \frac{\mu}{\rho}\,\Delta\xi \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= \frac{\mu}{\rho}\,\Delta\eta \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= \frac{\mu}{\rho}\,\Delta\zeta\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Эти уравненія совершенно того-же типа, что уравненіе (6), только множитель передъ символомъ Δ нѣсколько иной.

Выяснимъ-же теперь себѣ, что представляетъ собою, напримѣръ, количество η.

Черт. 12.



Возьмемъ точку M съ координатами x, y, z и опустимъ изъ M перпендикуляръ MA на ось y-овъ (см. черт. 12). Длину перпендикуляра обозначимъ черезъ r, а уголъ MAD черезъ ψ.

Тогда

$$\left.\begin{aligned} z &= r\sin\psi \\ x &= r\cos\psi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Предположимъ теперь, что перемѣщеніе точки M произошло отъ нѣкотораго вращенія той части твердаго тѣла, которая непосредственно приле-

гаетъ къ точкѣ M, около оси Oy. Уголъ поворота ω мы предположимъ очень малымъ.

Тогда M перемѣстится въ M_1, причемъ уголъ M_1MB будетъ также равенъ ψ, а

$$MM_1 = r\omega.$$

При этомъ вращеніи въ направленіи движенія часовой стрѣлки координата x увеличится на величину $BM_1 = r\omega\sin\psi$, а координата z уменьшится на величину $BM = r\omega\cos\psi$. Координата y останется безъ измѣненія.

Для этого случая мы будемъ, слѣдовательно, имѣть

$$u = \omega . r\sin\psi$$

и

$$w = -\omega . r\cos\psi$$

или, на основаніи формулъ (10),

$$u = \omega . z$$

$$w = -\omega . x.$$

Отсюда находимъ

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$-\omega = \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Вычитая одно уравненіе изъ другого, получаемъ

$$\omega = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right\}.$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что ω есть ничто иное, какъ то количество, которое мы обозначили раньше черезъ η (см. вторую изъ формулъ (8)).

Мы видимъ, слѣдовательно, что количества ξ, η и ζ, входящія въ формулы (9), представляютъ собою малые углы поворота или крученія элементовъ твердаго тѣла, непосредственно прилегающихъ къ данной точкѣ, около соотвѣтственныхъ координатныхъ осей.

Формула (6) и формулы (9) соотвѣтствуютъ двумъ совершенно различнымъ типамъ деформацій. Формула (6) соотвѣтствуетъ сжатію и расширенію, а формулы (9) крученію, причемъ крученіе можетъ точно также мѣнять свой знакъ, какъ и объемное расширеніе θ.

Теперь перейдемъ къ интегрированію дифференціальнаго уравненія (6). Обозначимъ разстояніе нашей точки M до *начала* координатъ черезъ r. Тогда

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \dots\dots\dots\dots (11)$$

и

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial z} &= \frac{z}{r} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (12)$$

Легко убѣдиться въ томъ, что дифференціальное уравненіе (6)

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \cdot \Delta\theta \dots\dots\dots\dots (6)$$

удовлетворяется функціей вида $\frac{1}{r} \cdot F_1(r - V_1 t)$, гдѣ V_1 есть нѣкоторая постоянная величина, а сама функція F_1 *совершенно произвольная*.

Обозначимъ комбинацію величинъ $r - V_1 t$ одной буквой χ. Тогда χ будетъ функціей отъ x, y, z и t.

$$\chi = r - V_1 t$$

и

$$\theta = \frac{F_1(\chi)}{r}.$$

Кромѣ того

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial y} = \frac{\partial \chi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial z} = \frac{\partial \chi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

Составимъ теперь выраженія для $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$ и $\Delta\theta$, входящія въ формулу (6).

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial F_1}{\partial \chi} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial t} = - \frac{V_1}{r} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \chi}.$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = + \frac{V_1{}^2}{r} \cdot \frac{\partial^2 F_1}{\partial \chi^2} \dots\dots\dots\dots (13)$$

Далѣе

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \chi} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{F_1}{r^2} \cdot \frac{x}{r}$$

или

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{x}{r^2}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial\chi} - F_1\frac{x}{r^3}.$$

Беремъ теперь вторую производную.

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{x}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 F_1}{\partial\chi^2}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial\chi}\cdot\frac{r^2 - x\,2r\frac{x}{r}}{r^4} - \frac{x}{r^3}\frac{\partial F_1}{\partial\chi}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial x} - F_1\frac{r^3 - x\,3r^2\frac{x}{r}}{r^6}$$

$$= \frac{x^2}{r^3}\cdot\frac{\partial^2 F_1}{\partial\chi^2} + \frac{r^2-2x^2}{r^4}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial\chi} - \frac{x^2}{r^4}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial\chi} - \frac{r^2-3x^2}{r^5}\cdot F_1$$

или, окончательно,

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^3}\cdot\frac{\partial^2 F_1}{\partial\chi^2} + \frac{r^2-3x^2}{r^4}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial\chi} - \frac{r^2-3x^2}{r^5}\cdot F_1.$$

Совершенно подобнымъ-же образомъ найдемъ

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^3}\cdot\frac{\partial^2 F_1}{\partial\chi^2} + \frac{r^2-3y^2}{r^4}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial\chi} - \frac{r^2-3y^2}{r^5}\cdot F_1$$

и

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = \frac{z^2}{r^3}\cdot\frac{\partial^2 F_1}{\partial\chi^2} + \frac{r^2-3z^2}{r^4}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial\chi} - \frac{r^2-3z^2}{r^5}\cdot F_1.$$

Складывая эти три выраженія, получимъ

$$\Delta\theta = \frac{x^2+y^2+z^2}{r^3}\cdot\frac{\partial^2 F_1}{\partial\chi^2} + \frac{3r^2-3(x^2+y^2+z^2)}{r^4}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial\chi} - \frac{3r^2-3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}F_1$$

или, въ силу соотношенія (11),

$$\Delta\theta = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2 F_1}{\partial\chi^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14$$

Подставляя теперь выраженія для $\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$ и $\Delta\theta$ изъ формулъ (13) и (14) въ дифференціальное уравненіе (6), получимъ

$$\frac{V_1^2}{r}\cdot\frac{\partial^2 F_1}{\partial\chi^2} = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2 F_1}{\partial\chi^2}$$

или

$$V_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что функція $\frac{1}{r}\cdot F_1(r - V_1 t)$ дѣйствительно удовлетворяетъ нашему дифференціальному уравненію, при условіи, что V_1 имѣетъ численное значеніе, опредѣляемое уравненіемъ (15).

Видъ функціи F_1 пока совершенно произвольный. Чтобы его опредѣлить, надо задать начальныя условія задачи, т.-е. задать значенія θ и $\frac{d\theta}{dt}$ въ моментъ $t = 0$ для различныхъ точекъ твердаго тѣла и кромѣ того значенія θ въ началѣ координатъ для любого момента t.

Интегралъ уравненія (6) долженъ кромѣ того удовлетворять еще нѣкоторымъ пограничнымъ условіямъ для поверхности, ограничивающей данное твердое тѣло.

Общимъ рѣшеніемъ этого вопроса мы, однако, заниматься не будемъ.

Итакъ мы видимъ, что интегралъ дифференціальнаго уравненія (6) представляется въ слѣдующемъ видѣ:

$$\theta = \frac{F_1(r - V_1 t)}{r}, \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (16)$$

гдѣ функція F_1 пока совершенно произвольная.

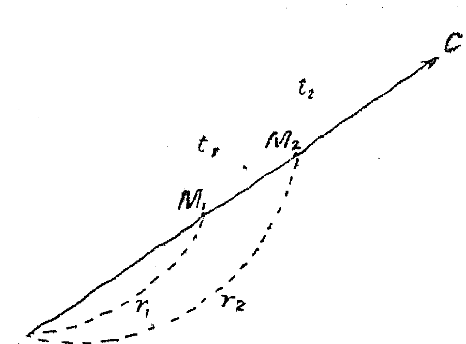
Выяснимъ себѣ ближе смыслъ этой формулы.

Предположимъ, что въ моментъ $t = 0$ въ какой-нибудь точкѣ даннаго твердаго тѣла произошло нарушеніе условій равновѣсія, вызвавшее извѣстныя деформаціи, въ частности возникновеніе расширенія или сжатія θ. Перенесемъ въ эту точку начало координатъ.

Функція F_1 опредѣляетъ собою характеръ самого возмущенія, а r въ знаменателѣ показываетъ, что въ этомъ случаѣ величина деформаціи θ, при *заданномъ* значеніи F_1, убываетъ обратно пропорціонально r. Это соотвѣтствуетъ тому случаю, когда данное возмущеніе распространяется во всѣ стороны одинаково.

Разсмотримъ теперь свойства функціи F_1.

Черт. 13.



Возьмемъ для этого какое нибудь опредѣленное направленіе OC (см. черт. 13) и предположимъ, что въ нѣкоторый моментъ $t = t_1$ и въ точкѣ M_1, находящейся въ разстояніи r_1 отъ начала координатъ O, F_1 имѣетъ опредѣленное численное значеніе A.

Тогда

$$F_1(r_1 - V_1 t_1) = A.$$

Возьмемъ теперь другую точку M_2 въ разстояніи $r_2 > r_1$ и спросимъ себя, когда въ этой новой точкѣ функція F_1 приметъ то-же значеніе A. Соотвѣтствующій моментъ пусть будетъ t_2.

Тогда

$$F_1(r_2 - V_1 t_2) = F_1(r_1 - V_1 t_1) = A.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$r_2 - V_1 t_2 = r_1 - V_1 t_1$$

или

$$V_1 = \frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1}.$$

Слѣдовательно, данная деформація, характеризуемая величиной A, пройдетъ разстояніе $r_2 - r_1$ за промежутокъ времени $t_2 - t_1$; такимъ образомъ V_1 представляетъ собою ничто иное, какъ *скорость*, съ которой данная деформація распространяется въ нашемъ твердомъ тѣлѣ.

Эта есть скорость распространенія волнъ сжатія и расширенія. Величина этой скорости дается формулой (15).

Итакъ мы видимъ, что скорость V_1 есть величина постоянная, зависящая только отъ упругихъ свойствъ и плотности даннаго матеріала. Движеніе передается такимъ образомъ постепенно все дальше и дальше отъ слоя къ слою съ постоянной скоростью, но величина соотвѣтствующей деформаціи θ убываетъ обратно пропорціонально разстоянію r.

Обратимся теперь къ уравненіямъ (9).

Такъ какъ они имѣютъ совершенно тотъ-же видъ, что дифференціальное уравненіе (6), то къ этимъ уравненіямъ мы можемъ примѣнить совершенно тѣ-же самыя разсужденія.

Слѣдовательно, напримѣръ, ξ выразится такъ:

$$\xi = \frac{F_2(r - V_2 t)}{r}, \qquad (17)$$

гдѣ F_2 совершенно произвольная функція, а V_2 есть нѣкоторая постоянная величина, причемъ

$$V_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \qquad (18)$$

V_2 есть ничто иное, какъ скорость распространенія соотвѣтствующаго типа деформацій внутри твердаго тѣла.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что этотъ типъ деформацій, т.-е. волны крученія или сдвига, распространяются съ иной скоростью, чѣмъ волны сгущенія или сжатія и разрѣженія.

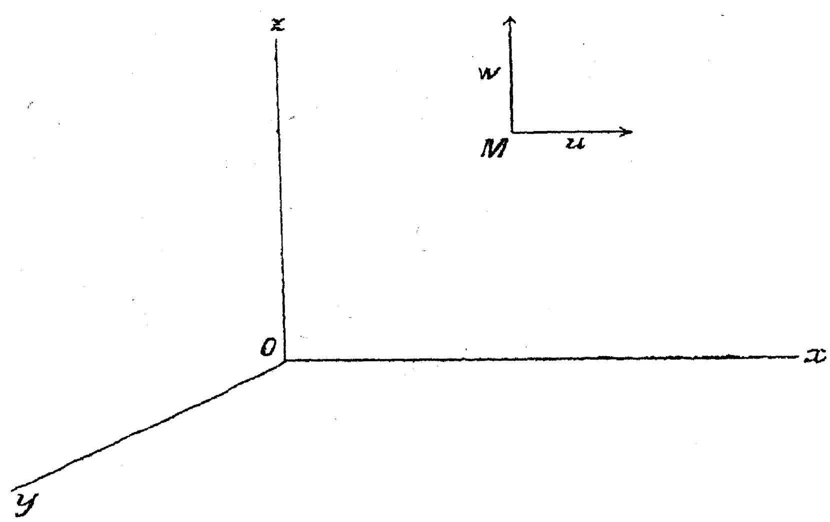
Чтобы лучше выяснить себѣ характеръ этихъ двухъ различныхъ типовъ упругихъ колебаній, разсмотримъ слѣдующіе два частныхъ случая.

Предположимъ, что направленіе распространенія упругихъ деформацій параллельно оси x-овъ.

I-ый случай.

Смѣщенія точки M происходятъ параллельно оси x-овъ, причемъ величина смѣщенія u одинакова для всѣхъ точекъ, лежащихъ въ одной и той-же плоскости, перпендикулярной оси x-овъ (плоская волна).

Черт. 14.



Тогда мы будемъ имѣть:

$$v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Слѣдовательно

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} \dots\dots\dots\dots\dots (19)$$

и

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Кромѣ того

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Тогда первое изъ уравненій (5) приведется къ слѣдующему виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \dots\dots\dots\dots\dots (20)$$

Легко убѣдиться, что интегралъ этого дифференціальнаго уравненія можетъ быть представленъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$u = \Phi_1(x - V_1 t), \dots\dots\dots\dots\dots (21)$$

гдѣ Φ_1 есть совершенно произвольная функція, а

$$V_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}.$$

Дѣйствительно, введя слѣдующее обозначеніе

$$\chi = x - V_1 t,$$

будемъ имѣть

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V_1^2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \chi^2}$$

и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \chi^2}.$$

Подставляя эти выраженія въ уравненіе (20), получимъ

$$V_1^2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \chi^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \chi^2}$$

или

$$V_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}.$$

Расширеніе или сжатіе единицы объема θ представится въ этомъ случаѣ, на основаніи уравненія (19), такъ:

$$\theta = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \chi}.$$

V_1 есть скорость распространенія волнъ сгущенія и разрѣженія.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что этотъ типъ деформацій соотвѣтствуетъ продольнымъ движеніямъ отдѣльныхъ частицъ, т.-е. движеніямъ, совпадающимъ по направленію съ направленіемъ распространенія данныхъ упругихъ деформацій.

Такія движенія или колебанія называются продольными, а соотвѣтствующія волны, *продольными волнами*.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что продольныя волны суть волны сгущенія и разрѣженія матеріи.

Формула (21) соотвѣтствуетъ, какъ легко видѣть, случаю плоской волны (u не зависитъ отъ y и z), для которой, если мы отвлечемся пока отъ поглощенія энергіи въ данной срединѣ, черезъ которую движеніе проходитъ, величина *максимальнаго* смѣщенія u, соотвѣтствующая опредѣленному моменту t, а, слѣдовательно, и соотвѣтствующая величина $\theta = \frac{\partial u}{\partial x}$, не убываетъ съ возрастаніемъ разстоянія x.

Формула-же (16) соотвѣтствуетъ случаю сферическихъ волнъ, распространяющихся во всѣ стороны изъ даннаго центра возмущенія, причемъ величина соотвѣтствующей деформаціи θ убываетъ обратно пропорціонально разстоянію r до центра возмущенія.

II-ой случай.

Предположимъ теперь, что всѣ точки, лежащія въ одной и той-же плоскости, перпендикулярной къ оси x-овъ, перемѣщаются параллельно оси z-овъ и на одну и ту-же величину w.

Тогда мы будемъ имѣть:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Въ этомъ случаѣ

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

т.-е. соотвѣтствующая деформація не сопровождается расширеніемъ или сжатіемъ матеріи, а происходитъ лишь *сдвигъ* слоевъ, однихъ относительно другихъ, параллельно оси z-овъ.

Въ этомъ случаѣ смѣщеніе отдѣльныхъ точекъ твердаго тѣла совершается въ направленіи *перпендикулярномъ* къ направленію распространенія даннаго типа упругихъ деформацій.

Величина смѣщенія w измѣняется, однако, въ зависимости отъ координаты x, такъ какъ $\frac{\partial w}{\partial x}$ не равно нулю.

Такимъ образомъ для этого случая мы будемъ имѣть

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

и

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0.$$

Подставляя эти величины въ третье изъ уравненій (5), получимъ

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Интегралъ этого уравненія будетъ

$$w = \Phi_2 (x - V_2 t), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

гдѣ Φ_2 есть опять совершенно произвольная функція, а

$$V_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

V_2 представляетъ собою скорость распространенія соотвѣтствующихъ деформацій, т.-е. скорость распространенія волнъ сдвига.

Такъ какъ въ этомъ случаѣ направленіе движеній или колебаній частицъ перпендикулярно къ направленію распространенія данной упругой деформаціи, то такія колебанія называются поперечными, а соотвѣтствующія волны *поперечными волнами*.

Формула (22) соотвѣтствуетъ опять случаю плоской волны.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что въ каждомъ твердомъ тѣлѣ могутъ возникнуть и распространяться, и притомъ *совершенно независимо другъ отъ друга*, два совершенно различныхъ типа колебаній, а именно продольныя колебанія или волны, т.-е. волны сжатія и разрѣженія, и волны поперечныя или волны сдвига.

Этотъ результатъ является непосредственнымъ слѣдствіемъ нашихъ основныхъ дифференціальныхъ уравненій.

Соотвѣтствующія скорости V_1 и V_2 зависятъ только отъ упругихъ свойствъ и плотности даннаго матеріала. Величины этихъ скоростей опредѣляются формулами (15) и (18).

Если, въ случаѣ поперечныхъ колебаній, *направленіе* колебаній частицъ остается все время неизмѣннымъ (w можетъ быть положительнымъ или отрицательнымъ), то это соотвѣтствуетъ какъ-бы случаю плоско поляризованнаго свѣтового луча.

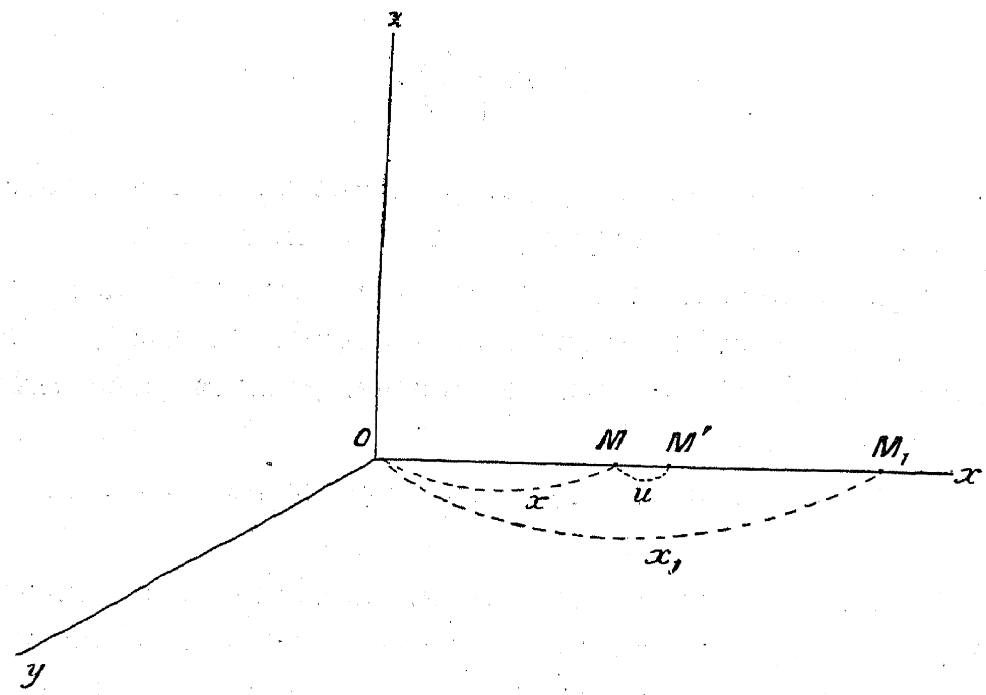
Мы можемъ, такимъ образомъ, условно назвать плоскость, проходящую черезъ направленіе колебаній частицъ и черезъ направленіе распространенія движенія, плоскостью поляризаціи соотвѣтствующихъ поперечныхъ упругихъ колебаній.

Постараемся теперь ближе охарактеризовать видъ функцій Φ_1 и Φ_2 (см. формулы (21) и (22)).

Разсмотримъ случай продольныхъ колебаній, распространяющихся параллельно оси x-овъ (плоская волна), и возьмемъ точку M на оси x-овъ въ разстояніи x отъ центра возмущеній O (см. черт. 15).

Вообразимъ себѣ около точки M маленькій элементарный объемъ, общая масса котораго пусть будетъ m.

Черт. 15.



Смѣщеніе точки M параллельно оси x-овъ обозначимъ, какъ и раньше, черезъ u. По условію точка M можетъ перемѣщаться только вдоль оси x-овъ.

Когда $u = 0$, нашъ элементъ объема находится въ состояніи устойчиваго равновѣсія. Когда-же M перемѣстится въ M', то, отъ реакціи окружающей средины, возникнетъ нѣкоторая сила F, направленная отъ M' въ сторону къ M, и стремящая вернуть частицу въ прежнее ея положеніе равновѣсія M. Легко видѣть, что сила F всегда направлена въ сторону противоположную смѣщенію u, такъ какъ въ противномъ случаѣ частица не могла-бы находиться въ точкѣ M въ состояніи устойчиваго равновѣсія, такъ какъ, стоило-бы ей перемѣститься лишь на безконечно-малую величину, чтобы тотчасъ-же возникла сила, стремящая передвинуть ее еще дальше и т. д.

Совершенно не анализируя ближе характеръ возникшей силы реакціи F, мы можемъ во всякомъ случаѣ сказать, что F есть нѣкоторая функція отъ u

$$F = f(u).$$

Такъ какъ u есть вообще малая величина, такъ какъ мы всегда ставимъ условіе, чтобы предѣлъ упругости не былъ-бы перейденъ, то мы можемъ разложить $f(u)$ въ рядъ по степенямъ u по строкѣ Маклорена.

$$f(u) = A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + \dots .$$

Коэффиціентъ A_0, очевидно, равенъ нулю, такъ какъ, при $u=0$, сила F обращается въ нуль. Такъ какъ u малая величина, то, въ первомъ приближеніи, мы можемъ въ предыдущемъ разложеніи пренебречь членами, содержащими u въ квадратѣ и въ высшихъ степеняхъ, и положить просто

$$f(u) = A_1 u.$$

Ускореніе массы m въ сторону возрастающихъ x-овъ будетъ $\frac{d^2 u}{dt^2}$. Такимъ образомъ, на основаніи основной теоремы динамики, по которой произведеніе изъ массы на ускореніе равно дѣйствующей силѣ, получимъ

$$m\frac{d^2 u}{dt^2} = -A_1 u.$$

Знакъ (—) показываетъ, что реакція среды стремится уменьшить ускореніе движенія массы m.

Введемъ для простоты слѣдующее обозначеніе:

$$p^2 = \frac{A_1}{m}.$$

Тогда мы будемъ имѣть

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + p^2 u = 0 \qquad \text{(23)}$$

Это есть дифференціальное уравненіе движенія точки M.

p есть нѣкоторый постоянный коэффиціентъ, физическій смыслъ котораго мы выяснимъ себѣ впослѣдствіи.

Уравненіе (23) есть линейное дифференціальное уравненіе втораго порядка отъ одной независимой перемѣнной t. Слѣдовательно, общій интегралъ этого уравненія долженъ заключать въ себѣ двѣ постоянныя произвольныя.

Легко написать два частныхъ рѣшенія u_1 и u_2 для этого дифференціальнаго уравненія, а именно

$$u_1 = \sin pt$$

и

$$u_2 = \cos pt.$$

Подставивъ эти величины въ уравненіе (23), легко видѣть, что оно обратится въ тождество. То-же будетъ, если мы каждое изъ этихъ частныхъ рѣшеній умножимъ соотвѣтственно на произвольныя постоянныя A и B.

Такъ какъ уравненіе (23) есть уравненіе линейное, то и сумма этихъ двухъ частныхъ рѣшеній будетъ также ему удовлетворять.

Такимъ образомъ общій интегралъ даннаго дифференціальнаго уравненія (23) представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$u = A\sin pt + B\cos pt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

Это выраженіе будетъ общимъ интеграломъ, такъ какъ оно содержитъ въ себѣ двѣ произвольныя постоянныя A и B.

Представимъ уравненіе (24) въ другомъ видѣ, а именно

$$u = \sqrt{A^2 + B^2}\left[\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\sin pt + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\cos pt\right].$$

Мы будемъ всегда предполагать радикалъ взятымъ съ положительнымъ знакомъ.

Введемъ теперь слѣдующія обозначенія:

$$a = +\sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Мы это можемъ сдѣлать, потому что мы получимъ, какъ и требуется,

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1.$$

Слѣдовательно

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{B}{A}.$$

Подставляя эти величины въ предыдущую формулу для u, мы получимъ слѣдующее окончательное выраженіе:

$$u = a\sin(pt + \varphi) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

a и φ суть двѣ постоянныя величины, опредѣляемыя начальными условіями движенія.

Формула (25) показываетъ, что u есть періодическая функція времени t, причемъ u измѣняется согласно закону такъ называемыхъ гармоническихъ колебаній.

u измѣняется въ предѣлахъ отъ $+a$, до $-a$, а потому a называется *амплитудой* колебаній.

Аргументъ при синусѣ, а именно $pt + \varphi$, называется *фазой* движенія, а постоянная φ начальной фазой, такъ какъ она соотвѣтствуетъ моменту $t = 0$.

Найдемъ промежутокъ времени, который долженъ протечь, чтобы u и $\frac{du}{dt}$ приняли бы вновь свои прежнія численныя значенія.

Этотъ промежутокъ мы обозначимъ черезъ T.

Для этого требуется, чтобы аргументъ при синусѣ или фаза увеличилась-бы на 2π.

Итакъ

$$p(t + T) + \varphi = pt + \varphi + 2\pi.$$

Слѣдовательно

$$T = \frac{2\pi}{p}$$

или

$$p = \frac{2\pi}{T} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

T называется полнымъ *періодомъ* одного колебанія, а

$$N = \frac{1}{T} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

даетъ число полныхъ колебаній въ 1 секунду.

Формула (26) опредѣляетъ такимъ образомъ физическій смыслъ того количества, которое мы обозначили раньше черезъ p.

Подставивъ его величину въ уравненіе (25), получимъ

$$u = a \sin\left\{2\pi \frac{t}{T} + \varphi\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

Возьмемъ теперь другую точку M_1, находящуюся въ разстояніи x_1 отъ начала координатъ.

Такъ какъ движеніе передается вдоль оси x-овъ съ нѣкоторой опредѣленной конечной скоростью V_1, равной скорости распространенія продольныхъ колебаній (см. формулу (15)), то опредѣленная фаза движенія точки M (т.-е. опредѣленная величина u), имѣющая мѣсто въ моментъ t, придетъ въ M_1 въ моментъ

$$t + \frac{x_1 - x}{V_1}.$$

Слѣдовательно, отклоненіе u_1 точки M_1 отъ своего положенія равновѣсія въ моментъ t будетъ такое-же какъ отклоненіе точки M, но только въ

моментъ

$$t - \frac{x_1 - x}{V_1}.$$

Итакъ для движенія точки M_1 мы получимъ слѣдующее уравненіе:

$$u_1 = a\sin\left\{2\pi \frac{t - \frac{x_1 - x}{V_1}}{T} + \varphi\right\}.$$

Точки M и M_1 взяты нами совершенно произвольно.

Мы можемъ поэтому считать точку M постоянной, т.-е. положить $x = x_0$, а x_1 считать величиной перемѣнной, характеризующей положеніе перемѣнной точки M_1.

Предыдущее уравненіе можно тогда представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$u_1 = a\sin\left\{2\pi\left(\frac{t - \frac{x_1}{V_1}}{T}\right) + \left(\varphi + 2\pi\frac{x_0}{V_1 T}\right)\right\}.$$

$\varphi + 2\pi\frac{x_0}{V_1 T}$ есть нѣкоторая постоянная величина, которую мы обозначимъ черезъ φ_1.

Тогда

$$u_1 = a\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{V_1 T}\right) + {}_1\varphi\right\}.$$

Эта формула показываетъ, что, *для того-же момента* t, величина уклоненія u_1 какой-нибудь точки M_1 отъ своего положенія равновѣсія измѣняется вмѣстѣ съ величиной x_1, и каждый разъ, что x_1 измѣняется на величину $V_1 T$, u_1 воспринимаетъ то-же самое численное значеніе. Такимъ образомъ, если мы для какого-нибудь опредѣленнаго момента t представимъ уклоненія различныхъ точекъ, расположенныхъ вдоль оси x-овъ, отъ соотвѣтственныхъ ихъ положеній равновѣсія графически, откладывая отклоненія u_1 *перпендикулярно* къ линіи Ox, то получимъ волнообразную линію (синусоиду), причемъ разстояніе между двумя сосѣдними гребнями волнъ будетъ ничто иное, какъ *длина волны*, которую мы для продольныхъ колебаній обозначимъ черезъ λ_1.

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что

$$\lambda_1 = V_1 T \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

или, на основаніи соотношенія (27),

$$N\lambda_1 = V_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

Такъ какъ V_1 для данной средины есть величина постоянная, то изъ уравненія (29) слѣдуетъ, что, чѣмъ короче періодъ колебаній T, тѣмъ короче будетъ и соотвѣтствующая длина волны.

Такъ какъ M_1 есть совершенно произвольная точка, то мы можемъ, вмѣсто x_1, обозначить теперь соотвѣтствующую координату просто черезъ x. Соотвѣтственно этому напишемъ вмѣсто u_1 — u, а вмѣсто φ_1 — φ.

Тогда мы получимъ слѣдующее окончательное уравненіе движенія частицы въ случаѣ продольныхъ упругихъ колебаній, распространяющихся вдоль оси x:

$$u = a \sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_1}\right) + \varphi\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

Итакъ мы видимъ, что эти чрезвычайно простыя соображенія приводятъ къ тому результату, что движеніе частицъ при продольныхъ колебаніяхъ должно имѣть синусоидальный характеръ. Этотъ результатъ подтверждается и непосредственными наблюденіями.

Мы имѣемъ слѣдовательно полное право разсматривать явленіе распространенія сгущеній и разряженій (θ), какъ явленіе распространенія продольныхъ *волнъ*.

На основаніи соотношенія (29) мы можемъ формулу (31) представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$u = a \sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{V_1 T}\right) + \varphi\right\}$$

или

$$u = a \sin\left\{-\frac{2\pi}{\lambda_1}(x - V_1 t) + \varphi\right\}.$$

Мы видимъ такимъ образомъ, что u есть дѣйствительно функція комбинаціи величинъ $(x - V_1 t)$, какъ это и требуется общимъ интеграломъ вида

$$u = \Phi_1(x - V_1 t) \qquad \text{(см. формулу (21))}$$

Слѣдовательно, то выраженіе для u, къ которому мы пришли совершенно особымъ путемъ и которое представлено уравненіемъ (31), дѣйствительно удовлетворяетъ основнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ теоріи упругости.

Мы нашли такимъ образомъ видъ функціи Φ_1 для случая продольныхъ упругихъ волнъ.

Совершенно аналогичныя разсужденія мы можемъ примѣнить и къ случаю поперечныхъ колебаній.

Мы придемъ тогда для поперечнаго смѣщенія w какой-нибудь точки M, къ уравненію вида

$$w = b \sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_2}\right) + \psi\right\}, \ldots \ldots \ldots \ldots (32)$$

гдѣ

$$\lambda_2 = V_2 T \ldots \ldots \ldots \ldots (33)$$

Здѣсь V_2 есть скорость распространенія поперечныхъ волнъ, T періодъ соотвѣтствующихъ колебаній, который можетъ быть различный для продольныхъ и поперечныхъ волнъ, λ_2 соотвѣтствующая длина волны, b амплитуда колебаній, а ψ нѣкоторая постоянная величина, которая никакой существенной роли не играетъ.

Легко видѣть, что и w есть также функція отъ $(x - V_2 t)$, какъ это и требуется уравненіемъ (22).

Выяснивъ такимъ образомъ характеръ движенія частицъ при продольныхъ и поперечныхъ волнахъ, опредѣлимъ теперь величину энергіи, соотвѣтствующей данному колебательному движенію.

Для этой цѣли можно безразлично взять формулу (31) или (32).

Возьмемъ, напримѣръ, выраженіе для продольныхъ колебаній (формула (31)).

Энергія движенія массы m, сосредоточенной около точки M, будетъ, очевидно, пропорціональна соотвѣтствующей живой силѣ движенія, т.-е., *при прочихъ равныхъ условіяхъ*, пропорціональна $\left(\frac{du}{dt}\right)^2$.

Обозначивъ величину искомой энергіи движенія черезъ I, мы можемъ положить

$$I = C\left(\frac{du}{dt}\right)^2,$$

гдѣ C есть нѣкоторый коеффиціентъ пропорціональности.

На основаніи формулы (31) мы будемъ имѣть

$$I = \frac{4\pi^2 a^2}{T^2} \cdot C \cdot \cos^2\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_1}\right) + \varphi\right\}.$$

Это выраженіе показываетъ, что величина энергіи I все время мѣняется въ предѣлахъ отъ $I = 0$ до $I = \frac{4\pi^2 a^2}{T^2} C$.

При очень малыхъ значеніяхъ T, мы фактически не въ состояніи воспринять величину энергіи въ данный опредѣленный моментъ t, а лишь среднюю величину I за полный періодъ колебаній T.

Найдемъ эту среднюю величину $I = I_m$, причемъ за начальный мо-

ментъ интегрированія мы возьмемъ совершенно произвольный моментъ t_0. При этомъ интегрированіи x остается постояннымъ.

Легко видѣть, что

$$I_m = \frac{4\pi^2 a^2}{T^2} \cdot C \cdot \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2 \left\{ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_1} \right) + \varphi \right\} dt.$$

Для удобства интегрированія введемъ новую перемѣнную α:

$$\alpha = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_1} \right) + \varphi.$$

Тогда

$$dt = \frac{T}{2\pi} d\alpha.$$

Предѣлы интегрированія будутъ:

при $t = t_0$ $$2\pi \left(\frac{t_0}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right) + \varphi = \alpha_0,$$

при $t = t_0 + T$ $$\alpha = \alpha_0 + 2\pi.$$

Подставляя эти величины въ предыдущую формулу, получимъ

$$I_m = \frac{2\pi a^2}{T^2} \cdot C \int_{\alpha_0}^{\alpha_0+2\pi} \cos^2 \alpha \cdot d\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

Найдемъ сначала выраженіе неопредѣленнаго интеграла.

$$\int \cos^2 \alpha \, d\alpha = \int \cos \alpha \, d(\sin \alpha) = \cos \alpha \sin \alpha + \int \sin^2 \alpha \, d\alpha$$

или

$$\int \cos^2 \alpha d\alpha = \sin \alpha \cos \alpha + \int (1 - \cos^2 \alpha) \, d\alpha.$$

Отсюда имѣемъ

$$\int \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\alpha,$$

слѣдовательно

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_0+2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha = \left[\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\alpha \right]_{\alpha_0}^{\alpha_0+2\pi} = \pi + \frac{1}{4} \left\{ \sin(2\alpha_0 + 4\pi) - \sin 2\alpha_0 \right\} = \pi.$$

Подставляя это выраженіе въ формулу (34) и опуская индексъ m,

т.-е., понимая въ дальнѣйшемъ подъ I среднюю величину энергіи, получимъ окончательно

$$I = 2\pi^2 C \cdot \frac{a^2}{T^2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (35)$$

Мы видимъ, такимъ образомъ, что средняя величина энергіи равна половинѣ максимальной ея величины.

Кромѣ того, при прочихъ равныхъ условіяхъ, I пропорціонально *квадрату амплитуды a и обратно пропорціонально квадрату періода T.* Для того-же типа волнъ, съ тѣмъ-же самымъ періодомъ T, энергія прямо пропорціональна квадрату амплитуды.

Для плоской волны, *при отсутствіи поглощенія, a* не зависитъ отъ величины x.

Въ случаѣ-же волнъ, распространяющихся изъ нѣкотораго центра O во всѣ стороны по шаровымъ поверхностямъ, величина соотвѣтствующей деформаціи, какъ мы то видѣли изъ формулъ (16) и (17), убываетъ обратно пропорціонально первой степени разстоянія r до центра возмущенія O.

Изъ этого слѣдуетъ непосредственно, что, при сферическихъ волнахъ, *энергія* убываетъ обратно пропорціонально квадрату разстоянія, что понятно и само собою, потому что, если поверхности волнъ увеличиваются пропорціонально r^2, то количество энергіи, приходящейся на единицу поверхности, должно убывать обратно пропорціонально r^2.

Предыдущія разсужденія предполагаютъ, однако, что среда, черезъ которую проходятъ данныя волны, нисколько не поглощаетъ даннаго колебательнаго движенія.

Посмотримъ теперь, какъ будетъ измѣняться величина энергіи съ разстояніемъ при наличіи извѣстнаго поглощенія.

Разсмотримъ опять плоскую волну.

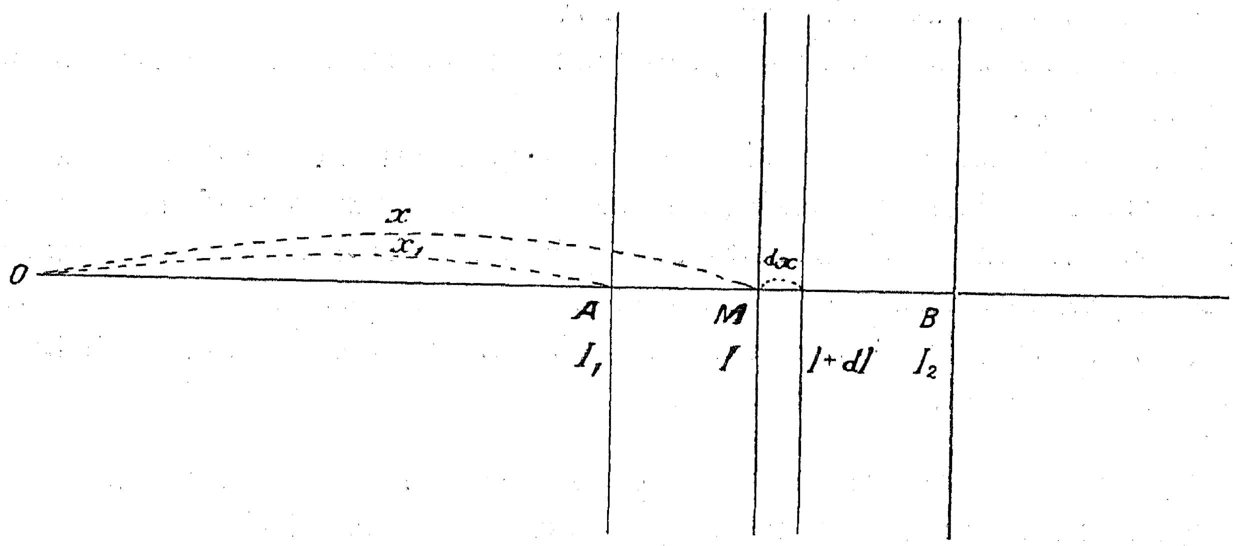
Возьмемъ нѣкоторый плоскій слой даннаго вещества AB, толщиной h, и пусть координата точки A будетъ x_1, а координата точки B — x_2. (См. черт. 16).

Соотвѣтствующія значенія I въ точкахъ A и B обозначимъ черезъ I_1 и I_2.

Возьмемъ какую-нибудь произвольную точку M внутри слоя AB съ координатой x и около нея безконечно-тонкій слой толщиной dx. Величина энергіи, вступающей въ этотъ слой, пусть будетъ I, а величина энергіи выступающей $I + dI$, гдѣ dI по своему смыслу есть величина отрицательная.

Абсолютная величина dI должна очевидно быть пропорціональной dx, а также и полному количеству падающей энергіи I. Обозначивъ коеффиціентъ пропорціональности черезъ k, гдѣ k зависитъ, не только отъ свойствъ

Черт. 16.



данной среды, но и отъ самого вида падающей энергіи, напр. отъ періода колебаній T, мы можемъ положить

$$dI = -kIdx$$

или

$$\frac{dI}{I} = -kdx.$$

Интегрируя это выраженіе въ предѣлахъ отъ $x = x_1$ до $x = x_2$, получимъ

$$\lg \frac{I_2}{I_1} = -k(x_2 - x_1)$$

или

$$I_2 = I_1 e^{-k(x_2 - x_1)},$$

или еще

$$\frac{I_1}{e^{-kx_1}} = \frac{I_2}{e^{-kx_2}} = \frac{I_3}{e^{-kx_3}} = \ldots = \text{Const.}$$

Обозначивъ эту постоянную черезъ I_0 и опуская индексъ у I и x, мы будемъ вообще имѣть

$$I = I_0 e^{-kx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (36)$$

Эта формула выражаетъ собою для плоской волны законъ уменьшенія энергіи съ разстояніемъ въ зависимости отъ поглощательной способности данной средины.

Коеффиціентъ k называется *коеффиціентомъ поглощенія* или *коеффиціентомъ затуханія.*

Въ случаѣ сферическихъ волнъ, кромѣ уменьшенія энергіи отъ по-

глощенія, надо учитывать еще, какъ мы видѣли, и уменьшеніе энергіи въ зависимости отъ увеличенія разстоянія r.

Поглощенная въ тѣлѣ энергія принимаетъ въ большинствѣ случаевъ тепловую форму.

Наши основныя уравненія теоріи упругости не учитываютъ непосредственно явленія поглощенія, но изъ предыдущихъ выводовъ и разсужденій видно, что въ окончательныхъ формулахъ это поглощеніе легко принять во вниманіе. Поэтому мы на этомъ вопросѣ дольше останавливаться не будемъ и въ дальнѣйшемъ изложеніи съ явленіемъ поглощенія пока не будемъ считаться.

Вернемся теперь къ вопросу о скоростяхъ продольныхъ и поперечныхъ волнъ въ изотропномъ и однородномъ твердомъ тѣлѣ.

Скорости эти опредѣляются формулами (15) и (18).

$$V_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

Въ эти формулы входятъ коеффиціенты упругости Lamé λ и μ и плотность вещества ρ.

Выразимъ теперь эти скорости черезъ другіе два коеффиціента упругости, а именно черезъ модуль продольной упругости E и черезъ модуль поперечнаго сжатія или коеффиціентъ Poisson'а σ.

Въ § 3 предыдущей главы I мы имѣли такія выраженія для λ и μ (формулы (65) и (66)):

$$\lambda = \frac{\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} E$$

и

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{E}{1+\sigma}.$$

Слѣдовательно

$$\lambda + 2\mu = \frac{E}{1+\sigma} \left\{ \frac{\sigma}{1-2\sigma} + 1 \right\}$$

или

$$\lambda + 2\mu = \frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}.$$

Такимъ образомъ мы будемъ имѣть:

$$V_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho} \cdot \frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{E}{\rho} \cdot \frac{1}{2(1+\sigma)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (38)$$

и

$$\frac{V_1}{V_2}=\sqrt{2\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (39)$$

Модуль продольной упругости E и коеффиціентъ Poisson'a σ не трудно получить прямо изъ опыта, а потому формулы (37) и (38) даютъ возможность для всякаго матеріала, для котораго извѣстно ρ, вычислить величину скорости распространенія продольныхъ и поперечныхъ волнъ.

Если мы изъ опыта знаемъ только $\frac{V_1}{V_2}$, то легко получить для даннаго матеріала коеффиціентъ Poisson'a σ.

Дѣйствительно, формула (39) даетъ

$$\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}=\frac{1}{2}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2.$$

Отсюда

$$1-\sigma=\frac{1}{2}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2\sigma$$

или

$$\sigma=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2-1}{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2-1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (40)$$

Къ этой формулѣ мы вернемся еще въ третьей главѣ при изслѣдованіи сейсмическихъ лучей.

Раньше было указано, что для большинства тѣлъ $\sigma=\frac{1}{4}$.

Въ этомъ случаѣ формулы (37), (38) и (39) даютъ

$$V_1=\sqrt{\frac{6}{5}\cdot\frac{E}{\rho}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (41)$$

$$V_2=\sqrt{\frac{2}{5}\cdot\frac{E}{\rho}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (42)$$

и

$$\frac{V_1}{V_2}=\sqrt{3}=1{,}732 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (43)$$

Мы пришли, такимъ образомъ, къ тому интересному результату, что отношеніе скоростей продольныхъ и поперечныхъ волнъ равно просто $\sqrt{3}$.

Воспользуемся формулой (41), чтобы вычислить скорость распространенія продольныхъ волнъ въ стали.

Для этого матеріала мы имѣли

$$E=2{,}16\,.\,10^{12}\ \text{C. G. S.}$$

Въ абсолютной системѣ единицъ плотность ρ, т.-е. масса единицы объема, численно равна удѣльному вѣсу тѣла.

Для стали

$$\rho = 7{,}8.$$

Такимъ образомъ

$$V_1 = \sqrt{\frac{6}{5} \cdot \frac{2{,}16}{7{,}8} \cdot 10^{12}} = 0{,}58 \cdot 10^6 \, {}^{\text{см.}}/_{\text{сек.}}$$

или

$$V_1 = 5{,}8 \, {}^{\text{кил.}}/_{\text{сек.}}.$$

Такова скорость распространенія продольныхъ упругихъ колебаній въ стали при нормальныхъ условіяхъ внѣшняго давленія.

Переходя теперь къ земному шару, какъ къ нѣкоторому твердому тѣлу, мы не можемъ, конечно, его считать за тѣло однородное и изотропное, такъ какъ упругія свойства и плотность матеріи измѣняются съ глубиной. Но съ достаточнымъ приближеніемъ, особенно для болѣе глубокихъ слоевъ, мы можемъ считать, что всѣ эти величины суть только функціи разстоянія до центра земли, иначе говоря, что въ одномъ и томъ-же слоѣ вещество обладаетъ одинаковыми физическими свойствами.

Справедливость такого взгляда подтверждается новѣйшими геодезическими изслѣдованіями Hayford'a, Tittman'a и Helmert'a надъ такъ называемой *изостазіей* земли.

Изъ этихъ изслѣдованій слѣдуетъ, что на глубинѣ, приблизительно въ 120 километровъ, лежитъ такъ называемая изостатическая поверхность (гипотеза Pratt'a), для которой, отвлекаясь отъ неполной сферичности земли, сила притяженія къ центру земли есть вездѣ величина постоянная. Такимъ образомъ, различныя уклоненія въ направленіи и величинѣ силы тяжести обусловливаются неравномѣрнымъ распредѣленіемъ массъ только въ верхнихъ пластахъ земного шара. Что такая неравномѣрность должна существовать явствуетъ уже изъ того, что нѣкоторыя части земной поверхности покрыты сушей, а другія водой. Но сводка геодезическихъ изслѣдованій надъ силой тяжести показываетъ, что, напримѣръ, недостача массъ въ верхнихъ слояхъ земли компенсируется болѣе плотными массами на глубинѣ и, наоборотъ, такъ что въ результатѣ на изостатической поверхности получается полная компенсація и величина силы тяжести остается вездѣ одинаковой (въ предположеніи сферической формы земли, хотя поправку на эксцентриситетъ не трудно, конечно, принять во вниманіе).

Подобно тому, какъ мы опредѣлили скорость распространенія продольныхъ волнъ для стали, мы могли-бы, точно также, чисто лабораторнымъ

путемъ, на основаніи изученія упругихъ свойствъ и плотности различныхъ матеріаловъ, опредѣлить скорость распространенія продольныхъ и поперечныхъ волнъ въ различныхъ образчикахъ горныхъ породъ.

Такія опредѣленія были сдѣланы Kusakabe для горныхъ породъ различныхъ эпохъ залеганія, а именно для эпохъ археиской, палеозойской, мезозойской и кенозойской, но полученныя имъ числа колеблются въ довольно широкихъ предѣлахъ.

Въ недавнее время Oddone построилъ очень изящный приборъ для опредѣленія модуля продольной упругости E различныхъ горныхъ породъ при помощи особаго динамическаго пріема.

Способъ Oddone заключается въ слѣдующемъ.

Стальной шарикъ падаетъ съ высоты H внутри стеклянной трубки, не касаясь ея стѣнокъ, на одну изъ граней параллелепипеда, отшлифованнаго изъ испытуемой горной породы. Послѣ удара шарикъ отскакиваетъ вверхъ и поднимается до высоты h. По измѣренной величинѣ $\frac{h}{H}$ можно опредѣлить модуль упругости E.

Если покрыть еще поверхность параллелепипеда тонкимъ слоемъ сажи и измѣрить затѣмъ діаметръ кружка, оставляемаго на сажѣ послѣ удара, то отсюда также можно, по формуламъ даннымъ Герцомъ, и, зная упругія свойства стального шарика, вычислить модуль упругости испытуемой горной породы.

Если, сверхъ того, былъ-бы извѣстенъ коеффиціентъ Poisson'а, т.-е. модуль поперечнаго сжатія, то отсюда можно было-бы уже вывести чисто лабораторнымъ путемъ скорости распространенія продольныхъ и поперечныхъ упругихъ волнъ въ различныхъ твердыхъ срединахъ, что имѣло-бы очень большое значеніе.

Заставляя шарикъ падать на различныя грани параллелепипеда, Oddone замѣтилъ, что при отскакиваніи $\frac{h}{H}$ остается неизмѣннымъ, откуда онъ и вывелъ заключеніе, что различныя горныя породы, по крайней мѣрѣ тѣ, которыя онъ изслѣдовалъ, представляютъ собою тѣла изотропныя.

Весьма хорошую провѣрку формулы (43) можно сдѣлать, въ примѣненіи къ упругимъ колебаніямъ, распространяющимся въ толщѣ земли, слѣдующимъ образомъ.

Такъ какъ въ настоящее время имѣется уже много инструментальнаго наблюдательнаго матеріала надъ землетрясеніями, то мы можемъ опредѣлить сколько времени требуется для того, чтобы колебанія каждаго типа прошли-бы разстояніе отъ очага землетрясенія до какой-нибудь близкой станціи. Если очагъ землетрясенія не глубокъ и станція не очень удалена, то можно принять, что эти колебанія достигаютъ станціи, проходя

только черезъ верхніе пласты земли. Такъ какъ продольныя волны движутся быстрѣе поперечныхъ, то они первыми и будутъ отмѣчены сейсмографами.

Зная моменты прихода тѣхъ и другихъ волнъ и моментъ начала землетрясенія, можно опредѣлить скорости продольныхъ и поперечныхъ волнъ V_1 и V_2 въ верхнихъ пластахъ земли.

Такая сводка различныхъ наблюденій была сдѣлана Zöppritz'омъ и Geiger'омъ, причемъ они нашли для скоростей продольныхъ и поперечныхъ волнъ *въ самыхъ верхнихъ слояхъ земли* слѣдующія величины:

$$V_1 = 7{,}17^{\text{кил.}}/_{\text{сек.}},$$

$$V_2 = 4{,}01^{\text{кил.}}/_{\text{сек.}}.$$

Отношеніе этихъ скоростей будетъ

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{7{,}17}{4{,}01} = 1{,}788.$$

Это число отличается весьма мало отъ теоретическаго числа $\sqrt{3}$, выведеннаго въ предположеніи, что $\sigma = \frac{1}{4}$.

Наоборотъ, взявъ опытное отношеніе $\frac{V_1}{V_2} = 1{,}788$ и подставивъ его въ формулу (40), получимъ величину коеффиціента Poisson'а для самыхъ верхнихъ пластовъ земли.

Оказывается, что

$$\sigma = 0{,}27,$$

мы-же приняли, при выводѣ формулы (43), $\sigma = 0{,}25$.

Уже этотъ небольшой примѣръ наглядно показываетъ, насколько интересно и поучительно разсматривать явленія землетрясеній съ точки зрѣнія теоріи упругости.

Мы видѣли раньше, что когда колебанія исходятъ изъ опредѣленнаго центра возмущенія, то соотвѣтствующая деформація, напр. при продольныхъ колебаніяхъ, можетъ быть представлена функціей слѣдующаго вида (см. формулу (16))

$$\frac{F_1(r - V_1 t)}{r}.$$

Если-же у насъ нѣсколько центровъ возмущенія, то для каждаго изъ нихъ мы можемъ составить подобныя-же выраженія. Такъ какъ наши основныя дифференціальныя уравненія линейныя, то мы можемъ прямо

суммировать эти отдѣльныя выраженія. Очевидно, что и сумма такихъ функцій также будетъ удовлетворять дифференціальнымъ уравненіямъ движенія. Слѣдовательно, мы видимъ, что, когда существуетъ нѣсколько центровъ возникновенія упругихъ колебаній, то въ результатѣ мы имѣемъ дѣло съ наложеніемъ или суперпозиціей отдѣльныхъ колебаній. Задача значительно осложняется, но всетаки она вполнѣ разрѣшима.

Мы можемъ даже принять, что всѣ эти центры возмущенія непрерывнымъ образомъ заполняютъ нѣкоторую область; тѣмъ самымъ мы осуществимъ то, что мы считаемъ *реальнымъ* очагомъ или гипоцентромъ землетрясенія.

Законы распространенія упругихъ колебаній имѣютъ, какъ мы видимъ, весьма большое сходство съ законами распространенія свѣта. Дѣйствительно, механическая теорія свѣта разсматриваетъ свѣтовыя явленія прямо какъ результатъ поперечныхъ упругихъ колебаній. Слѣдовательно, и въ вопросѣ распространенія упругихъ колебаній, при переходѣ движенія изъ одной среды въ другую, мы неизбѣжнымъ образомъ должны встрѣтиться съ явленіями, соотвѣтствующими отраженію и преломленію. Однако, въ оптикѣ обстоятельства гораздо проще, потому что тамъ мы имѣемъ дѣло *только* съ одними поперечными колебаніями, такъ какъ существованіе продольныхъ эфирныхъ волнъ никѣмъ еще не было доказано, и если-бы онѣ и существовали, то мы совершенно не знаемъ въ чемъ онѣ могли-бы реально проявиться.

Слѣдовательно, въ оптикѣ, на границѣ раздѣла двухъ срединъ, мы имѣемъ дѣло только съ однимъ отраженнымъ и однимъ преломленнымъ лучемъ. При распространеніи-же обыкновенныхъ упругихъ колебаній въ твердыхъ тѣлахъ, въ частности въ сейсмологіи, когда какая-нибудь волна, будетъ-ли она продольная или поперечная — безразлично, встрѣтитъ границу раздѣла двухъ срединъ, съ неодинаковыми физическими свойствами, то она даетъ начало *четыремъ* волнамъ, двумъ отраженнымъ и двумъ преломленнымъ, причемъ одна изъ отраженныхъ или преломленныхъ волнъ будетъ продольная, а другая поперечная. Это обстоятельство крайне усложняетъ изслѣдованіе различныхъ явленій, касающихся распространенія сейсмическихъ волнъ.

И, дѣйствительно, стоитъ только взглянуть на какую-нибудь характерную сейсмограмму землетрясенія, чтобы убѣдиться, что мы, дѣйствительно, имѣемъ вообще дѣло съ очень сложнымъ комплексомъ волнъ.

Вліяніе границы раздѣла двухъ срединъ сказывается, однако, не только въ томъ, что она вызываетъ явленія отраженія и преломленія. Оказывается, что, кромѣ того, у такой границы могутъ возникнуть совершенно особыя поверхностныя волны, которыя въ сейсмологіи имѣютъ

очень важное значенie. На нихъ обратилъ вниманie извѣстный англiйскiй физикъ Lord Rayleigh, а теорiю ихъ разработалъ англiйскiй-же математикъ H. Lamb.

Къ разсмотрѣнiю этихъ волнъ мы теперь и перейдемъ.

---

§ 2.

Теорiя поверхностныхъ волнъ.

Въ предыдущемъ § мы видѣли, что продольныя и поперечныя синусоидальныя волны, подчиняющiяся законамъ гармоническихъ колебанiй, удовлетворяютъ нашимъ основнымъ дифференцiальнымъ уравненiямъ (5), причемъ эти волны могутъ налагаться одна на другую, такъ что въ результатѣ получается очень сложная система волнообразныхъ колебанiй. Этотъ результатъ теорiи находится въ полномъ согласiи съ дѣйствительными сейсмометрическими наблюденiями.

Но такое рѣшенiе задачи представляется далеко не единственнымъ, такъ какъ основнымъ дифференцiальнымъ уравненiямъ (5) можно удовлетворить и другими типами функцiй.

Разсмотримъ теперь, что можетъ произойти у поверхности земли. Этотъ случай представляетъ для насъ особый интересъ, такъ какъ различныя инструментальныя сейсмическiя наблюденiя производятся почти исключительно только у земной поверхности.

Соотвѣтственно съ этимъ возьмемъ начало координатныхъ осей на поверхности земли въ эпицентрѣ, ось z-овъ направимъ вертикально вверхъ къ зениту, ось x-овъ къ сѣверу, а ось y-овъ на востокъ.

Физическiя свойства различныхъ пластовъ земли измѣняются правда съ глубиной, но, ограничиваясь слоями, непосредственно прилегающими къ земной поверхности, мы можемъ, *въ первомъ приближенiи,* считать ихъ на извѣстномъ протяженiи достаточно однородными и изотропными и прилагать къ нимъ ранѣе выведенныя формулы теорiи упругости. Намъ, дѣйствительно, совершенно безразлично отъ какой первичной причины возникли тѣ или другiя упругiя деформацiи; здѣсь важно лишь то, что соотвѣтственныя деформацiи возникаютъ въ концѣ концовъ въ верхнихъ пластахъ земли, и къ нимъ-то, съ извѣстнымъ приближенiемъ, и можно прилагать ранѣе выведенныя уравненiя.

Въ виду большого радiуса земли мы будемъ считать на извѣстномъ протяженiи поверхность земли за плоскость; слѣдовательно, настоящая теорiя

должна указать, какого рода колебанія могутъ возникнуть въ областяхъ, прилегающихъ къ эпицентру землетрясенія.

При настоящемъ выборѣ начала координатъ, движеніе, долженствующее вызвать колебанія поверхностныхъ слоевъ земли, идетъ отъ отрицательныхъ значеній z.

Дифференціальнымъ уравненіямъ (5) можно удовлетворить, принявъ для проэкцій смѣщеній u, v, и w какой-нибудь точки M, лежащей *внутри* верхнихъ пластовъ земли, слѣдующія выраженія:

$$\left.\begin{aligned} u &= A\,e^{\sigma} \\ v &= B\,e^{\sigma} \\ w &= C\,e^{\sigma} \end{aligned}\right\}, \tag{44}$$

гдѣ

$$\sigma = -qz + i\{fx + gy - pt\} \tag{45}$$

A, B, C, q, f, g, p суть нѣкоторыя постоянныя, значеніе которыхъ намъ въ будущемъ и предстоитъ опредѣлить, а $i = \sqrt{-1}$.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что u, v и w суть функціи четырехъ перемѣнныхъ независимыхъ x, y, z и t.

Вышеприведенныя постоянныя не могутъ считаться произвольными; наоборотъ, если выраженія (44) должны удовлетворять нашимъ основнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ (5)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\lambda+\mu}{\rho}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\Delta u \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\lambda+\mu}{\rho}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho}\Delta v \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\lambda+\mu}{\rho}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho}\Delta w \end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

гдѣ

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \tag{3}$$

то эти постоянныя связаны между собою извѣстными соотношеніями.

Чтобы ихъ найти, подставимъ выраженія для u, v и w изъ формулъ (44) въ дифференціальныя уравненія (5).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\,e^{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A\,e^{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = A\,e^{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = A\,e^{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial z}.$$

Но

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma}{\partial t} &= -ip\\ \frac{\partial\sigma}{\partial x} &= \quad if\\ \frac{\partial\sigma}{\partial y} &= \quad ig\\ \frac{\partial\sigma}{\partial z} &= -q\end{aligned}\right\}, \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(46)$$

слѣдовательно

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -Ae^{\sigma}\ ip\\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \quad Ae^{\sigma}\ if\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \quad Ae^{\sigma}\ ig\\ \frac{\partial u}{\partial z} &= -Ae^{\sigma}\ q\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(47)$$

Точно также найдемъ

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} &= -Be^{\sigma}ip\\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \quad Be^{\sigma}if\\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \quad Be^{\sigma}ig\\ \frac{\partial v}{\partial z} &= -Be^{\sigma}q\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(48)$$

и

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= -C\ e^{\sigma}ip\\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \quad C\ e^{\sigma}if\\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \quad C\ e^{\sigma}ig\\ \frac{\partial w}{\partial z} &= -C\ e^{\sigma}q\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(49)$$

Отсюда получимъ

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = e^{\sigma}\left[i\{fA + gB\} - Cq\right]$$

и

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\theta}{\partial x} &= \quad e^{\sigma}\ fi\left[i\{fA + gB\} - Cq\right]\\ \frac{\partial\theta}{\partial y} &= \quad e^{\sigma}\ gi\left[i\{fA + gB\} - Cq\right]\\ \frac{\partial\theta}{\partial z} &= -\ e^{\sigma}\ q\left[i\{fA + gB\} - Cq\right]\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(50)$$

Далѣе изъ уравненій (47) и (46) слѣдуетъ, такъ какъ $i^2 = -1$,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -A e^{\sigma} p^2 \\ \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= e^{\sigma} A [q^2 - f^2 - g^2] \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (51)$$

Точно также найдемъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= -B e^{\sigma} p^2 \\ \Delta v &= e^{\sigma} B [q^2 - f^2 - g^2] \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (52)$$

и

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -C e^{\sigma} p^2 \\ \Delta w &= e^{\sigma} C [q^2 - f^2 - g^2] \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (53)$$

Подставимъ теперь послѣдовательно найденныя выраженія въ дифференціальныя уравненія (5). Тогда мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} -e^{\sigma} A p^2 &= \frac{\lambda+\mu}{\rho} e^{\sigma} f i [i\{fA+gB\} - Cq] + \frac{\mu}{\rho} e^{\sigma} A [q^2 - f^2 - g^2] \\ -e^{\sigma} B p^2 &= \frac{\lambda+\mu}{\rho} \cdot e^{\sigma} g i [i\{fA+gB\} - Cq] + \frac{\mu}{\rho} e^{\sigma} B [q^2 - f^2 - g^2] \\ -e^{\sigma} C p^2 &= -\frac{\lambda+\mu}{\rho} e^{\sigma} q [i\{fA+gB\} - Cq] + \frac{\mu}{\rho} e^{\sigma} C [q^2 - f^2 - g^2] \end{aligned}\right\} \ldots (54)$$

Въ этихъ формулахъ единственная перемѣнная величина e^{σ} входитъ общимъ множителемъ у всѣхъ членовъ, а потому мы можемъ предыдущія уравненія на эту величину сократить.

Тогда мы получимъ три уравненія, опредѣляющія взаимную зависимость отдѣльныхъ постоянныхъ коеффиціентовъ.

Уравненіямъ (54) можно удовлетворить двумя различными группами величинъ A, B, C и f, g, q и p, которыя мы будемъ отличать другъ отъ друга индексами 1 и 2.

I-ая группа.

Пусть c есть нѣкоторая совершенно произвольная постоянная величина.

Положимъ

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= i f_1 c \\ B_1 &= i g_1 c \\ C_1 &= -q_1 c \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (55)$$

Подставивъ эти величины въ уравненія (54), получимъ

$$-if_1cp_1^2 = \frac{\lambda+\mu}{\rho} if_1 c[q_1^2 - f_1^2 - g_1^2] + \frac{\mu}{\rho} if_1 c[q_1^2 - f_1^2 - g_1^2]$$

$$-ig_1cp_1^2 = \frac{\lambda+\mu}{\rho} ig_1 c[q_1^2 - f_1^2 - g_1^2] + \frac{\mu}{\rho} ig_1 c[q_1^2 - f_1^2 - g_1^2]$$

$$+q_1cp_1^2 = -\frac{\lambda+\mu}{\rho} q_1 c[q_1^2 - f_1^2 - g_1^2] - \frac{\mu}{\rho} q_1 c[q_1^2 - f_1^2 - g_1^2].$$

Всѣмъ этимъ тремъ уравненіямъ можно удовлетворить положивши еще

$$f_1^2 + g_1^2 - q_1^2 = \frac{\rho}{\lambda+2\mu}\cdot p_1^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (56)$$

Такимъ образомъ, если между различными постоянными имѣютъ мѣсто соотношенія, опредѣляемыя формулами (55) и (56), то выраженія (44) удовлетворяютъ нашимъ основнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ.

Условныя уравненія (54) могутъ быть, однако, удовлетворены еще другой группой постоянныхъ.

II-ая группа.

Положимъ

$$i(A_2f_2 + B_2g_2) - C_2q_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (57)$$

Въ этомъ предположеніи первые члены, стоящіе въ квадратныхъ скобкахъ въ правыхъ частяхъ уравненій (54), обратятся въ нуль.

Тогда каждое изъ этихъ уравненій можно сократить соотвѣтственно на A, B и C и всѣ они приводятъ къ одному и тому-же второму условному уравненію

$$f_2^2 + g_2^2 - q_2^2 = \frac{\rho}{\mu} p_2^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (58)$$

Слѣдовательно, если постоянныя удовлетворяютъ условнымъ уравненіямъ (57) и (58), то опять группа выраженій (44) удовлетворяетъ основнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ движенія.

Такимъ образомъ мы нашли два рѣшенія нашихъ дифференціальныхъ уравненій.

Введемъ теперь слѣдующія обозначенія:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= -q_1z + i\{f_1x + g_1y - p_1t\} \\ \text{и} \quad \sigma_2 &= -q_2z + i\{f_2x + g_2y - p_2t\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (59)$$

Тогда, напримѣръ, для проэкціи смѣщенія u мы будемъ имѣть слѣдующія два частныхъ рѣшенія:

$$u = A_1 e^{\sigma_1}$$

и

$$u = A_2 e^{\sigma_2}.$$

Такъ какъ наши дифференціальныя уравненія (5) суть уравненія линейныя, т.-е. въ нихъ не входятъ ни произведенія, ни высшія степени производныхъ, то и сумма двухъ частныхъ рѣшеній будетъ также удовлетворять основнымъ уравненіямъ движенія.

Такимъ образомъ для u, v и w мы будемъ имѣть слѣдующія болѣе общія рѣшенія:

$$\left.\begin{aligned} u &= A_1 e^{\sigma_1} + A_2 e^{\sigma_2} \\ v &= B_1 e^{\sigma_1} + B_2 e^{\sigma_2} \\ w &= C_1 e^{\sigma_1} + C_2 e^{\sigma_2} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (60)$$

Мы поставили себѣ задачей изслѣдовать движеніе у поверхности земли, т.-е. для случая $z = 0$.

Надо теперь для этого установить соотвѣтственныя пограничныя условія (при $z = 0$).

Пренебрегая плотностью воздуха въ сравненіи съ плотностью верхнихъ слоевъ земли и принимая во вниманіе, что натяженія у поверхности какой-нибудь элементарной площадки, взятой внутри твердаго тѣла, замѣняютъ собою дѣйствія прочихъ частей твердаго тѣла, находящихся *внѣ* даннаго элемента поверхности, ограничивающей опредѣленный объемъ (см. § 1 предыдущей главы), и, такъ какъ надъ поверхностью земли находится воздухъ, то мы должны положить нормальное и касательныя натяженія у поверхности земли равными нулю.

Такъ какъ элементъ поверхности земли перпендикуляренъ къ оси z-овъ, то, слѣдовательно, согласно предыдущимъ обозначеніямъ (см. черт. (3)), мы будемъ имѣть

$$Z_z = 0$$

$$X_z = 0$$

$$Y_z = 0$$

или, на основаніи новыхъ обозначеній, опредѣляемыхъ формулами (8) и (9) § 1 предыдущей главы,

$$\left.\begin{aligned} N_3 &= 0 \\ T_2 &= 0 \\ T_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (61)$$

Эти соотношенія должны имѣть мѣсто для $z = 0$.

Разовьемъ теперь эти условія.

На основаніи 3-го изъ уравненій (67) и 2-го и 1-го изъ уравненій (84) главы I, мы будемъ имѣть

$$\text{для } z = 0 \left\{\begin{aligned} N_3 &= \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ T_2 &= \mu\left\{\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right\} = 0 \\ T_1 &= \mu\left\{\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right\} = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (62)$$

На основаніи уравненій (60) и (59) мы точно также найдемъ, какъ и раньше,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \quad A_1 i f_1 e^{\sigma_1} + A_2 i f_2 e^{\sigma_2} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \quad B_1 i g_1 e^{\sigma_1} + B_2 i g_2 e^{\sigma_2} \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= -C_1 q_1 e^{\sigma_1} - C_2 q_2 e^{\sigma_2} \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= -A_1 q_1 e^{\sigma_1} - A_2 q_2 e^{\sigma_2} \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \quad C_1 i f_1 e^{\sigma_1} + C_2 i f_2 e^{\sigma_2} \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \quad C_1 i g_1 e^{\sigma_1} + C_2 i g_2 e^{\sigma_2} \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= -B_1 q_1 e^{\sigma_1} - B_2 q_2 e^{\sigma_2} \end{aligned}\right\}, \ldots\ldots\ldots\ldots (63)$$

причемъ, для $z = 0$,

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= i\{f_1 x + g_1 y - p_1 t\} \\ \sigma_2 &= i\{f_2 x + g_2 y - p_2 t\} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (64)$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\begin{aligned} \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= e^{\sigma_1}\left[i\{A_1 f_1 + B_1 g_1\} - C_1 q_1\right] \\ &+ e^{\sigma_2}\left[i\{A_2 f_2 + B_2 g_2\} - C_2 q_2\right]. \end{aligned}$$

Подставимъ теперь эти величины въ первое изъ уравненій (62). Тогда

$$\lambda e^{\sigma_1}[i\{A_1 f_1 + B_1 g_1\} - C_1 q_1] + \lambda e^{\sigma_2}[i\{A_2 f_2 + B_2 g_2\} - C_2 q_2]$$
$$- 2\mu C_1 q_1 e^{\sigma_1} - 2\mu C_2 q_2 e^{\sigma_2} = 0$$

или

$$e^{\sigma_1}[\lambda i\{A_1 f_1 + B_1 g_1\} - (\lambda + 2\mu) C_1 q_1] +$$
$$+ e^{\sigma_2}[\lambda i\{A_2 f_2 + B_2 g_2\} - (\lambda + 2\mu) C_2 q_2] = 0 \quad \ldots (65)$$

Это уравненіе должно всегда имѣть мѣсто при $z=0$, при всякихъ значеніяхъ x, y и t, что только возможно, если перемѣнныя величины σ_1 и σ_2 равны между собою при всякихъ значеніяхъ перемѣнныхъ независимыхъ.

Тогда предыдущее уравненіе можно сократить на общій перемѣнный множитель $e^{\sigma_1} = e^{\sigma_2}$, и мы получимъ новое условное уравненіе, связывающее между собою наши постоянныя.

Формулы (64) показываютъ, что σ_1 можетъ быть равно σ_2, при произвольныхъ значеніяхъ x, y и t, только въ томъ случаѣ, если

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= f_2 \\ g_1 &= g_2 \\ p_1 &= p_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (66)$$

Въ виду этихъ соотношеній, мы будемъ впредь писать эти количества, равно какъ и σ, безъ индексовъ. Что-же касается q_1 и q_2, то они могутъ быть различны.

Тогда предыдущее условное уравненіе (65) приметъ слѣдующій видъ:

$$\lambda i[(A_1 + A_2) f + (B_1 + B_2) g] = (\lambda + 2\mu)[C_1 q_1 + C_2 q_2] \quad \ldots (67)$$

Найдемъ теперь другія два условныя уравненія, подставивъ во вторую и третью изъ формулъ (62) соотвѣтствующія величины, заимствованныя изъ группы формулъ (63).

$$\mu\left\{\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right\} = \mu[-(A_1 q_1 + A_2 q_2) + i f (C_1 + C_2)] e^{\sigma} = 0$$

и

$$\mu\left\{\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right\} = \mu[-(B_1 q_1 + B_2 q_2) + i g (C_1 + C_2)] e^{\sigma} = 0$$

или

$$\left.\begin{aligned} A_1 q_1 + A_2 q_2 &= i f (C_1 + C_2) \\ B_1 q_1 + B_2 q_2 &= i g (C_1 + C_2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (68)$$

Подставимъ теперь въ эти выраженія значенія A_1, B_1 и C_1 изъ формулъ (55).

Тогда мы будемъ имѣть

$$A_2 q_2 = if(-q_1 c + C_2) - ifq_1 c = if\{C_2 - 2q_1 c\}$$

$$B_2 q_2 = ig(-q_1 c + C_2) - igq_1 c = ig\{C_2 - 2q_1 c\}$$

Введемъ слѣдующее обозначеніе:

$$H = i\,\frac{C_2 - 2q_1 c}{q_2} \ldots\ldots\ldots\ldots (69)$$

Тогда

$$\frac{A_2}{f} = \frac{B_2}{g} = H$$

или

$$\left.\begin{aligned} A_2 &= fH \\ B_2 &= gH \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (70)$$

Обратимся теперь къ формулѣ (67).

Эту формулу можно написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\lambda[i\{A_1 f + B_1 g\} - C_1 q_1] + \lambda[i\{A_2 f + B_2 g\} - C_2 q_2] - 2\mu[C_1 q_1 + C_2 q_2] = 0.$$

Въ этомъ выраженіи второй членъ, стоящій въ квадратныхъ скобкахъ, въ силу соотношенія (57) равенъ нулю.

Подставляя еще сюда выраженія A_1, B_1, и C_1 изъ уравненій (55), получимъ

$$\lambda c[q_1^2 - f^2 - g^2] + 2\mu q_1^2 c - 2\mu q_2 C_2 = 0.$$

Но изъ уравненія (56) и на основаніи соотношеній (66)

$$q_1^2 - f^2 - g^2 = -\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}\cdot p^2;$$

слѣдовательно

$$2\mu q_2 C_2 = 2\mu q_1^2 c - \frac{\lambda\rho}{\lambda + 2\mu}\cdot p^2 c$$

или

$$C_2 = \left[\frac{q_1^2}{q_2} - \frac{\lambda\rho}{\lambda + 2\mu}\cdot\frac{p^2}{2\mu}\cdot\frac{1}{q_2}\right] c \ldots\ldots\ldots\ldots (71)$$

Съ другой стороны изъ уравненій (57) и (70) слѣдуетъ, что

$$i(f^2 + g^2)H - q_2 C_2 = 0$$

или

$$H = -i\frac{q_2 C_2}{f^2 + g^2} \qquad \text{. . . . .} (72)$$

Сравнивая это выраженіе съ уравненіемъ (69), получимъ

$$\frac{C_2 - 2\,q_1 c}{q_2} + \frac{q_2 C_2}{f^2 + g^2} = 0$$

или

$$[f^2 + g^2 + q_2^2]\,C_2 - 2\,q_1 c\,[f^2 + g^2] = 0.$$

Введя новое обозначеніе

$$m^2 = f^2 + g^2, \qquad \text{. . . . .} (73)$$

получимъ

$$C_2 = \frac{2\,q_1\,m^2}{m^2 + q_2^2}\cdot c \qquad \text{. . . . .} (74)$$

Введемъ теперь, для удобства, еще слѣдующія сокращенныя обозначенія:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\rho}{\mu} &= k^2 \\ \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} &= h^2. \end{aligned}\right\} \qquad \text{. . . . .} (75)$$

Тогда

$$\lambda + 2\mu = \frac{\rho}{h^2},$$

$$\mu = \frac{\rho}{k^2},$$

а, слѣдовательно,

$$\lambda = \rho\left\{\frac{1}{h^2} - \frac{2}{k^2}\right\} = \rho\,\frac{k^2 - 2h^2}{h^2 k^2}$$

и

$$\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\cdot\frac{\rho}{\mu} = \frac{\rho\,\frac{k^2 - 2h^2}{h^2 k^2}}{\frac{\rho}{h^2}}\cdot k^2 = k^2 - 2h^2.$$

Подставимъ теперь это послѣднее выраженіе въ уравненіе (71). Тогда

$$C_2 = \frac{1}{q_2}\left[q_1^2 - \frac{1}{2}(k^2 - 2h^2)\,p^2\right]c. \qquad \text{. . . . .} (76)$$

Съ другой стороны, въ силу соотношеній (56), (58), (73) и (75),

$$m^2 - q_1^2 = h^2 p^2$$

$$m^2 - q_2^2 = k^2 p^2$$

или

$$\left.\begin{aligned} q_1^2 &= m^2 - h^2 p^2 \\ q_2^2 &= m^2 - k^2 p^2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (77)$$

Подставивъ эти величины въ формулы (74) и (76), получимъ:

$$C_2 = \frac{2\, q_1\, m^2}{2m^2 - k^2 p^2} c$$

и

$$C_2 = \frac{1}{q_2}\left[m^2 - h^2 p^2 - \frac{1}{2} k^2 p^2 + h^2 p^2\right] c = \frac{1}{2\, q_2}\cdot[2m^2 - k^2 p^2]\, c.$$

Мы имѣемъ, такимъ образомъ, два различныхъ выраженія для C_2.

Подставивъ второе изъ нихъ въ уравненіе (72), и принимая во вниманіе, что

$$f^2 + g^2 = m^2,$$

получимъ

$$H = -i\left[1 - \frac{1}{2}\,\frac{k^2 p^2}{m^2}\right] c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (78)$$

Это выраженіе намъ впослѣдствіи понадобится.

Сравнивъ теперь оба выраженія для C_2 и сокративъ на общій множитель c, получимъ

$$4\, q_1\, q_2\, m^2 = [2m^2 - k^2 p^2]^2$$

или

$$q_1 q_2 = \frac{[2m^2 - k^2 p^2]^2}{4m^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (79)$$

Возведемъ теперь это выраженіе въ квадратъ

$$q_1^2 q_2^2 = \frac{[2m^2 - k^2 p^2]^4}{16m^4}.$$

Изъ уравненій (77) мы имѣемъ, съ другой стороны,

$$q_1^2 q_2^2 = [m^2 - h^2 p^2]\,[m^2 - k^2 p^2];$$

слѣдовательно

$$16m^4\,[m^2 - h^2 p^2]\,[m^2 - k^2 p^2] = [2m^2 - k^2 p^2]^4.$$

Введя далѣе обозначеніе

$$V = \frac{p}{m}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (80)$$

будемъ имѣть

$$16\,[1 - h^2 V^2]\,[1 - k^2 V^2] = [2 - k^2 V^2]^4.$$

Изъ этого уравненія можно получить количество V, какъ функцію отъ k и h, т.-е. отъ коеффиціентовъ упругости λ и μ и плотности ρ.

Раскроемъ теперь скобки и сдѣлаемъ необходимыя приведенія. Получимъ

$$16-16(h^2+k^2)V^2+16h^2k^2V^4=16-32k^2V^2+24k^4V^4-8k^6V^6+k^8V^8$$

или

$$k^8V^8-8k^6V^6+(24k^4-16h^2k^2)V^4-(16k^2-16h^2)V^2=0.$$

Модуль поперечнаго сжатія или коеффиціентъ Poisson'а можно, какъ мы видѣли раньше, принять равнымъ $\frac{1}{4}$.

Въ этомъ случаѣ, какъ мы уже знаемъ (см. формулу (77) § 3 главы 1-ой),

$$\lambda=\mu.$$

Тогда, на основаніи выраженій (75),

$$k^2=\frac{\rho}{\mu}$$

$$h^2=\frac{\rho}{3\mu}=\frac{1}{3}k^2,$$

и предыдущее уравненіе приметъ слѣдующій видъ:

$$k^8V^8-8k^6V^6+\left(24-\frac{16}{3}\right)k^4V^4-\left(16-\frac{16}{3}\right)k^2V^2=0.$$

Сокративши это выраженіе на общій множитель k^2V^2 и положивъ для удобства

$$k^2V^2=\frac{\rho}{\mu}V^2=\chi, \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (81)$$

получимъ слѣдующее кубическое уравненіе для χ:

$$3\chi^3-24\chi^2+56\chi-32=0 \dots\dots\dots\dots\dots (82)$$

Изъ этого уравненія можно найти χ.

Для χ получится опредѣленное число; положимъ его равнымъ a.

Тогда, на основаніи формулы (81),

$$V=\sqrt{a}\,.\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (83)$$

Но прежде чѣмъ приступать къ рѣшенію кубическаго уравненія (82), выяснимъ себѣ раньше, что представляетъ собою количество V и для

какой вообще цѣли мы предприняли предыдущій довольно сложный анализъ.

Мы видѣли раньше, что, при $z=0$,

$$\sigma_1=\sigma_2=\sigma=i\{fx+gy-pt\}\;..(84)\text{ (см. формулы (64) и (66)).}$$

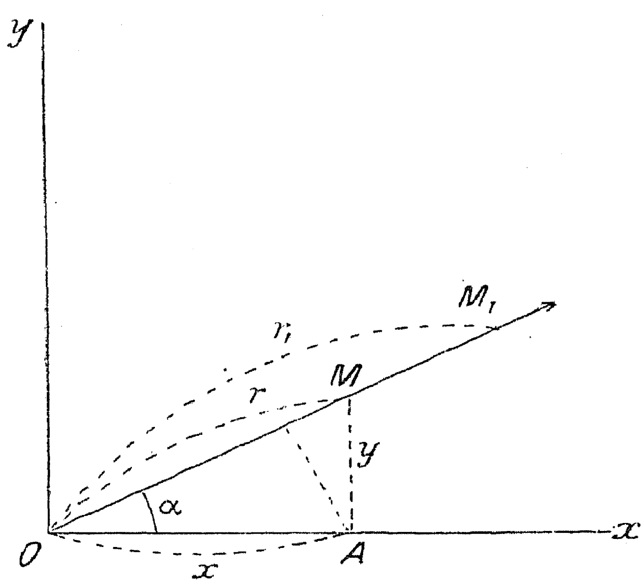
Слѣдовательно, проэкціи смѣщенія какой-нибудь точки M у поверхности земли, съ координатами x и y, представятся, на основаніи уравненій (60), въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} u&=(A_1+A_2)\,e^{\sigma}\\ v&=(B_1+B_2)\,e^{\sigma}\\ w&=(C_1+C_2)\,e^{\sigma}\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(85)$$

Такимъ образомъ, единственной перемѣнной величиной является σ.

Возьмемъ точку M гдѣ нибудь въ плоскости xy въ разстояніи r отъ начала координатъ O, которое совпадаетъ по предположенію съ эпицентромъ землетрясенія (см. черт. 17).

Черт. 17.



Обозначивъ координаты точки M черезъ x и y, а уголъ MOA черезъ α, будемъ имѣть

$$r=x\cos\alpha+y\sin\alpha.$$

Для того-же момента t, въ виду того, что движеніе отъ эпицентра распространяется во всѣ стороны одинаково, σ можетъ быть только функціей отъ r.

Слѣдовательно, на основаніи формулы (73), по которой

$$m=\sqrt{f^2+g^2},$$

$$\sigma=i\left\{m\left(\frac{f}{m}x+\frac{g}{m}y\right)-pt\right\}.$$

Отсюда прямо слѣдуетъ, что

$$\frac{f}{m}=\cos\alpha,$$

$$\frac{g}{m}=\sin\alpha$$

и

$$\sigma = i\,\{mr - pt\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (86)$$

Предположимъ теперь, что въ точкѣ M, въ разстояніи r отъ 0 и въ моментъ t, σ имѣетъ значеніе, опредѣляемое формулой (86).

Возьмемъ другую точку M_1 въ разстояніи r_1 отъ 0 и спросимъ себя, въ какой моментъ t_1 перемѣнная величина σ будетъ имѣть въ этой новой точкѣ то-же значеніе, которое она имѣла въ точкѣ M въ моментъ t.

Для этого требуется, чтобы

$$mr - pt = mr_1 - pt_1,$$

или

$$m(r_1 - r) = p\,(t_1 - t),$$

или-же

$$\frac{p}{m} = \frac{r_1 - r}{t_1 - t}.$$

Такимъ образомъ, движеніе точекъ земной поверхности, опредѣляемое группою уравненій (85), требуетъ, для того чтобы пройти разстояніе $r_1 - r$, время $t_1 - t$.

Слѣдовательно, $\frac{r_1 - r}{t_1 - t} = \frac{p}{m} = V$ (см. формулу 80) есть ничто иное, какъ скорость распространенія даннаго типа возмущеній вдоль поверхности земли.

Такимъ образомъ формула (83)

$$V = \sqrt{a}\,.\sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

даетъ намъ скорость распространенія колебаній вдоль поверхности земли.

Въ этомъ выраженіи a есть корень кубическаго уравненія (82).

Установивши это чрезвычайно важное соотношеніе, займемся рѣшеніемъ кубическаго уравненія

$$3\chi^3 - 24\chi^2 + 56\chi - 32 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (82)$$

Всякое кубическое уравненіе имѣетъ 3 корня, изъ которыхъ, по крайней мѣрѣ, одинъ корень всегда вещественный.

Легко видѣть, что $\chi = 4$ удовлетворяетъ уравненію (82).

Слѣдовательно, одинъ корень будетъ

$$\chi_1 = 4.$$

Чтобы найти другіе два корня, раздѣлимъ уравненіе (82) на $\chi - 4$. Въ остаткѣ получимъ

$$3\chi^2 - 12\chi + 8 = 0$$

или

$$\chi^2 - 4\chi + \frac{8}{3} = 0.$$

Рѣшимъ теперь это квадратное уравненіе.

Получимъ

$$\chi = 2 \pm \sqrt{4 - \frac{8}{3}} = 2 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Слѣдовательно,

$$\chi_2 = 2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\,.(1 + 0,57735) = 3,1547$$

$$\chi_3 = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\,.(1 - 0,57735) = 0,8453.$$

Такимъ образомъ, наше кубическое уравненіе имѣетъ три вещественныхъ корня, причемъ всѣ они положительны.

Спрашивается теперь, который изъ этихъ трехъ корней удовлетворяетъ условіямъ поставленной нами задачи?

Вторая изъ формулъ (77) даетъ

$$q_2^2 = m^2\left(1 - k^2\frac{p^2}{m^2}\right)$$

или

$$q_2^2 = m^2(1 - k^2 V^2),$$

или еще, на основаніи формулы (81),

$$q_2^2 = m^2(1 - \chi).$$

q_2^2 и m^2 суть величины положительныя, а потому изъ корней уравненія (82) годятся только тѣ корни, которые меньше 1.

Такихъ корней только одинъ, а именно χ_3.

Итакъ,

$$a = \chi_3 = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0,8453,$$

и

$$\sqrt{a} = 0,9194.$$

Слѣдовательно,

$$V = 0,9194\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (87)$$

Но $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$, согласно формулѣ (18), есть ничто иное, какъ скорость распространенія поперечныхъ волнъ въ верхнихъ слояхъ земли или V_2.

Такимъ образомъ, мы получимъ окончательно

$$V = 0{,}9194\, V_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (88)$$

V есть величина постоянная и представляетъ собою скорость распространенія поверхностныхъ сейсмическихъ волнъ.

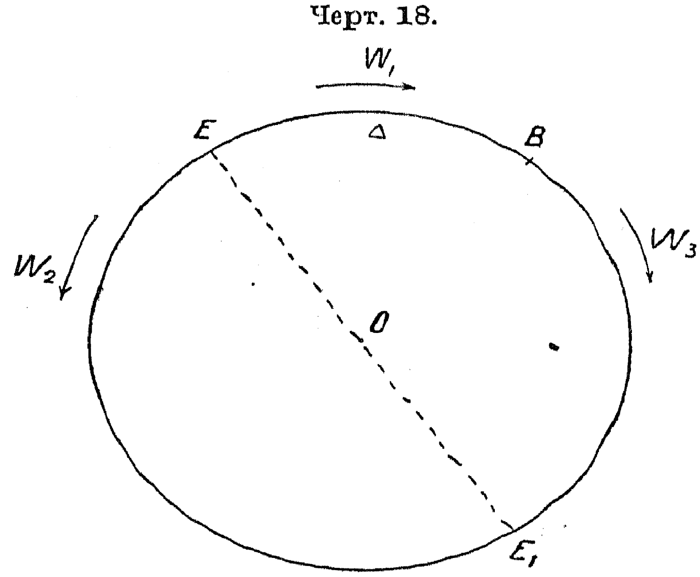
Это замѣчательное соотношеніе, являющееся результатомъ теоріи, какъ слѣдствіе основныхъ дифференціальныхъ уравненій теоріи упругости, прекрасно согласуется съ наблюденіями.

Дѣйствительно, сейсмометрическія наблюденія на разныхъ станціяхъ показываютъ, что, при землетрясеніяхъ, вдоль поверхности земли распространяются сейсмическія волны, совершенно аналогичныя тѣмъ, которыя распространяются по поверхности воды, если на спокойную ея поверхность бросить камень.

Эти волны отличаются сравнительно большимъ періодомъ, а, слѣдовательно, на основаніи общей формулы (29), и сравнительно большой длиной волны. Вслѣдствіе этого, имъ присвоено названіе *поверхностныхъ или длинныхъ волнъ*.

Зная положеніе эпицентра и время прихода длинныхъ волнъ на различныя сейсмическія станціи, можно легко опредѣлить *среднюю* скорость ихъ распространенія V. Оказывается, что V не зависитъ отъ разстоянія, а потому эта скорость можетъ въ среднемъ считаться величиной достаточно постоянной.

Черт. 18.



Скорость V можно опредѣлить и по наблюденіямъ одной лишь станціи, если послѣдняя снабжена достаточно чувствительнымъ сейсмографомъ.

Дѣйствительно, пусть на слѣдующемъ чертежѣ 18 E представляетъ собою эпицентръ землетрясенія, B мѣсто наблюденія, а E_1 антиподъ эпицентра или такъ называемый *антиэпицентръ*.

Пусть кратчайшее разстояніе между E и B, считаемое по дугѣ большого круга, будетъ Δ, гдѣ Δ выражено въ километрахъ.

Поверхностныя сейсмическія волны достигнутъ точки B раньше всего

по кратчайшему пути EB. Этимъ волнамъ присвоенъ символъ W_1 (W_1 — Wellen). Выбираютъ на сейсмограммѣ какой-нибудь ясно выраженный максимумъ движенія и опредѣляютъ соотвѣтствующій моментъ t_1.

Но то-же волнообразное движеніе дойдетъ до B, хотя и въ сильно ослабленной формѣ, и по другому, длиннѣйшему, пути EE_1B, пройдя черезъ антиэпицентръ.

Этимъ волнамъ присвоенъ символъ W_2. Онѣ приходятъ позднѣе, такъ какъ имъ предстоитъ пройти путь $2\pi R - \Delta$, гдѣ R есть средній радіусъ земли.

Если землетрясеніе достаточно интенсивно, то на сейсмограммахъ можно иногда подмѣтить въ волнахъ W_2 тотъ-же характерный максимумъ, который былъ отмѣченъ въ главной фазѣ при волнахъ W_1. Соотвѣтствующій моментъ пусть будетъ t_2.

Средній радіусъ земли, т.-е. радіусъ шара того-же объема, что дѣйствительный объемъ земли, равенъ

$$R = 6371 \text{ килом.};$$

слѣдовательно,

$$2\pi R = 40030 \text{ килом.},$$

или, съ округленіемъ и съ вполнѣ достаточной точностью,

$$2\pi R = 40000 \text{ кил.}$$

Если t_0 есть моментъ выхода соотвѣтствующаго движенія изъ эпицентра E, каковой моментъ намъ въ сущности вовсе и не требуется знать, то мы будемъ имѣть

$$V(t_1 - t_0) = \Delta$$

$$V(t_2 - t_0) = 40000 - \Delta$$

Отсюда находимъ

$$V = \frac{40000 - 2\Delta}{t_2 - t_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (89)$$

Эта формула даетъ возможность опредѣлить среднюю скорость распространенія поверхностныхъ сейсмическихъ волнъ по наблюденіямъ *одной* только станціи.

Но, кромѣ волнъ W_1, и W_2, наблюдаются иногда и третьи волны W_3.

Это тѣ волны W_1, которыя, придя въ B, продолжаютъ свой путь далѣе и, обогнувъ весь земной шаръ, снова возвращаются въ B. Полный, пройденный ими путь будетъ, очевидно, $40000 + \Delta$.

Иногда такія волны можно также отмѣтить на сейсмограммахъ, и, если мы сможемъ только въ нихъ отождествить тотъ-же основной максимумъ, который мы наблюдали въ главной фазѣ при волнахъ W_1 и опредѣлить соотвѣтствующій моментъ t_3, то и этими волнами (W_3) можно воспользоваться для опредѣленія средней величины скорости V.

$$V(t_1 - t_0) = \Delta$$

$$V(t_3 - t_0) = 40000 + \Delta.$$

Отсюда имѣемъ

$$V = \frac{40000}{t_3 - t_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (90)$$

Изъ наблюденій Пулковской сейсмической станціи при Мессинскомъ землетрясеніи 15/28 XII 1908 г. получилось (по W_2)

$$\underline{V = 3{,}53\ ^{\text{кил.}}/_{\text{сек.}}}$$

Другія наблюденія приводятъ къ числамъ, мало отличающимся отъ только что приведеннаго.

Такимъ образомъ, поверхностныя сейсмическія волны требуютъ, приблизительно, $3^{ч}\ 8^{м}\ 51^{с}$, чтобы обогнуть весь земной шаръ.

Мы видѣли раньше, что средняя величина скорости распространенія поперечныхъ волнъ V_2 въ верхнихъ слояхъ земли равна $4{,}01\ ^{\text{кил.}}/_{\text{сек.}}$

Такимъ образомъ, по формулѣ (88), мы должны были-бы имѣть

$$V = 0{,}9194 \times 4{,}01 = 3{,}69\ ^{\text{кил.}}/_{\text{сек.}}$$

Согласіе этого результата съ ранѣе приведеннымъ числомъ можно считать весьма удовлетворительнымъ.

Полнаго согласія и ожидать было нельзя, такъ какъ мы сравниваемъ здѣсь только *среднія* величины скоростей, а вмѣстѣ съ тѣмъ не подлежитъ сомнѣнію, что какъ V_2, такъ и V, для воды и суши должны быть различны. Кромѣ того, при выводѣ формулы (87), мы приняли коеффиціентъ Poisson'а равнымъ $\frac{1}{4}$.

Къ детальному и систематическому изученію величинъ V и V_2, а также и V_1, въ зависимости отъ геологическихъ и физическихъ особенностей верхнихъ слоевъ земли, современная сейсмологія, какъ совершенно молодая наука, еще не приступала.

Выяснивъ вопросъ о скорости распространенія поверхностныхъ сейсмическихъ колебаній, разсмотримъ ближе характеръ движенія частицъ земной поверхности при подобнаго рода возмущеніяхъ.

Для проэкцій смѣщенія u, v и w какой-нибудь точки M мы имѣли группу формулъ (85)

$$\left.\begin{aligned} u &= (A_1 + A_2)\, e^{\sigma} \\ v &= (B_1 + B_2)\, e^{\sigma} \\ w &= (C_1 + C_2)\, e^{\sigma} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (85)$$

гдѣ

$$\sigma = i\{fx + gy - pt\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (84)$$

Найдемъ теперь, на основаніи предыдущихъ формулъ, выраженія для $A_1 + A_2$, $B_1 + B_2$ и $C_1 + C_2$.

Формулы (55), (66) и 70 даютъ:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= \quad ifc + fH = f\{ic + H\} \\ B_1 + B_2 &= \quad igc + gH = g\{ic + H\} \\ C_1 + C_2 &= -q_1 c + C_2. \end{aligned}$$

На основаніи-же уравненій (72) и (73)

$$C_2 = -\frac{m^2 H}{i\, q_2} = i\,\frac{m^2}{q_2}\cdot H;$$

слѣдовательно,

$$C_1 + C_2 = -\, q_1\, c + i\,\frac{m^2}{q_2}\, H.$$

Съ другой стороны, по формулѣ (78),

$$H = -i\left[1 - \frac{1}{2}\,\frac{k^2 p^2}{m^2}\right] c;$$

слѣдовательно,

$$ic + H = ic\left[1 - \left\{1 - \frac{1}{2}\,\frac{k^2 p^2}{m^2}\right\}\right] = \frac{ic}{2}\cdot\frac{k^2 p^2}{m^2}$$

и

$$A_1 + A_2 = \frac{1}{2}\, if\,\frac{k^2 p^2}{m^2}\cdot c$$

$$B_1 + B_2 = \frac{1}{2}\, ig\,\frac{k^2 p^2}{m^2}\cdot c$$

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= -\, q_1 c + i\,\frac{m^2}{q_2}\left[-\, i\left\{1 - \frac{1}{2}\,\frac{k^2 p^2}{m^2}\right\}\right]\cdot c \\ &= \frac{1}{q_2}\left[-q_1\, q_2 + m^2\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{k^2 p^2}{m^2}\right)\right]\cdot c \\ &= \frac{m^2}{q_2}\left[1 - \frac{1}{2}\,\frac{k^2 p^2}{m^2} - \frac{q_1\, q_2}{m^2}\right]\cdot c. \end{aligned}$$

Но изъ формулы (79) слѣдуетъ, что

$$\frac{q_1 q_2}{m^2} = \frac{4m^4\left[1 - \frac{k^2 p^2}{2m^2}\right]^2}{4m^4} = 1 - \frac{k^2 p^2}{m^2} + \frac{k^4 p^4}{4m^4}.$$

Подставляя это выраженіе въ предыдущую формулу, найдемъ

$$C_1 + C_2 = \frac{m^2}{q_2}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{k^2 p^2}{m^2} - 1 + \frac{k^2 p^2}{m^2} - \frac{k^4 p^4}{4m^4}\right] c$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{k^2 p^2}{q_2}\left[1 - \frac{k^2 p^2}{2m^2}\right] c.$$

Подставляя еще сюда выраженіе q_2 изъ второй изъ формулъ (77)

$$q_2 = m\sqrt{1 - \frac{k^2 p^2}{m^2}},$$

будемъ имѣть

$$C_1 + C_2 = \frac{1}{2}\frac{k^2 p^2}{m}\cdot\frac{1 - \frac{k^2 p^2}{2m^2}}{\sqrt{1 - \frac{k^2 p^2}{m^2}}}\cdot c.$$

Введемъ теперь, для сокращенія, слѣдующія обозначенія:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{1}{2}\frac{k^2 p^2}{m}\cdot c \\ \Gamma_2 &= \frac{1 - \frac{k^2 p^2}{2m^2}}{\sqrt{1 - \frac{k^2 p^2}{m^2}}}\cdot\Gamma_1 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (91)$$

Тогда мы будемъ окончательно имѣть:

$$\left.\begin{aligned} A_1 + A_2 &= i\,\frac{f}{m}\Gamma_1 \\ B_1 + B_2 &= i\,\frac{g}{m}\Gamma_1 \\ C_1 + C_2 &= \Gamma_2, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (92)$$

гдѣ

$$m = \sqrt{f^2 + g^2}.$$

Преобразуемъ теперь выраженіе для e^σ.

$$\sigma = i\,\{fx + gy - pt\} = i\left\{m\left(\frac{f}{m}x + \frac{g}{m}y\right) - pt\right\}.$$

Мы видѣли раньше, что $\frac{f}{m}x + \frac{g}{m}y$ есть ничто иное, какъ разстояніе r данной точки на поверхности земли до эпицентра землетрясенія.

Слѣдовательно,

$$\sigma = i(mr - pt).$$

Введя, для сокращенія, слѣдующее обозначеніе:

$$mr = fx + gy = \gamma, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (93)$$

мы, на основаніи формулы Моавра, будемъ имѣть:

$$e^{\sigma} = e^{i(\gamma - pt)} = \cos(\gamma - pt) + i\sin(\gamma - pt)$$

или

$$e^{\sigma} = \cos(pt - \gamma) - i\sin(pt - \gamma).$$

Подставивъ эту величину въ формулы (85) и, принимая во вниманіе соотношенія (92), получимъ

$$u = i\frac{f}{m}\Gamma_1\cos(pt - \gamma) + \frac{f}{m}\Gamma_1\sin(pt - \gamma)$$

$$v = i\frac{g}{m}\Gamma_1\cos(pt - \gamma) + \frac{g}{m}\Gamma_1\sin(pt - \gamma)$$

$$w = \Gamma_2\cos(pt - \gamma) - i\Gamma_2\sin(pt - \gamma).$$

Но u, v и w по своему физическому смыслу должны быть величинами вещественными, а потому мы и откинемъ въ предыдущихъ выраженіяхъ мнимые члены и положимъ просто

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{f}{m}\Gamma_1\sin(pt - \gamma) \\ v &= \frac{g}{m}\Gamma_1\sin(pt - \gamma) \\ w &= \Gamma_2\cos(pt - \gamma) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (94)$$

Мы приходимъ такимъ образомъ прямо къ простымъ гармоническимъ колебаніямъ, т.-е. получаемъ *поверхностныя синусоидальныя волны,* причемъ, если мы обозначимъ соотвѣтствующій періодъ волны черезъ T, то будемъ имѣть

$$p = \frac{2\pi}{T}.$$

Такъ какъ мы просто откинули члены, имѣющіе множителемъ i, то надо

всетаки непосредственно убѣдиться, что группа формулъ (94) дѣйствительно удовлетворяетъ нашимъ основнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ (5).

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\lambda+\mu}{\rho}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\cdot\Delta u\\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\lambda+\mu}{\rho}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y}+\frac{\mu}{\rho}\,\Delta v\\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\lambda+\mu}{\rho}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial z}+\frac{\mu}{\rho}\,\Delta w\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

и пограничнымъ условіямъ *для* $z=0$

$$\left.\begin{aligned}N_3 &= \lambda\theta+2\mu\frac{\partial w}{\partial z}=0\\ T_2 &= \mu\left\{\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right\}=0\\ T_1 &= \mu\left\{\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right\}=0\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(\text{формулы }(62))$$

Когда z отличается отъ 0, то

$$e^{\sigma_1}=e^{-q_1 z}\cdot e^{i\{fx+gy-pt\}}=e^{-q_1 z}\{\cos(pt-\gamma)-i\sin(pt-\gamma)\}$$

и

$$e^{\sigma_2}=e^{-q_2 z}\cdot e^{i\{fx+gy-pt\}}=e^{-q_2 z}\{\cos(pt-\gamma)-i\sin(pt-\gamma)\}.$$

Слѣдовательно, мы должны положить въ общемъ случаѣ

$$u=\{A_1 e^{-q_1 z}+A_2 e^{-q_2 z}\}\cos(pt-\gamma)-i\{A_1 e^{-q_1 z}+A_2 e^{-q_2 z}\}\sin(pt-\gamma)$$

$$v=\{B_1 e^{-q_1 z}+B_2 e^{-q_2 z}\}\cos(pt-\gamma)-i\{B_1 e^{-q_1 z}+B_2 e^{-q_2 z}\}\sin(pt-\gamma)$$

$$w=\{C_1 e^{-q_1 z}+C_2 e^{-q_2 z}\}\cos(pt-\gamma)-i\{C_1 e^{-q_1 z}+C_2 e^{-q_2 z}\}\sin(pt-\gamma).$$

Такъ какъ A_1, B_1, A_2 и B_2, согласно формуламъ (55), (70) и (78), суть величины мнимыя, а C_1 и C_2, согласно формуламъ (55) и (76), величины дѣйствительныя, и, такъ какъ u, v и w, по существу дѣла, не могутъ быть мнимыми, то мы въ общемъ случаѣ должны, на основаніи предыдущихъ соотношеній, положить

$$\left.\begin{aligned}u &= -\,i\,\{A_1 e^{-q_1 z}+A_2 e^{-q_2 z}\}\sin(pt-\gamma)\\ v &= -\,i\,\{B_1 e^{-q_1 z}+B_2 e^{-q_2 z}\}\sin(pt-\gamma)\\ w &= +\;\;\{C_1 e^{-q_1 z}+C_2 e^{-q_2 z}\}\cos(pt-\gamma)\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(95)$$

Легко убѣдиться, что эти выраженія, при $z=0$, и, принимая во вниманіе соотношенія (92), приводятъ именно къ формуламъ (94). Теперь остается только убѣдиться въ томъ, что эти общія выраженія для u, v и w, опредѣляемыя уравненіями (95), дѣйствительно удовлетворяютъ основнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ движенія и тремъ пограничнымъ условіямъ.

Положивши въ основаніе выраженія (95), займемся опредѣленіемъ различныхъ производныхъ.

Положивши, для сокращенія письма,

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \{A_1 e^{-q_1 z} + A_2 e^{-q_2 z}\} \\ \mathfrak{B} &= \{B_1 e^{-q_1 z} + B_2 e^{-q_2 z}\} \\ \mathfrak{C} &= \{C_1 e^{-q_1 z} + C_2 e^{-q_2 z}\}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (96)$$

будемъ имѣть

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p^2\, i\, \mathfrak{A} \sin(pt-\gamma)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p^2\, i\, \mathfrak{B} \sin(pt-\gamma)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -p^2\, \mathfrak{C} \cos(pt-\gamma).$$

Далѣе, имѣя въ виду, что, на основаніи формулы (93),

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} = f$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial y} = g,$$

получимъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = + f i\, \mathfrak{A} \cos(pt-\gamma)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = + g i\, \mathfrak{A} \cos(pt-\gamma)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = + i\, \{q_1 A_1 e^{-q_1 z} + q_2 A_2 e^{-q_2 z}\} \sin(pt-\gamma)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = + f^2 i\, \mathfrak{A} \sin(pt-\gamma)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = + g^2 i\, \mathfrak{A} \sin(pt-\gamma)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = - i\, \{q_1^2 A_1 e^{-q_1 z} + q_2^2 A_2 e^{-q_2 z}\} \sin(pt-\gamma).$$

Слѣдовательно,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = i\,[-q_1^2 A_1 e^{-q_1 z} - q_2^2 A_2 e^{-q_2 z} + m^2 \mathfrak{A}] \sin(pt-\gamma)$$

$$= -i\,[\{q_1^2 - m^2\} A_1 e^{-q_1 z} + \{q_2^2 - m^2\} A_2 e^{-q_2 z}] \sin(pt-\gamma).$$

Точно также найдемъ:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = + fi\mathfrak{B} \cos(pt-\gamma)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = + gi\mathfrak{B} \cos(pt-\gamma)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = + i\,\{q_1 B_1 e^{-q_1 z} + q_2 B_2 e^{-q_2 z}\} \sin(pt-\gamma).$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = + f^2 i \mathfrak{B} \sin(pt-\gamma)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = + g^2 i \mathfrak{B} \sin(pt-\gamma)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = - i\,\{q_1^2 B_1 e^{-q_1 z} + q_2^2 B_2 e^{-q_2 z}\} \sin(pt-\gamma)$$

и

$$\Delta v = -i\,[\{q_1^2 - m^2\} B_1 e^{-q_1 z} + \{q_2^2 - m^2\} B_2 e^{-q_2 z}] \sin(pt-\gamma).$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f\,\mathfrak{C} \sin(pt-\gamma)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = g\,\mathfrak{C} \sin(pt-\gamma)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\{q_1 C_1 e^{-q_1 z} + q_2 C_2 e^{-q_2 z}\} \cos(pt-\gamma).$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - f^2 \mathfrak{C} \cos(pt-\gamma)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = - g^2 \mathfrak{C} \cos(pt-\gamma)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \{q_1^2 C_1 e^{-q_1 z} + q_2^2 C_2 e^{-q_2 z}\} \cos(pt-\gamma)$$

и

$$\Delta w = [(q_1^2 - m^2) C_1 e^{-q_1 z} + (q_2^2 - m^2) C_2 e^{-q_2 z}] \cos(pt-\gamma).$$

Далѣе

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = + i\,\{f\mathfrak{A} + g\mathfrak{B}\} \cos(pt-\gamma)$$

$$- \{q_1 C_1 e^{-q_1 z} + q_2 C_2 e^{-q_2 z}\} \cos(pt-\gamma)$$

или

$$\theta = + [\{ifA_1 + igB_1 - q_1 C_1\} e^{-q_1 z} + \{ifA_2 + igB_2 - q_2 C_2\} e^{-q_2 z}] \cos(pt - \gamma).$$

Отсюда имѣемъ

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = f[\{ifA_1 + igB_1 - q_1 C_1\} e^{-q_1 z} + \{ifA_2 + igB_2 - q_2 C_2\} e^{-q_2 z}] \sin(pt - \gamma)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = g[\{ifA_1 + igB_1 - q_1 C_1\} e^{-q_1 z} + \{ifA_2 + igB_2 - q_2 C_2\} e^{-q_2 z}] \sin(pt - \gamma)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = [-q_1 \{ifA_1 + igB_1\} - q_1 C_1\} e^{-q_1 z} - q_2 \{ifA_2 + igB_2 - q_2 C_2\} e^{-q_2 z}] \cos(pt - \gamma).$$

Подставимъ теперь найденныя выраженія въ дифференціальныя уравненія (5), начиная съ перваго изъ нихъ:

$$p^2 \{iA_1 e^{-q_1 z} + iA_2 e^{-q_2 z}\} \sin(pt - \gamma) = + \frac{\lambda + \mu}{\rho} f[\{ifA_1 + igB_1 - q_1 C_1\} e^{-q_1 z}$$
$$+ \{ifA_2 + igB_2 - q_2 C_2\} e^{-q_2 z}] \sin(pt - \gamma) - \frac{\mu}{\rho} [(q_1^2 - m^2) iA_1 e^{-q_1 z}$$
$$+ (q_2^2 - m^2) iA_2 e^{-q_2 z}] \sin(pt - \gamma).$$

Мы видимъ, что $\sin(pt - \gamma)$ входитъ общимъ множителемъ, слѣдовательно

$$\left[\left\{-p^2 - \frac{\mu}{\rho}(q_1^2 - m^2)\right\} iA_1 + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \cdot f\{fiA_1 + giB_1 - q_1 C_1\}\right] e^{-q_1 z}$$
$$+ \left[\left\{-p^2 - \frac{\mu}{\rho}(q_2^2 - m^2)\right\} iA_2 + \frac{\lambda + \mu}{\rho} f\{fiA_2 + giB_2 - q_2 C_2\}\right] e^{-q_2 z} = 0.$$

Теперь изъ предыдущихъ формулъ мы имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= ifc \\ B_1 &= igc \\ C_1 &= -q_1 c \end{aligned}\right\} \text{. . . . . формулы (55)}$$

(см. также формулы (66))

$$\left.\begin{aligned} A_2 &= fH \\ B_2 &= gH \end{aligned}\right\} \text{. . . . . формулы (70)}$$

$$C_2 = \frac{m^2}{q_2} \cdot iH \text{. . . . . из формулы (72)}$$

Подставивъ эти величины въ предыдущее уравненіе, и, принимая во вниманіе, что $i^2 = -1$, получимъ

$$cf\left[p^2 + \frac{\mu}{\rho}(q_1{}^2 - m^2) + \frac{\lambda+\mu}{\rho}\{-f^2 - g^2 + q_1{}^2\}\right]e^{-q_1 z}$$
$$+ iHf\left[-p^2 - \frac{\mu}{\rho}(q_2{}^2 - m^2) + \frac{\lambda+\mu}{\rho}\{f^2 + g^2 - m^2\}\right]e^{-q_2 z} = 0,$$

или, сокращая на f,

$$c\left[p^2 + \frac{\lambda+2\mu}{\rho}\cdot(q_1{}^2 - m^2)\right]e^{-q_1 z} - iH\left[p^2 + \frac{\mu}{\rho}(q_2{}^2 - m^2)\right]e^{-q_2 z} = 0.$$

Но, въ силу соотношеній (75),

$$\frac{\lambda+2\mu}{\rho} = \frac{1}{h^2}$$

и

$$\frac{\mu}{\rho} = \frac{1}{k^2};$$

слѣдовательно,

$$c\left[p^2 + \frac{q_1{}^2 - m^2}{h^2}\right]e^{-q_1 z} - iH\left[p^2 + \frac{q_2{}^2 - m^2}{k^2}\right]e^{-q_2 z} = 0.$$

Но изъ формулъ (77) слѣдуетъ, что

$$\left.\begin{aligned} \frac{q_1{}^2 - m^2}{h^2} &= -p^2 \\ \frac{q_2{}^2 - m^2}{k^2} &= -p^2 \end{aligned}\right\} \qquad (97)$$

и

Подставляя эти величины, мы убѣждаемся въ томъ, что первое изъ нашихъ основныхъ дифференціальныхъ уравненій будетъ удовлетворено при всякихъ значеніяхъ x, y, z и t, и при томъ еще при всякихъ значеніяхъ c и iH, гдѣ iH, въ силу соотношенія (78), есть величина вещественная.

Обратимся теперь ко второму изъ дифференціальныхъ уравненій (5).

Подставляя въ него ранѣе найденныя величины производныхъ, получимъ:

$$p^2\{iB_1 e^{-q_1 z} + iB_2 e^{-q_2 z}\}\sin(pt-\gamma) = \frac{\lambda+\mu}{\rho}\cdot g\,[\{ifA_1 + igB_1 - q_1 C_1\}e^{-q_1 z}$$
$$+ \{ifA_2 + igB_2 - q_2 C_2\}e^{-q_2 z}]\sin(pt-\gamma)$$
$$- \frac{\mu}{\rho}[(q_1{}^2 - m^2)iB_1 e^{-q_1 z} + (q_2{}^2 - m^2)iB_2 e^{-q_2 z}]\sin(pt-\gamma).$$

$\sin(pt-\gamma)$ входитъ опять общимъ множителемъ.

Итакъ,

$$\left[\left\{-p^2-\frac{\mu}{\rho}(q_1^2-m^2)\right\}iB_1+\frac{\lambda+\mu}{\rho}\cdot g\{fiA_1+giB_1-q_1C_1\}\right]e^{-q_1z}$$
$$+\left[\left\{-p^2-\frac{\mu}{\rho}(q_2^2-m^2)\right\}iB_2+\frac{\lambda+\mu}{\rho}\cdot g\{fiA_2+giB_2-q_2C_2\}\right]e^{-q_2z}=0$$

или, на основаніи тѣхъ-же ранѣе установленныхъ соотношеній,

$$cg\left[p^2+\frac{\mu}{\rho}(q_1^2-m^2)+\frac{\lambda+\mu}{\rho}\{q_1^2-f^2-g^2\}\right]e^{-q_1z}$$
$$+iHg\left[-p^2-\frac{\mu}{\rho}(q_2^2-m^2)+\frac{\lambda+\mu}{\rho}\{f^2+g^2-m^2\}\right]e^{-q_2z}=0,$$

или, сокращая на g,

$$c\left[p^2+\frac{\lambda+2\mu}{\rho}(q_1^2-m^2)\right]e^{-q_1z}-iH\left[p^2+\frac{\mu}{\rho}\cdot(q_2^2-m^2)\right]e^{-q_2z}=0.$$

На основаніи соотношеній (97) и это выраженіе всегда тождественно равно нулю.

Разсмотримъ теперь третье уравненіе для w.

$$-p^2\{C_1e^{-q_1z}+C_2e^{-q_2z}\}\cos(pt-\gamma)=-\frac{\lambda+\mu}{\rho}[q_1\{ifA_1+igB_1-q_1C_1\}e^{-q_1z}$$
$$+q_2\{ifA_2+igB_2-q_2C_2\}e^{-q_2z}]\cos(pt-\gamma)+\frac{\mu}{\rho}[(q_1^2-m^2)C_1e^{-q_1z}$$
$$+(q_2^2-m^2)C_2e^{-q_2z}]\cos(pt-\gamma).$$

Теперь уже $\cos(pt-\gamma)$ входитъ общимъ множителемъ.

Слѣдовательно,

$$\left[\left\{p^2+\frac{\mu}{\rho}(q_1^2-m^2)\right\}C_1-\frac{\lambda+\mu}{\rho}q_1\{ifA_1+igB_1-q_1C_1\}\right]e^{-q_1z}$$
$$+\left[\left\{p^2+\frac{\mu}{\rho}(q_2^2-m^2)\right\}C_2-\frac{\lambda+\mu}{\rho}q_2\{ifA_2+igB_2-q_2C_2\}\right]e^{-q_2z}=0.$$

Замѣнивъ въ этомъ выраженіи A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 соотвѣтствующими величинами, будемъ имѣть

$$-cq_1\left[p^2+\frac{\mu}{\rho}(q_1^2-m^2)+\frac{\lambda+\mu}{\rho}\{-f^2-g^2+q_1^2\}\right]e^{-q_1z}$$
$$+iH\left[\left\{p^2+\frac{\mu}{\rho}(q_2^2-m^2)\right\}\frac{m^2}{q_2}-\frac{\lambda+\mu}{\rho}q_2\{f^2+g^2-m^2\}\right]e^{-q_2z}=0$$

или

$$-cq_1\left[p^2+\frac{\lambda+2\mu}{\rho}(q_1^2-m^2)\right]e^{-q_1 z}+iH\left[p^2+\frac{\mu}{\rho}(q_2^2-m^2)\right]\frac{m^2}{q_2}e^{-q_2 z}=0.$$

Легко видѣть, что и это уравненіе будетъ тождественно удовлетворено при всякихъ значеніяхъ перемѣнныхъ независимыхъ x, y, z и t и при всякихъ значеніяхъ постоянныхъ c и iH.

Итакъ, мы убѣдились, что группа выраженій (95) дѣйствительно удовлетворяетъ нашимъ основнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ.

Посмотримъ теперь удовлетворяютъ ли они нашимъ тремъ пограничнымъ условіямъ и начнемъ съ перваго изъ нихъ:

$$N_3=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Подставимъ сюда ранѣе выведенныя выраженія для θ и $\frac{\partial w}{\partial z}$.

Полагая уже теперь $z=0$, слѣдовательно $e^{-q_1 z}=e^{-q_2 z}=1$, получимъ

$$\lambda[\{ifA_1+igB_1-q_1C_1\}+\{ifA_2+igB_2-q_2C_2\}]\cos(pt-\gamma)$$
$$-2\mu[q_1C_1+q_2C_2]\cos(pt-\gamma)=0.$$

$\cos(pt-\gamma)$ входитъ общимъ множителемъ.

Слѣдовательно, подставляя вмѣсто A_1, B_1 и т. д. соотвѣтствующія значенія, будемъ имѣть

$$\lambda[\{-f^2-g^2+q_1^2\}c+Hi\{f^2+g^2-m^2\}]-2\mu[-q_1^2c+Him^2]=0$$

или

$$\lambda\{q_1^2-m^2\}c+2\mu\{q_1^2c-Him^2\}=0.$$

Но изъ формулы (78) мы имѣемъ

$$Hi=\left[1-\frac{1}{2}\frac{k^2p^2}{m^2}\right]c.$$

Подставляя эту величину и сокращая на c, получимъ

$$\lambda\{q_1^2-m^2\}+2\mu\{q_1^2-m^2+\frac{1}{2}k^2p^2\}=0$$

или

$$\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\cdot(q_1^2-m^2)+k^2p^2=0.$$

Но изъ уравненій (75) мы имѣемъ

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} = \frac{k^2}{h^2},$$

а изъ перваго изъ уравненій (97)

$$q_1^2 - m^2 = -p^2 h^2,$$

слѣдовательно,

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \cdot (q_1^2 - m^2) = -k^2 p^2.$$

Такимъ образомъ, первое пограничное условіе удовлетворено.

Второе пограничное условіе $T_2 = 0$ требуетъ, чтобы было

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

Подставляя соотвѣтствующія величины, находимъ (при $z = 0$)

$$i\{q_1 A_1 + q_2 A_2\} \sin(pt - \gamma) + f\{C_1 + C_2\} \sin(pt - \gamma) = 0$$

или

$$i\{q_1 ifc + q_2 fH\} + f\left(-q_1 c + \frac{m^2}{q_2} iH\right) = 0,$$

или еще

$$-2q_1 c + \left\{q_2 + \frac{m^2}{q_2}\right\} iH = 0.$$

Подставляя сюда значеніе iH изъ формулы (78) и сокращая на c, получимъ

$$-2q_1 q_2 + (q_2^2 + m^2)\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{k^2 p^2}{m^2}\right) = 0.$$

Но, изъ второго изъ уравненій (77),

$$q_2^2 + m^2 = 2m^2 - k^2 p^2 = 2m^2\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{k^2 p^2}{m^2}\right),$$

а, изъ уравненія (79),

$$q_1 q_2 = \left[1 - \frac{1}{2}\,\frac{k^2 p^2}{m^2}\right]^2 . m^2.$$

Подставляя, получимъ

$$-2\left[1 - \frac{1}{2}\,\frac{k^2 p^2}{m^2}\right]^2 . m^2 + 2m^2\left[1 - \frac{1}{2}\,\frac{k^2 p^2}{m^2}\right]^2 = 0,$$

т.-е. тождество.

Такимъ образомъ и второе пограничное условіе удовлетворено.

Третье пограничное условіе $T_1 = 0$ требуетъ, чтобы было

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Подставляя соотвѣтствующія значенія производныхъ (для $z = 0$), находимъ

$$g(C_1 + C_2)\sin(pt - \gamma) + i\{q_1 B_1 + q_2 B_2\}\sin(pt - \gamma) = 0$$

или

$$g\left\{- cq_1 + \frac{m^2}{q_2} iH\right\} + i\{q_1 gic + g_2 q\, H\} = 0.$$

Сократимъ на g; тогда

$$- 2q_1 q_2 c + iH\{m^2 + q_2{}^2\} = 0.$$

Замѣняя $q_1 q_2$, iH и $(m^2 + q^2{}_2)$ соотвѣтствующими ранѣе выведенными величинами, будемъ имѣть

$$- 2\left[1 - \frac{k^2 p^2}{2m^2}\right]^2 m^2 . c + \left[1 - \frac{k^2 p^2}{2m^2}\right]\left[1 - \frac{k^2 p^2}{2m^2}\right] 2cm^2 = 0.$$

Это выраженіе также всегда тождественно равно нулю.

Итакъ, мы видимъ, что выраженія для u, v и w, опредѣляемыя уравненіями (95), удовлетворяютъ, не только тремъ основнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ движенія, но и всѣмъ тремъ пограничнымъ условіямъ для $z = 0$, слѣдовательно, они удовлетворяютъ всѣмъ условіямъ поставленной задачи.

Изъ этихъ-же общихъ выраженій получается, полагая въ нихъ $z = 0$ и принимая во вниманіе соотношенія (92), группа формулъ (94) для u, v и w у поверхности земли:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{f}{m}\Gamma_1 \sin(pt - \gamma) \\ v &= \frac{g}{m}\Gamma_1 \sin(pt - \gamma) \\ w &= \Gamma_2 \cos(pt - \gamma) \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (94)$$

Возьмемъ теперь какое-нибудь направленіе OM на поверхности земли, составляющее уголъ α съ осью x-овъ (см. предыдущій чертежъ 17).

Мы видѣли раньше, при выводѣ величины скорости распространенія поверхностныхъ волнъ, что

$$\frac{f}{m} = \cos\alpha$$

$$\frac{g}{m} = \sin\alpha,$$

слѣдовательно, горизонтальная проэкція s смѣщенія точки M совпадаетъ съ направленіемъ распространенія поверхностной волны, причемъ величина s будетъ равна $\sqrt{u^2+v^2}$.

Итакъ

$$\left.\begin{aligned} s &= \Gamma_1 \sin(pt-\gamma) \\ w &= \Gamma_2 \cos(pt-\gamma) \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (98)$$

и

Такимъ образомъ, какъ горизонтальная, такъ и вертикальная проэкціи смѣщенія точки M удовлетворяютъ закону гармоническихъ колебаній, но между этими движеніями устанавливается разность фазъ равная $\frac{\pi}{2}$, такъ что, когда, напримѣръ, s максимумъ, w равно нулю и наоборотъ.

Горизонтальное смѣщеніе s совпадаетъ, какъ мы видѣли, съ направленіемъ распространенія поверхностной сейсмической волны, а вертикальное w къ этому направленію перпендикулярно. Мы имѣемъ, такимъ образомъ, въ этомъ случаѣ какъ бы наложеніе волнъ двухъ типовъ — продольныхъ и поперечныхъ, причемъ, въ отличіе отъ волнъ, распространяющихся сквозь толщу земли, оба типа волнъ движутся по поверхности земли съ *одной и той-же* скоростью V.

Γ_1 и Γ_2 представляютъ собою амплитуды соотвѣтствующихъ колебаній, причемъ величины этихъ амплитудъ опредѣляются формулами (91):

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{1}{2}\frac{k^2p^2}{m}\cdot c \\ \Gamma_2 &= \frac{1-\frac{k^2p^2}{2m^2}}{\sqrt{1-\frac{k^2p^2}{m^2}}}\cdot\Gamma_1 \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (91)$$

Изъ формулъ (98) слѣдуетъ, что

$$\frac{s^2}{\Gamma_1^2}+\frac{w^2}{\Gamma_2^2}=1,$$

т.-е. частицы поверхности земли описываютъ фактически, при проходѣ поверхностныхъ сейсмическихъ волнъ, эллипсы, для которыхъ Γ_1 и Γ_2 будутъ соотвѣтствующія полуоси.

Γ_1 и Γ_2 пропорціональны c, которое остается у насъ пока совершенно произвольнымъ.

Найдемъ теперь отношеніе этихъ полуосей $\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$.

Изъ второй изъ формулъ (91) слѣдуетъ, что

$$\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}=\frac{\sqrt{1-\frac{k^2p^2}{m^2}}}{1-\frac{k^2p^2}{2m^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (99)$$

Но мы видѣли раньше, что $\frac{p}{m}=V$ и $k^2V^2=\chi$ (см. формулы (80) и (81), гдѣ χ есть корень кубическаго уравненія (82), въ предположеніи, что коеффиціентъ Poisson'а $\sigma=\frac{1}{4}$.

Слѣдовательно,

$$\frac{k^2p^2}{m^2}=\chi.$$

Но для χ мы нашли, въ предположеніи $\lambda=\mu$, единственное возможное рѣшеніе

$$\chi=a=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right);$$

слѣдовательно,

$$\frac{k^2p^2}{m^2}=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Подставляя эту величину въ формулу (99), найдемъ

$$\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}=\frac{\sqrt{1-2+\frac{2}{\sqrt{3}}}}{1-1+\frac{1}{\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}-1}\,.\sqrt{3}$$

или, окончательно,

$$\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}=\sqrt{2\sqrt{3}-3}=0{,}6812, \ldots\ldots\ldots\ldots (100)$$

или-же

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}=1{,}468.$$

Итакъ, мы видимъ, что амплитуды дѣйствительныхъ горизонтальныхъ и вертикальныхъ смѣщеній точки земной поверхности находятся въ постоянномъ соотношеніи другъ къ другу, причемъ амплитуда горизонтальнаго смѣщенія составляетъ, приблизительно, 0,7 амплитуды соотвѣтствующаго вертикальнаго смѣщенія. Такимъ образомъ, эллипсы, по которымъ совершается движеніе точки M, представляются растянутыми въ вертикальномъ направленіи. Этотъ интересный результатъ вытекаетъ какъ слѣдствіе нашихъ основныхъ дифференціальныхъ уравненій движенія, при гипотезѣ изотропности верхнихъ слоевъ земли. Въ случаѣ анизотропіи, получится нѣсколько иная, меньшая, величина для отношенія амплитудъ $\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}$.

Справедливость формулы (100) не удалось еще подтвердить опытнымъ путемъ, такъ какъ вблизи эпицентровъ землетрясеній не собрано еще достаточно надежнаго наблюдательнаго матеріала, изъ котораго можно бы было вывести величину *истинной* амплитуды горизонтальнаго и вертикальнаго смѣщенія точки земной поверхности. Воспользоваться-же для означенной цѣли наблюденіями отдаленныхъ станцій, гдѣ имѣются надежные сейсмографы, не такъ уже просто.

Дѣло въ томъ, что, съ увеличеніемъ разстоянія отъ эпицентра, измѣняется и энергія колебательнаго движенія: во-первыхъ, оттого, что эта энергія поверхностныхъ волнъ распредѣляется по кругамъ различныхъ радіусовъ, а, во-вторыхъ, вслѣдствіе неизбѣжнаго вліянія затуханія, причемъ коэффиціентъ затуханія можетъ быть различенъ для горизонтальныхъ и вертикальныхъ колебаній. Кромѣ того, есть еще указаніе на то, что, по мѣрѣ пробѣга сейсмической волны вдоль поверхности земли, нѣсколько измѣняется и самый періодъ колебаній. Всѣ эти вопросы не достаточно еще изслѣдованы, а потому надежная провѣрка формулы (100) не можетъ быть пока еще предпринята. Нѣкоторыя новѣйшія данныя по этому вопросу приведены, однако, въ концѣ главы VIII.

Въ заключеніе, разсмотримъ, какъ измѣняется энергія поверхностныхъ сейсмическихъ волнъ въ зависимости отъ разстоянія Δ данной точки до эпицентра и какъ можно опредѣлить изъ наблюденій коэффиціентъ затуханія поверхностной сейсмической энергіи.

Разсмотримъ, напримѣръ, случай горизонтальныхъ колебаній.

Обозначивъ черезъ a истинную амплитуду горизонтальнаго смѣщенія точки земной поверхности, а черезъ T соотвѣтствующій періодъ колебаній, мы, на основаніи формулы (35), получимъ слѣдующее выраженіе для соотвѣтствующей величины энергіи I:

$$I = 2\pi^2 C \cdot \frac{a^2}{T^2}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

гдѣ C есть нѣкоторый множитель пропорціональности.

Разстоянію Δ до эпицентра соотвѣтствуетъ дуга большого круга ϑ, гдѣ

$$\vartheta = \frac{\Delta}{R}.$$

R есть радіусъ земного шара, равный 6371 кил.

Всѣ точки земной поверхности, находящіяся въ одномъ и томъ-же разстояніи Δ отъ эпицентра, лежатъ на окружности круга, радіусъ котораго

$$r = R \sin \vartheta. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (101)$$

Отсюда, пренебрегая затуханіемъ, слѣдуетъ, что для разныхъ эпицентральныхъ разстояній Δ, Δ_1, Δ_2 и т. д.

$$Ir = I_1 r_1 = I_2 r_2 = \text{const.} = A$$

или

$$I = \frac{A}{r}, \quad I_1 = \frac{A}{r_1}, \quad I_2 = \frac{A}{r_2} \quad \text{и т. д.}$$

Здѣсь r входитъ въ знаменателѣ въ первой степени, а не въ квадратѣ, какъ въ случаѣ распространенія волнъ изъ одного и того же центра по всѣмъ возможнымъ направленіямъ въ пространствѣ.

r будетъ максимумъ, а I минимумъ, когда $\vartheta = 90°$; но потомъ, съ дальнѣйшимъ возрастаніемъ Δ и ϑ, r будетъ снова уменьшаться и въ антиподѣ эпицентра или въ такъ называемомъ *антиэпицентрѣ* сейсмическая энергія снова сконцентрируется, и, если-бы не было затуханія, то въ антиэпицентрѣ мы должны были-бы имѣть такое-же сильное землетрясеніе, какъ и въ самомъ эпицентрѣ.

Это будетъ особенно наглядно, если мы возьмемъ глобусъ и помѣстимъ эпицентръ въ сѣверномъ полюсѣ. Тогда ϑ будетъ ничто иное, какъ дополненіе широты.

Отъ антиэпицентра волны снова будутъ расходиться во всѣ стороны, и, по истеченіи опредѣленнаго промежутка времени, вновь сконцентрируются въ эпицентрѣ и т. д.

Однако, вслѣдствіе вліянія затуханія, энергія въ антиэпицентрѣ будетъ значительно слабѣе, чѣмъ въ эпицентрѣ.

Вводя затуханіе, мы должны вообще положить

$$I = \frac{I_0}{r} \cdot e^{-k\Delta}, \qquad (102)$$

гдѣ I_0 есть нѣкоторая постоянная.

Въ этой и аналогичныхъ формулахъ нельзя доводить r до нуля, такъ какъ энергія никогда не можетъ быть сконцентрирована въ математической точкѣ, и мы только для удобства разсужденій отождествили эпицентръ съ точкой.

Зная величину I для двухъ станцій въ различныхъ разстояніяхъ Δ отъ эпицентра, можно легко, по формулѣ (102), опредѣлить коэффиціентъ затуханія поверхностной сейсмической энергіи k.

Но для той-же цѣли можно воспользоваться и наблюденіями одной и той-же станціи, если только землетрясеніе отличалось достаточной силой и на сейсмограммѣ, кромѣ волнъ W_1, пришедшихъ изъ эпицентра по кратчай-

шему пути, обнаруживаются еще волны W_2, достигшія мѣста наблюденія послѣ огибанія земного шара, т.-е. прошедшія черезъ антиэпицентръ.

Обозначивъ черезъ a_1, T_1 и I_1 амплитуду, періодъ и энергію для какого-нибудь рѣзко выраженнаго максимума въ главной фазѣ землетрясенія для волнъ W_1, а соотвѣтствующія величины для того-же максимума въ волнахъ W_2 черезъ a_2, T_2 и I_2, гдѣ T_2 можетъ, какъ раньше было указано, нѣсколько отличаться отъ T_1, будемъ имѣть

$$I_1 = 2\pi^2 C \frac{a_1^2}{T_1^2} = \frac{I_0}{r} \cdot e^{-k\Delta}$$

$$I_2 = 2\pi^2 C \cdot \frac{a_2^2}{T_2^2} = \frac{I_0}{r} \cdot e^{-k(40000-\Delta)},$$

такъ какъ r теперь одно и то-же, а путь, пройденный волнами W_2, будетъ равенъ $40000 - \Delta$ километровъ.

Дѣйствительно, для волнъ W_1,

$$r = R \sin \frac{\Delta}{R},$$

а, для волнъ W_2,

$$r = R \sin \frac{40000 - \Delta}{R} = R \sin \left\{2\pi - \frac{\Delta}{R}\right\} = -R \sin \frac{\Delta}{R}.$$

Здѣсь имѣетъ значеніе только абсолютная величина r.

Отсюда находимъ

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 \cdot \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = e^{k(40000-2\Delta)}$$

или

$$k = \frac{2}{\mathrm{Lg}_{10} e} \cdot \frac{\mathrm{Lg}\left(\frac{a_1}{a_2}\right) - \mathrm{Lg}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)}{40000 - 2\Delta}, \ldots \ldots \ldots \ldots (103)$$

гдѣ

$$\mathrm{Lg}_{10} e = M = 0{,}43429.$$

Наблюдая a_3 и T_3 для волнъ W_3, прошедшихъ черезъ мѣсто наблюденій и вновь обогнувшихъ весь земной шаръ, получимъ

$$k = \frac{2}{\mathrm{Lg}_{10} e} \cdot \frac{\mathrm{Lg}\left(\frac{a_1}{a_3}\right) - \mathrm{Lg}\left(\frac{T_1}{T_3}\right)}{40000} \ldots \ldots \ldots \ldots (104)$$

Въ этомъ послѣднемъ случаѣ можно вовсе и не знать разстоянія до эпицентра Δ.

По этимъ формуламъ можно опредѣлить коеффиціентъ затуханія поверхностной сейсмической энергіи k.

Для этой величины получилось для меридіанальной горизонтальной составляющей смѣщенія почвы по Пулковскимъ наблюденіямъ:

при Мессинскомъ землетрясеніи 28/XII 1908 г. $k = 0{,}00027$,

при Исландскомъ землетрясеніи 22/I 1910 г. $k = 0{,}00028$,

причемъ разстояніе Δ должно быть выражено въ километрахъ.

Согласіе между этими величинами k въ высшей степени удовлетворительное.

Возьмемъ $k = 0{,}00028$ и предложимъ себѣ слѣдующій вопросъ:

Въ какомъ разстояніи отъ эпицентра поверхностная сейсмическая энергія уменьшится, благодаря затуханію, на половину?

Тогда

$$e^{-0{,}00028 . \Delta} = \frac{1}{2} .$$

Отсюда находимъ

$$\Delta = 2476 \text{ кил.}$$

На самомъ дѣлѣ въ этомъ разстояніи I будетъ еще меньше, потому что $r = R \sin \frac{\Delta}{R}$ увеличится.

Для антиэпицентра $\Delta = 20000$ кил.

и

$$e^{-0{,}00028 . 20000} = e^{-5{,}6} = \frac{1}{270} .$$

Въ этомъ послѣднемъ случаѣ вліяніе измѣненія r уже не скажется.

Эти численные примѣры даютъ наглядное представленіе о вліяніи затуханія на уменьшеніе энергіи поверхностныхъ сейсмическихъ волнъ съ разстояніемъ.

Вполнѣ возможно, что коеффиціентъ затуханія k зависитъ нѣсколько и отъ періода соотвѣтствующей поверхностной волны, но этотъ вопросъ совершенно еще не изслѣдованъ.

Глава III.

О сейсмическихъ лучахъ.

§ 1.

Выводъ основныхъ уравненій.

Въ предыдущей главѣ мы видѣли, что изъ очага или гипоцентра землетрясенія расходятся во всѣ стороны сейсмическія волны двоякаго рода, а именно волны продольныя и поперечныя, движущіяся съ различными скоростями, которыя, достигнувъ поверхности земли, вызываютъ колебанія поверхностныхъ слоевъ земли. Вблизи эпицентра эти колебанія бываютъ иногда настолько значительны, что они, не только непосредственно ощущаются людьми, но вызываютъ подчасъ болѣе или менѣе сильныя разрушенія; но, и въ отдаленныхъ отъ эпицентра областяхъ, колебанія эти также существуютъ, и присутствіе ихъ ясно обнаруживается современными чувствительными сейсмографами.

Вмѣсто того, чтобы разсматривать распространеніе сейсмическихъ *волнъ*, гораздо цѣлесообразнѣе и нагляднѣе, подобно тому, какъ это принято и въ оптикѣ, разсматривать распространеніе *сейсмическихъ лучей*, понимая подъ сейсмическими лучами систему нормалей къ даннымъ поверхностямъ волнъ.

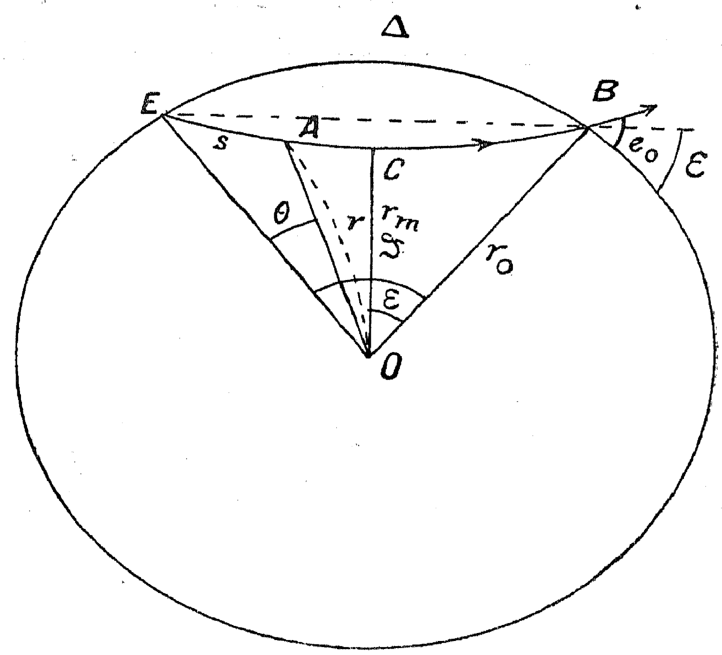
Такимъ образомъ, въ каждой данной точкѣ сейсмическій лучъ будетъ перпендикуляренъ къ соотвѣтствующему элементу поверхности сейсмической волны.

Подобно тому, какъ сейсмическія волны дѣлятся на два класса, на продольныя и поперечныя, такъ и сейсмическіе лучи могутъ быть продольные и поперечные. Въ первомъ случаѣ направленіе смѣщенія точки совпадаетъ съ направленіемъ самого луча.

Мы разсмотримъ здѣсь только случай продольныхъ сейсмическихъ лучей, такъ какъ тѣ-же выводы и разсужденія могутъ быть непосредственно распространены и на случай лучей поперечныхъ.

Для простоты разсужденій мы возьмемъ пока мѣсто наблюденія B (см. черт. 19) въ достаточно большомъ разстояніи Δ отъ эпицентра E, чтобы можно было считать очагъ землетрясенія, который никогда не лежитъ очень глубоко, практически совпадающимъ съ эпицентромъ.

Черт. 19.



Итакъ, изъ точки E исходятъ внутрь земли сейсмическіе лучи.

Спрашивается, по какому пути пройдетъ сейсмическій лучъ изъ E въ B?

Если-бы земля была вполнѣ однородна, то сейсмическій лучъ пришелъ-бы въ B по кратчайшему пути, т.-е. по прямой EB. Но, такъ какъ упругія свойства и плотность различныхъ слоевъ земли, которыя опредѣляютъ скорость распространенія луча, зависятъ отъ глубины слоя, то сейсмическій лучъ, проникая въ болѣе глубокіе слои земли, не сохранитъ своего прямолинейнаго направленія, а, переходя изъ E въ B, опишетъ нѣкоторую криволинейную траекторію ECB.

Первая наша задача и заключается въ томъ, чтобы найти траекторію сейсмическаго луча.

Задача эта рѣшается на основаніи одного общаго принципа природы, а именно *принципа брахистохронности* или принципа **Ферма**, по которому *всякій* лучъ, долженствующій перейти изъ какой-нибудь точки E въ точку B, выбираетъ себѣ тотъ именно путь, по которому онъ *скорѣе всего* достигаетъ намѣченной цѣли. Существуетъ такимъ образомъ въ природѣ принципъ экономіи во времени, т.-е. явленія происходятъ всегда въ томъ направленіи, гдѣ требуется наименьшая затрата времени для достиженія опредѣленнаго эффекта.

Изъ принципа брахистохронности можно вывести чрезвычайно просто различные законы *геометрической* оптики.

Во-первыхъ, прямолинейное распространеніе свѣта въ однородной и изотропной срединѣ, для которой скорость распространенія луча вездѣ одна

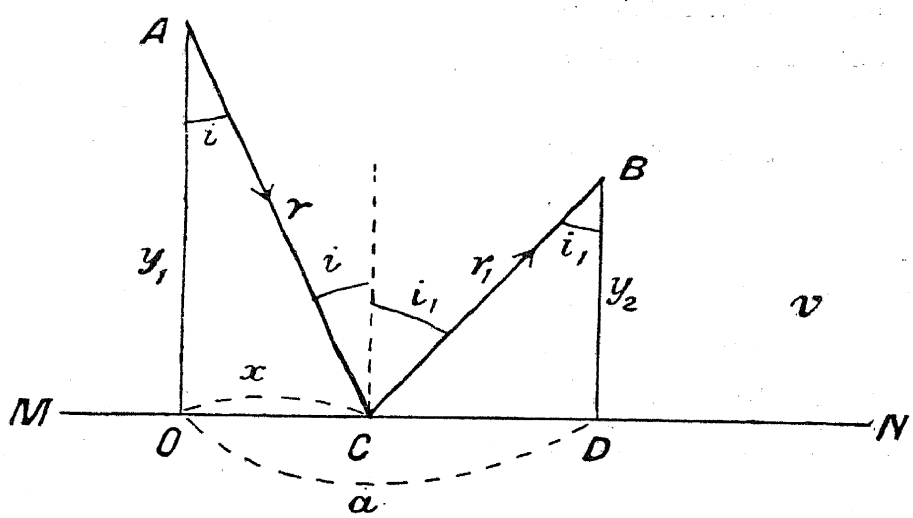
и та-же, вытекаетъ прямо изъ того, что прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками.

Выведемъ теперь изъ принципа брахистохронности законы отраженія и преломленія свѣта.

Пусть на черт. 20 MN представляетъ собою плоскость, отъ которой происходитъ отраженіе луча.

Лучъ выходитъ изъ A и приходитъ послѣ отраженія у MN въ B, двигаясь все время съ одной и той-же скоростью v.

Черт. 20.



Требуется найти тотъ путь, по которому лучъ пойдетъ, иначе говоря, найти ту точку C, въ которой должно произойти отраженіе.

Пусть координаты точки A будутъ o и y_1, точки B a и y_2, а точки C o и x.

Тогда

$$AC = r = \sqrt{x^2 + y_1^2}$$

$$CB = r_1 = \sqrt{(a - x)^2 + y_2^2}.$$

Время τ, потребное лучу пройти отъ A до B, при условіи отраженія отъ поверхности MN, представится такимъ образомъ:

$$\tau = \frac{1}{v}\left[\sqrt{x^2 + y_1^2} + \sqrt{(a - x)^2 + y_2^2}\right].$$

Принципъ брахистохронности требуетъ, чтобы τ было minimum, иначе говоря, чтобы

$$\frac{d\tau}{dx} = 0.$$

Изъ этого условія опредѣлится соотвѣтствующая величина x.

Слѣдовательно,

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y_1^2}} - \frac{(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+y_2^2}} = 0$$

или

$$\frac{x}{r} = \frac{a-x}{r_1}.$$

Но $\frac{x}{r} = \sin i$, т.-е. синусу угла паденія, а $\frac{a-x}{r_1} = \sin i_1$, т.-е. синусу угла отраженія, слѣдовательно

$$\sin i = \sin i_1$$

или

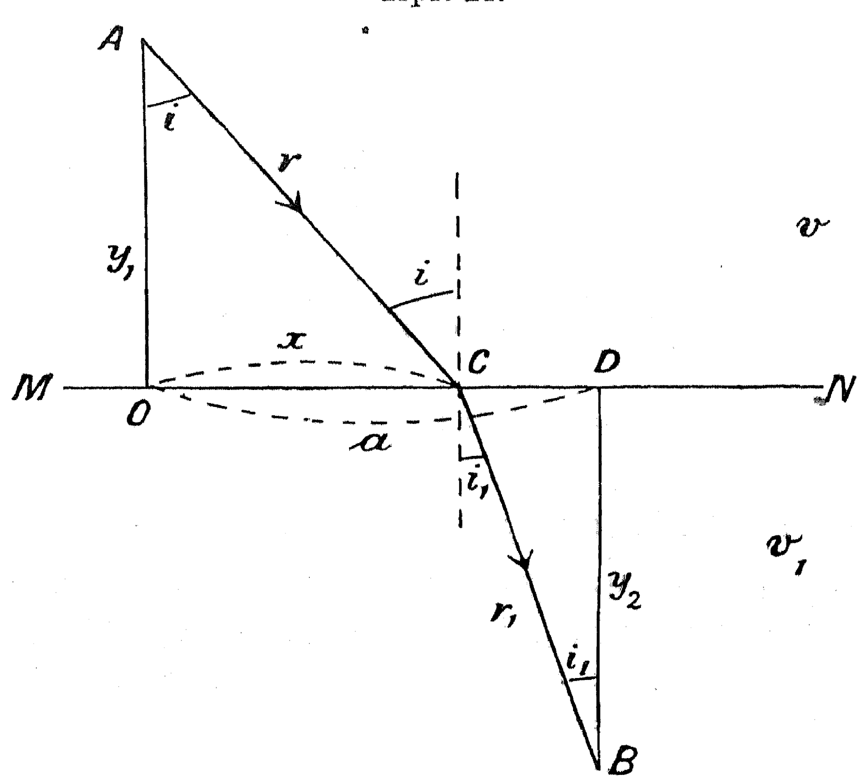
$$i = i_1.$$

Мы получаемъ, такимъ образомъ, извѣстный законъ отраженія.

Разсмотримъ теперь явленіе преломленія.

Пусть теперь MN (см. черт. 21) представляетъ собою плоскость, раз-

Черт. 21.



граничивающую двѣ средины, для которыхъ скорости распространенія луча пусть будутъ соотвѣтственно равны v и v_1.

Точки A и B заданы. Координаты ихъ обозначены на чертежѣ.

Лучъ выходитъ изъ A и, послѣ преломленія, приходитъ въ точку B. Найдемъ опять положеніе точки C, около которой происходитъ явленіе преломленія.

Время, потребное лучу пройти отъ A до B, будетъ

$$\tau = \frac{\sqrt{x^2 + y_1^2}}{v} + \frac{\sqrt{(a - x)^2 + y_2^2}}{v_1}.$$

Принципъ брахистохронности требуетъ опять, чтобы $\frac{d\tau}{dx} = 0$, или

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_1^2}} - \frac{1}{v_1} \cdot \frac{a - x}{\sqrt{(a - x)^2 + y_2^2}} = 0,$$

или

$$\sin i = \frac{v}{v_1} \sin i_1 \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

Мы получили, такимъ образомъ, извѣстный законъ преломленія, причемъ относительный показатель преломленія, какъ мы видимъ, есть ничто иное, какъ отношеніе скоростей распространенія даннаго луча въ этихъ двухъ срединахъ.

Тотъ-же принципъ брахистохронности мы можемъ непосредственно примѣнить и къ изученію распространенія сейсмическихъ лучей внутри земного шара.

Скорость распространенія сейсмическаго луча зависитъ отъ упругихъ свойствъ и плотности въ соотвѣтствующихъ слояхъ земли.

Для продольныхъ волнъ мы имѣемъ

$$v = V_1 = \sqrt{\frac{1 - \sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \cdot \frac{E}{\rho}},$$

а для поперечныхъ

$$v = V_2 = \sqrt{\frac{1}{2(1 + \sigma)} \cdot \frac{E}{\rho}}$$

(см. формулы (37) и (38) предыдущей главы).

σ мы можемъ, съ достаточнымъ приближеніемъ, положить равнымъ $\frac{1}{4}$.

Наблюденія показываютъ, что, какъ V_1, такъ и V_2 *возрастаютъ* (по крайней мѣрѣ для верхнихъ слоевъ земли) по мѣрѣ углубленія внутрь земли, изъ чего слѣдуетъ заключить, что модуль продольной упругости E возрастаетъ быстрѣе, чѣмъ плотность ρ, такъ какъ величина σ подвержена вообще незначительнымъ измѣненіямъ.

Изъ этого слѣдуетъ, что траекторія сейсмическаго луча, вышедшаго изъ E и пришедшаго въ B (см. черт. 19), обращена своею выпуклостью къ центру земли.

Этого требуетъ принципъ брахистохронности.

Полагая, какъ и раньше, что физическія свойства различныхъ слоевъ земли зависятъ только отъ разстоянія r соотвѣтствующаго слоя до центра земли, мы можемъ принять, что скорость луча есть тоже только функція отъ r.

Для удобства дальнѣйшихъ выкладокъ, введемъ, вмѣсто скорости луча v, величину обратную этой скорости n.

$$n = \frac{1}{v} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Подставляя это выраженіе въ формулу (1), получимъ

$$n \sin i = n_1 \sin i_1. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

По аналогіи съ оптикой, можно назвать n показателемъ преломленія соотвѣтствующаго слоя земного шара.

n есть также нѣкоторая функція отъ r.

$$n = F(r) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Предполагая эту функцію извѣстной, займемся опредѣленіемъ траекторіи сейсмическаго луча внутри земли.

Возьмемъ, для опредѣленія положенія какой-нибудь перемѣнной точки A траекторіи ECB (см. черт. 19), полярныя координаты r и θ.

Разстояніе (въ километрахъ) между эпицентромъ E и мѣстомъ наблюденія B по дугѣ большого круга обозначимъ черезъ Δ, а соотвѣтствующій уголъ при центрѣ EOB черезъ ϑ.

Тогда

$$\vartheta = \frac{\Delta}{r_0}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

гдѣ r_0 есть радіусъ земли, причемъ уголъ ϑ выраженъ здѣсь въ абсолютной мѣрѣ, т.-е. въ радіантахъ.

Для *данной* траекторіи ECB r есть нѣкоторая функція отъ θ.

Положимъ

$$r = \Phi(\theta) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Задача сводится къ тому, чтобы, зная n, какъ функцію отъ r, найти выраженіе функціи $\Phi(\theta)$.

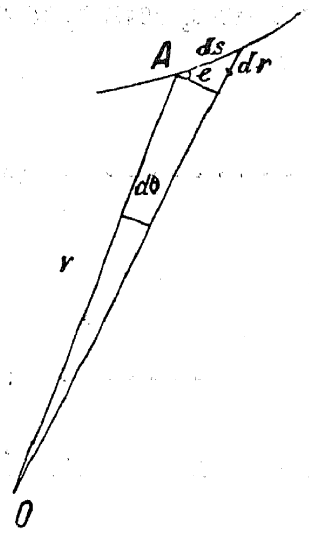
Обозначивъ длину дуги EA черезъ s, легко видѣть (см. черт. 22), что

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + (r d\theta)^2}$$

или

$$ds = d\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Черт. 22.



Время $d\tau$, потребное лучу, чтобы пройти путь ds, будетъ

$$d\tau = \frac{ds}{v} = n\, ds = F(r)\, ds$$

или

$$d\tau = F(r) \cdot \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \cdot d\theta.$$

Время, потребное лучу, чтобы пройти все разстояніе отъ E до B, будетъ

$$\tau = \int_0^{\vartheta} F(r) \cdot \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \cdot d\theta \ldots\ldots\ldots (8)$$

Принципъ брахистохронности требуетъ, чтобы τ было minimum. Задача, слѣдовательно, сводится къ тому, чтобы, при *заданной* функціи $F(r)$, найти для r, въ его зависимости отъ θ, такую функцію $\Phi(\theta)$, при которой этотъ опредѣленный интегралъ былъ-бы minimum.

Рѣшеніемъ подобныхъ вопросовъ занимается тотъ отдѣлъ высшаго анализа, который именуется варіаціоннымъ исчисленіемъ.

Рѣшеніе этой задачи сводится къ нѣкоторому дифференціальному уравненію, которое представляетъ собою ничто иное, какъ дифференціальное уравненіе искомой траекторіи сейсмическаго луча.

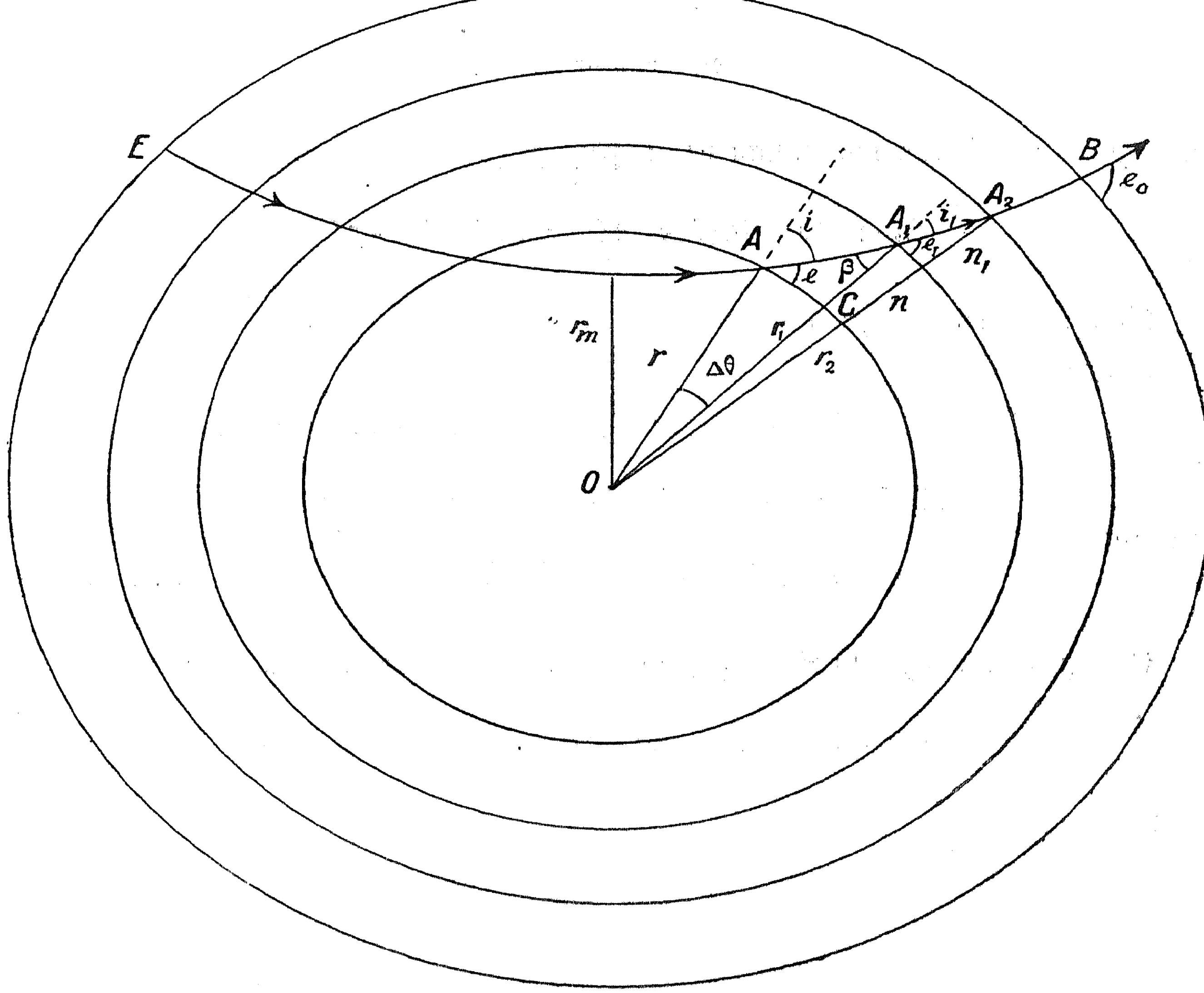
Мы, однако, не будемъ итти этимъ общимъ путемъ, а выведемъ дифференціальное уравненіе луча гораздо болѣе простымъ пріемомъ.

Для этой цѣли раздѣлимъ земной шаръ на рядъ весьма тонкихъ концентрическихъ слоевъ съ радіусами $OA = r$, $OA_1 = r_1$, $OA_2 = r_2$ и т. д. (см. черт. 23).

Пусть средняя величина показателя преломленія въ слоѣ, заключенномъ между r и r_1 будетъ n, а въ слоѣ, заключенномъ между r_1 и r_2, n_1.

Мы возьмемъ эти слои настолько близкими другъ къ другу, чтобы часть траекторіи луча, напр. AA_1, заключенной между двумя смежными шаровыми поверхностями, можно было-бы считать за прямую линію; потомъ уже мы перейдемъ къ предѣлу.

Черт. 23.



У поверхности радіуса r_1, у точки A_1, уголъ паденія будетъ β, а уголъ преломленія i_1; слѣдовательно, на основаніи формулы (3), будемъ имѣть

$$n_1 \sin i_1 = n \sin \beta \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Уголъ, составляемый направленіемъ луча съ поверхностью соотвѣтствующаго слоя обозначимъ черезъ e_1.

Тогда

$$e_1 = 90 - i_1.$$

Для слоя радіуса $OA = r$ соотвѣтствующія величины пусть будутъ i и e (см. черт. 23).

Обозначивъ далѣе уголъ при центрѣ O между направленіями OA и OA_1 черезъ $\Delta\theta$, изъ треугольника OAA_1 будемъ имѣть

$$i = \beta + \Delta\theta.$$

Положивши еще

$$i_1 = i + \Delta i$$

и

$$n_1 = n + \Delta n,$$

и подставляя всѣ эти величины въ формулу (9), получимъ

$$(n + \Delta n) \sin (i + \Delta i) = n \sin (i - \Delta \theta).$$

Переходимъ теперь въ предѣлу.

Тогда

$$(n + dn)(\sin i + di \,.\, \cos i) = n \sin i - n \,.\, d\theta \,.\, \cos i$$

или

$$\sin i \,.\, dn + n \cos i \,.\, di + n \cos i \,.\, d\theta = 0,$$

или еще

$$d(n \sin i) + n \cos i \,.\, d\theta = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Съ другой стороны изъ треугольника AA_1C слѣдуетъ, что

$$r_1 - r = dr = r d\theta \,.\, \mathrm{tg}\, e = r d\theta \,.\, \mathrm{cotg}\, i.$$

Слѣдовательно,

$$d\theta \,.\, \cos i = \frac{dr}{r} \cdot \mathrm{tg}\, i \,.\, \cos i = \frac{dr}{r} \cdot \sin i.$$

Подставляя эту величину въ формулу (10), будемъ имѣть

$$r \,.\, d(n \sin i) + n \sin i \,.\, dr = 0$$

или

$$d(nr \sin i) = 0.$$

Замѣняя въ этомъ выраженіи $\sin i$ черезъ $\cos e$, получимъ слѣдующее окончательное и чрезвычайно простое соотношеніе:

$$d(nr \cos e) = 0$$

или

$$nr \cos e = \mathrm{Const.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Итакъ, вдоль всей траекторіи сейсмическаго луча произведеніе этихъ трехъ величинъ должно оставаться постояннымъ.

Величина этой постоянной опредѣляется изъ условій, имѣющихъ мѣсто у поверхности земли.

Значеніе этихъ трехъ величинъ r, n и e у земной поверхности отмѣтимъ индексомъ 0.

Тогда

r_0 будетъ радіусъ земли,

n_0 — величина обратная скорости сейсмическаго луча въ самыхъ верхнихъ слояхъ земли (v_0),

а e_0 — уголъ выхода сейсмической радіаціи, иначе говоря, уголъ, составляемый выступающимъ изъ нѣдръ земли сейсмическимъ лучемъ съ плоскостью горизонта въ мѣстѣ наблюденій.

Этотъ уголъ имѣетъ въ разсматриваемой теоріи чрезвычайно важное значеніе. Въ нѣмецкой терминологіи онъ называется «Emergenzwinkel».

Такимъ образомъ, мы будемъ имѣть:

$$nr\cos e = n_0 r_0 \cos e_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Изъ формулы (12) можно сейчасъ-же получить дифференціальное уравненіе траекторіи сейсмическаго луча.

Изъ чертежа (22) видно, что

$$ds\cos e = rd\theta$$

или, на основаніи формулы (7),

$$\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \cdot \cos e = r.$$

Отсюда находимъ

$$\cos^2 e \,.\, r^2 + \cos^2 e \,.\, \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = r^2$$

или

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\cos e}{\sqrt{r^2 - r^2\cos^2 e}}.$$

Замѣняя въ этой формулѣ $\cos e$ соотвѣтственной величиной изъ формулы (12), будемъ имѣть

$$d\theta = \frac{\frac{n_0 r_0 \cos e_0}{nr}\,dr}{\sqrt{r^2 - r^2\frac{n_0^2 r_0^2 \cos^2 e_0}{n^2 r^2}}} = \frac{n_0 r_0 \cos e_0\, dr}{r\sqrt{n^2 r^2 - n_0^2 r_0^2 \cos^2 e_0}} \ldots\ldots (13)$$

Будемъ теперь выражать r и n въ доляхъ соотвѣтствующихъ величинъ у поверхности земли и соотвѣтственно этому положимъ

$$\rho = \frac{r}{r_0}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

$$\nu = \frac{n}{n_0} = \frac{r_0}{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

ν есть нѣкоторая функція отъ ρ, зависящая отъ физическихъ свойствъ различныхъ слоевъ земли

$$\nu = f(\rho), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

гдѣ, съ увеличеніемъ ρ, ν вообще возрастаетъ, т.-е. $\frac{d\nu}{d\rho} > 0$. Однако, здѣсь не исключена возможность, что на нѣкоторыхъ значительныхъ глубинахъ $f(\rho)$ можетъ быть и функціей убывающей.

Введя эти обозначенія и полагая

$$\cos e_0 = \alpha, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

уравненія (12) и (13) представятся въ слѣдующемъ видѣ:

$$\nu\rho \cos e = \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

и

$$d\theta = \frac{\alpha d\rho}{\rho\sqrt{\nu^2\rho^2 - \alpha^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

Изъ этого уравненія можно, когда ν, какъ функція отъ ρ, извѣстно, найти зависимость между θ и ρ, иначе говоря, опредѣлить уравненіе траекторіи сейсмическаго луча.

Произведеніе $\nu\rho$ есть также нѣкоторая функція отъ ρ. Обозначимъ ее черезъ $\varphi(\rho)$:

$$\nu\rho = \varphi(\rho) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

Функція $\varphi(\rho)$ называется критической функціей, потому что она ближе всего опредѣляетъ форму траекторіи сейсмическаго луча.

Итакъ,

$$d\theta = \frac{\alpha d\rho}{\rho\sqrt{\varphi^2(\rho) - \alpha^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

Сейсмическій лучъ, вышедшій изъ E и идущій въ B (см. черт. 19), проникаетъ все дальше и дальше внутрь земли и достигаетъ, наконецъ,

наибольшей глубины, соотвѣтствующей минимальному значенію $\rho = \rho_m$, послѣ чего вторая половина пути луча будетъ вполнѣ симметрична по отношенію къ первой.

Легко видѣть, что, при $\rho = \rho_m$, уголъ $e = 0$; слѣдовательно, изъ формулъ (18) и (20) будемъ имѣть

$$\nu_m \rho_m = \varphi(\rho_m) = \alpha. \qquad (22)$$

Обозначивъ уголъ при центрѣ, соотвѣтствующій эпицентральному разстоянію Δ, черезъ ϑ:

$$\vartheta = \frac{\Delta}{r_0}, \qquad (23)$$

и, принимая во вниманіе, что у поверхности земли $\nu = 1$ и $\rho = 1$, получимъ, интегрируя выраженіе (21),

$$\Delta = 2r_0\,\alpha \int_{\rho_m}^{1} \frac{d\rho}{\rho\,\sqrt{\varphi^2(\rho) - \alpha^2}} = \Phi_1(\alpha) \qquad (24)$$

Итакъ, заданной величинѣ α или заданному углу выхода сейсмической радіаціи e_0 соотвѣтствуетъ *вполнѣ опредѣленное* эпицентральное разстояніе Δ. Можно, такимъ образомъ, разсматривать количество α, какъ нѣкоторый перемѣнный параметръ.

При нижнемъ предѣлѣ предыдущаго опредѣленнаго интеграла, подъинтегральная функція, на основаніи соотношенія (22), обращается въ ∞, но самъ опредѣленный интегралъ остается конечнымъ, что слѣдуетъ прямо изъ существа дѣла и въ справедливости чего мы убѣдимся дальше на частномъ примѣрѣ.

Найдемъ теперь длину L траекторіи сейсмическаго луча.

$$L = \int ds,$$

$$ds = \frac{r d\theta}{\cos e}$$

или, на основаніи формулъ (18) и (14),

$$ds = \frac{\nu\rho}{\alpha} \cdot r d\theta = \frac{r_0}{\alpha} \cdot \nu\rho^2\, d\theta. \qquad (25)$$

Замѣняя въ этомъ выраженіи $d\theta$ соотвѣтствующей величиной изъ формулы (21) и интегрируя полученное уравненіе между тѣми-же предѣлами,

получимъ

$$L = 2r_0 \int\limits_{\rho_m}^{1} \frac{\nu\rho d\rho}{\sqrt{\varphi^2(\rho) - \alpha^2}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (26)$$

Время T, потребное лучу пройти изъ E въ B, опредѣлится легко по формулѣ

$$T = \int \frac{ds}{v} = \int nds = n_0 \int \nu ds$$

или, на основаніи формулъ (25) и (21),

$$T = 2n_0 r_0 \int\limits_{\rho_m}^{1} \frac{\nu^2 \rho d\rho}{\sqrt{\varphi^2(\rho) - \alpha^2}} = \Phi_2(\alpha) \dots\dots\dots\dots\dots (27)$$

Итакъ, мы видимъ, что и T можно также разсматривать, какъ функцію того-же параметра α.

Если-бы

$$\nu = f(\rho)$$

было извѣстно, то мы могли-бы прямо вычислить время, потребное лучу для того, чтобы перейти изъ E въ B.

Мы уже знаемъ напередъ, что по данной траекторіи, опредѣляемой дифференціальнымъ уравненіемъ (21), T будетъ minimum.

Опредѣлимъ теперь еще радіусъ кривизны траекторіи сейсмическаго луча въ какой-нибудь произвольной ея точкѣ A (см. черт. 23). Этотъ радіусъ кривизны мы обозначимъ черезъ R. Тогда $\frac{1}{R}$ будетъ то, что называется кривизной соотвѣтствующей кривой въ данной точкѣ.

Радіусъ кривизны опредѣляется, какъ извѣстно, слѣдующимъ образомъ.

Берутся двѣ безконечно-близкія точки на кривой въ разстояніи ds другъ отъ друга и опредѣляется уголъ $d\omega$ между соотвѣтствующими касательными.

Тогда

$$\frac{1}{R} = \frac{d\omega}{ds} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (28)$$

R есть радіусъ соотвѣтствующаго соприкасающагося или оскулирующаго круга.

Изъ чертежа 23 мы имѣемъ

$$n \sin\beta = n_1 \sin i_1. \qquad \text{(см. формулу (9))}$$

Такъ какъ

$$v_1 < v,$$

то

$$n_1 > n,$$

и, слѣдовательно,

$$\beta > i_1.$$

Разницу между β и i_1 мы можемъ, въ предѣлѣ, приравнять разницѣ угловъ между двумя безконечно-близкими касательными, такъ какъ β и i_1 представляютъ собою углы, составляемые двумя прямолинейными отрѣзками траекторіи AA_1 и A_1A_2 съ той-же прямой OA_1.

Слѣдовательно,

$$\beta = i_1 + d\omega.$$

Подставляя эту величину въ предыдущее выраженіе, будемъ имѣть

$$\sin(i_1 + d\omega) = \frac{n_1}{n}\sin i_1 = \frac{n + dn}{n}\sin i_1$$

или

$$\cos i_1\, d\omega = \frac{dn}{n}\sin i_1,$$

или-же

$$d\omega = \frac{1}{n}\cdot \operatorname{tg} i_1\, dn.$$

Такъ какъ углы i_1 и i отличаются другъ отъ друга на безконечно малую величину и уголъ $i = 90^\circ - e$, то мы будемъ имѣть

$$d\omega = \frac{dn}{n}\cdot \operatorname{cotg} e$$

или

$$d\omega = \frac{1}{n}\operatorname{cotg} e\cdot\frac{dn}{dr}\cdot dr.$$

Но, такъ какъ

$$n = \nu n_0$$

и

$$r = \rho r_0,$$

то мы получимъ окончательно

$$d\omega = \frac{1}{\nu}\cdot \operatorname{cotg} e\cdot\frac{d\nu}{d\rho}\,d\rho \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

Съ другой стороны, изъ треугольника AA_1C

$$dr = r_0\, d\rho = ds\,.\sin e$$

или

$$ds = \frac{r_0\, d\rho}{\sin e} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (30)$$

Подставляя эти величины въ формулу (28), получимъ окончательно

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_0\, \nu} \cdot \frac{d\nu}{d\rho} \cdot \cos e \dots\dots\dots\dots\dots\dots (31)$$

Эта формула показываетъ, что, если физическія свойства слоевъ земли не измѣняются съ глубиной, то $\frac{d\nu}{d\rho} = 0$ и $R = \infty$. Въ этомъ случаѣ траекторія сейсмическаго луча будетъ прямая линія.

Въ точкѣ наибольшей глубины траекторіи, гдѣ $\rho = \rho_m$, $e = 0$ и

$$\frac{1}{R_m} = \frac{1}{r_0\, \nu_m} \cdot \left(\frac{d\nu}{d\rho}\right)_{\rho = \rho_m}.$$

Послѣ вывода всѣхъ этихъ основныхъ формулъ для сейсмическихъ лучей, займемся ихъ примѣненіемъ.

---

§ 2.

Годографъ.

Въ предыдущемъ § мы имѣли

$$\Delta = \Phi_1(\alpha) \dots\dots\dots\dots \text{(формула (24))}$$

и

$$T = \Phi_2(\alpha), \dots\dots\dots\dots \text{(формула (27))}$$

гдѣ α есть нѣкоторый перемѣнный параметръ, представляющій собою cos угла выхода сейсмической радіаціи у поверхности земли.

Исключивъ изъ двухъ предыдущихъ уравненій α, мы увидимъ, что T есть нѣкоторая функція отъ Δ:

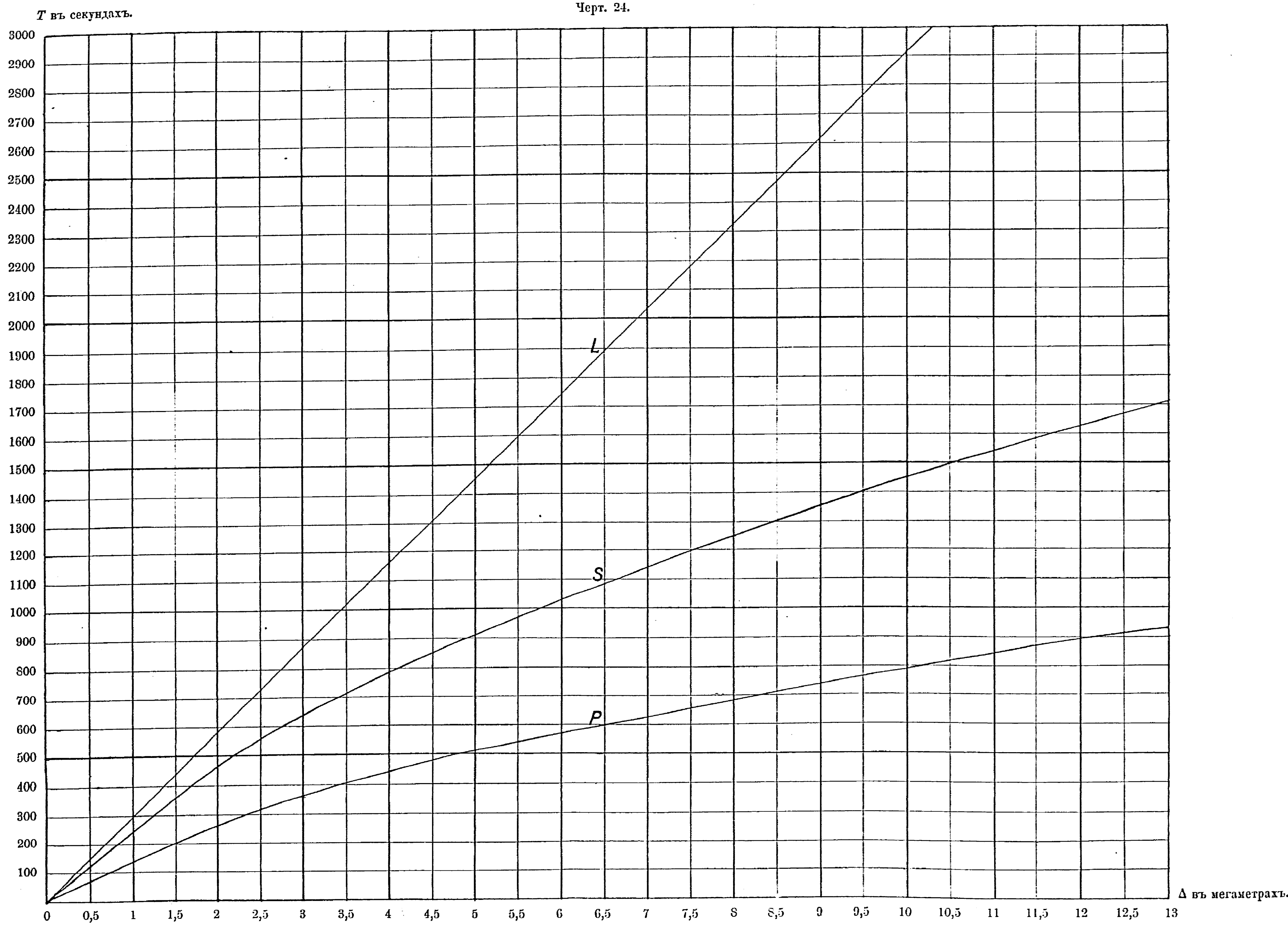
$$T = \Psi(\Delta) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (32)$$

Отличая эти величины для продольныхъ и поперечныхъ сейсмическихъ волнъ соотвѣтственно индексами 1 и 2, будемъ имѣть

и

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \Psi_1(\Delta) \\ T_2 &= \Psi_2(\Delta) \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (33)$$

Черт. 24.


T въ секундахъ.
3000
2900
2800
2700
2600
2500
2400
2300
2200
2100
2000
1900
1800
1700
1600
1500
1400
1300
1200
1100
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
L
S
P
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
4,5
5
5,5
6
6,5
7
7,5
8
8,5
9
9,5
10
10,5
11
11,5
12
12,5
13
Δ въ мегаметрахъ.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что съ увеличенiемъ разстоянiя Δ до эпицентра, считаемое всегда *по поверхности земли, по дугѣ большого круга*, увеличивается и время пробѣга продольныхъ и поперечныхъ волнъ.

Такъ какъ продольныя волны движутся во всѣхъ слояхъ быстрѣе поперечныхъ, то онѣ раньше всего достигнутъ мѣста наблюденiя и вызовутъ первое отклоненiе сейсмографа. Соотвѣтствующiй моментъ называется моментомъ начала первой предварительной фазы землетрясенiя.

Это начало отмѣчается символомъ P (undae primae).

По истеченiи нѣкотораго промежутка времени придутъ поперечныя волны. Это будетъ начало второй предварительной фазы землетрясенiя. Соотвѣтствующiй символъ S (undae secundae).

Чѣмъ дальше эпицентръ, т.-е., чѣмъ больше Δ, тѣмъ больше будетъ и разность

$$T_2 - T_1 = \Psi_2(\Delta) - \Psi_1(\Delta) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

Если мы за абсциссы возьмемъ Δ, а за ординаты какое-нибудь изъ этихъ двухъ T, то получимъ такъ называемую кривую временъ пробѣга сейсмическихъ волнъ или *годографъ*, въ нѣмецкой терминологiи Laufzeitcurve.

Видъ годографовъ зависитъ всецѣло отъ закона измѣненiя скоростей распространенiя продольныхъ и поперечныхъ волнъ V_1 и V_2 съ глубиной, или отъ вида функцiи

$$v = f(\rho) \ldots\ldots\ldots \text{(см. формулу (16))}$$

Но кривую годографа можно получить прямо изъ наблюденiй.

Для этого надо только знать моментъ начала землетрясенiя въ эпицентрѣ и моменты прихода продольныхъ и поперечныхъ волнъ, идущихъ черезъ толщу земной коры, на различныя сейсмическiя станцiи, находящiяся въ различныхъ удаленiяхъ Δ отъ эпицентра.

Кривыя эти были получены Wiechert'омъ и Zöppritz'омъ изъ цѣлаго ряда наблюденiй надъ многими землетрясенiями и онѣ имѣютъ тотъ характеръ, который показанъ на прилагаемомъ чертежѣ (24).

По оси абсциссъ отложены эпицентральныя разстоянiя въ мегаметрахъ, т.-е, въ 1000 километрахъ, а по оси ординатъ соотвѣтствующiя времена пробѣга T въ секундахъ. Кривая P относится къ продольнымъ, а кривая S къ поперечнымъ волнамъ.

Знанiе точной формы годографа имѣетъ для практической сейсмометрiи громадное значенiе, и всѣ усилiя должны быть направлены къ тому, чтобы, по возможности, усовершенствовать годографы, принимая во вниманiе и особенности геологическаго строенiя верхнихъ слоевъ земли.

Съ извѣстнымъ приближеніемъ можно всегда представить годографъ $\Psi(\Delta)$ функціей слѣдующаго вида:

$$T = \Psi(\Delta) = A\Delta + B\Delta^2 + C\Delta^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

Эта формула, при малыхъ значеніяхъ Δ, требуетъ все-таки нѣкоторой поправки на глубину залеганія очага землетрясенія, къ каковому вопросу мы вернемся еще въ одномъ изъ послѣдующихъ параграфовъ этой главы; но, если очагъ лежитъ не глубоко, то мы можемъ, съ извѣстнымъ приближеніемъ, практически считать его совпадающимъ съ эпицентромъ и пользоваться формулой (35).

Коеффиціенты этого ряда опредѣляются изъ наблюденій, причемъ, для ихъ опредѣленія, не надо вовсе знать вѣрнаго момента начала землетрясенія въ эпицентрѣ, такъ какъ его можно всегда исключить, взявъ *разность* времени прихода сейсмическихъ волнъ на сейсмическія станціи, находящіяся въ разныхъ, но извѣстныхъ, разстояніяхъ Δ и Δ' отъ эпицентра.

$$T - T' = A(\Delta - \Delta') + B(\Delta^2 - \Delta'^2) + C(\Delta^3 - \Delta'^3) + \ldots$$

Имѣя большое число наблюденій, можно опредѣлить коеффиціенты этого ряда по способу наименьшихъ квадратовъ.

Имѣя годографъ отдѣльно для P и S, можно составить годографъ и для $T_2 - T_1$ или $S - P$, соотвѣтствующій всей продолжительности первой предварительной фазы землетрясенія.

Если разность $T_2 - T_1$, какъ функція отъ Δ, извѣстна, то можно, получивъ съ сейсмограммы разность между моментами S и P, которые обыкновенно характеризуются рѣзкими уклоненіями кривой, прямо получить разстояніе Δ до эпицентра въ километрахъ.

Zöppritz и Geiger дали величины T_1 и T_2, въ зависимости отъ Δ, черезъ каждые 500 километровъ до $\Delta = 13000$ километровъ. Числа эти приведены въ слѣдующей таблицѣ I.

На основаніи этого цифрового матеріала, нѣмецкій сейсмологъ Zeissig составилъ очень удобную для пользованія таблицу величинъ $T_2 - T_1$ въ зависимости отъ Δ, причемъ онъ примѣнилъ особый пріемъ сглаживанія шероховатостей соотвѣтствующей кривой и интерполировалъ данныя съ точностью до 10 километровъ. Эта таблица, издавная нашей Академіей Наукъ, приведена ниже (таблица II).

Она расположена такъ, что, по аргументу $T_2 - T_1$ (въ минутахъ и секундахъ), сейчасъ-же опредѣляется соотвѣтствующее эпицентральное разстояніе Δ въ километрахъ.

Таблица I.

Δ	T_1	T_2
0 кил.	0 сек.	0 сек.
500	69	124
1000	136	244
1500	199	356
2000	257	460
2500	310	555
3000	358	641
3500	402	719
4000	442	789
4500	478	854
5000	512	913
5500	542	971
6000	572	1028
6500	601	1084
7000	631	1140
7500	660	1194
8000	688	1249
8500	716	1301
9000	743	1354
9500	769	1404
10000	795	1453
10500	820	1500
11000	844	1545
11500	867	1588
12000	888	1629
12500	909	1668
13000	929	1705

Таблица II.

Таблица разности временъ пробѣга ($T_2 - T_1$) волнъ первой и второй предварительной фазы въ зависимости отъ эпицентральнаго разстоянія Δ.

Δ		1000 клм.	2000 клм.	3000 клм.	4000 клм.	5000 клм.	6000 клм.	7000 клм.	8000 клм.	9000 клм.	10000 клм.	11000 клм.	12000 клм.
клм.	м. с.	м. с.	м. с.	м. с.	м. с.	м. с.	м. с.	м. с.	м. с.	м. с.	м. с.	м. с.	м. с.
0	**0** 0	**1** 48	**3** 23	**4** 43	**5** 47	**6** 42	**7** 36	**8** 29	**9** 20	**10** 10	**10** 58	**11** 41	**12** 21
10	1	49	24	44	48	43	37	30	20	11	59	41	21
20	2	50	25	44	48	43	37	30	21	12	59	42	22
30	3	51	26	45	49	44	38	31	21	12	59	42	22
40	4	52	28	46	49	44	38	31	22	13	**11** 0	43	22
50	6	53	28	47	50	45	39	32	22	13	0	43	23
60	7	54	28	47	51	45	39	32	23	14	1	43	23
70	8	55	29	48	51	46	40	33	23	14	1	44	24
80	9	56	30	49	52	47	40	33	24	15	2	44	24
90	10	57	31	50	52	47	41	34	24	15	2	45	24
100	11	58	32	50	53	48	41	34	25	16	2	45	25
10	12	59	33	51	53	48	42	35	25	16	3	45	25
20	13	**2** 0	34	52	54	49	43	35	26	17	3	46	25
30	15	1	35	52	55	49	43	36	26	17	4	46	26
40	16	2	35	53	55	50	44	36	27	18	4	47	26
50	17	3	36	54	56	50	44	37	27	18	5	47	26
60	18	4	37	54	56	51	45	37	28	19	5	47	27
70	19	5	38	55	57	51	45	38	28	19	6	48	27
80	20	6	39	56	57	52	46	38	29	20	6	48	28
90	21	7	39	57	58	53	46	39	29	20	7	49	28
200	22	8	40	58	58	53	47	39	30	20	7	49	28
10	23	9	41	58	59	54	47	40	30	21	7	50	29
20	24	10	42	58	**6** 0	54	48	40	31	21	8	50	29
30	26	11	43	59	0	55	48	41	31	22	8	50	30
40	27	12	44	**5** 0	1	55	49	41	32	23	9	51	30
50	28	13	44	1	1	56	50	42	32	23	9	51	30
60	29	14	45	1	2	56	50	42	33	23	10	51	31
70	30	15	46	2	2	57	51	43	33	23	10	52	31
80	31	16	47	3	3	57	51	43	34	24	11	52	31
90	32	17	48	4	4	58	52	44	34	25	11	53	32
300	33	18	49	5	4	58	52	44	35	25	11	53	32
10	34	19	49	5	5	59	53	45	35	26	12	53	32
20	36	20	50	5	5	**7** 0	53	45	36	26	12	54	33
30	37	21	51	6	6	0	54	46	36	27	13	54	33
40	38	22	52	7	6	1	54	46	37	27	13	55	34
50	39	23	53	7	7	1	55	47	37	28	14	55	34
60	40	24	54	8	7	2	55	47	38	28	14	55	34
70	41	25	55	9	8	2	56	48	38	29	15	56	35
80	42	25	55	9	9	3	57	48	39	29	15	56	35
90	43	26	56	10	10	3	57	49	40	30	15	57	35
400	44	27	57	10	10	4	58	50	40	30	16	57	36
10	45	28	58	11	10	4	58	50	40	31	16	57	36
20	46	29	59	12	11	5	59	51	41	31	17	58	36
30	47	30	59	13	11	5	59	51	42	32	17	58	37
40	49	31	**4** 0	13	12	6	**8** 0	52	42	32	18	59	37
50	50	32	1	14	12	7	0	52	43	33	18	59	37
60	51	33	2	14	13	7	1	53	43	33	18	**12** 0	38
70	52	34	3	15	13	8	1	53	44	34	19	0	38
80	53	35	4	16	14	8	2	54	44	34	19	0	38
90	54	36	4	16	15	9	2	54	45	35	20	1	39

Таблица II (продолженіе).

Δ		1000 клм.	2000 клм.	3000 клм.	4000 клм.	5000 клм.	6000 клм.	7000 клм.	8000 клм.	9000 клм.	10000 клм.	11000 клм.	12000 клм.
клм.	м. с.	м. с.	м. с.	м. с.	м. с.	м. с.	м. с.	м. с.	м. с.	м. с.	м. с.	м. с.	м. с.
500	0 55	2 37	4 5	5 17	6 15	7 9	8 3	8 55	9 45	10 35	11 20	12 1	12 39
10	56	38	6	18	15	10	3	55	46	36	20	1	39
20	57	39	7	18	16	10	4	55	46	36	21	2	40
30	58	40	7	19	16	11	5	56	46	37	21	2	40
40	59	41	8	20	17	12	5	57	47	37	22	3	40
50	1 1	42	9	20	17	12	6	57	48	37	22	3	41
60	2	43	10	21	18	13	6	58	48	38	23	3	41
70	3	44	11	21	19	13	7	58	49	38	23	4	42
80	4	45	11	22	19	14	7	59	49	39	24	4	42
90	5	45	12	23	20	14	8	59	50	39	24	5	42
600	6	46	13	24	20	15	8	9 0	50	40	24	5	43
10	7	47	14	24	21	15	9	0	51	40	25	5	43
20	8	48	15	25	21	16	9	1	51	41	25	6	43
30	9	49	15	26	22	16	10	1	52	41	26	6	44
40	10	50	16	26	23	17	10	2	52	42	26	7	44
50	11	51	17	26	23	17	11	2	53	42	27	7	44
60	12	52	18	27	24	18	11	3	53	43	27	7	45
70	13	53	18	28	24	18	12	3	54	43	27	8	45
80	15	54	19	28	25	19	12	4	54	44	28	8	45
90	16	55	20	29	25	20	13	4	55	44	28	9	46
700	16	56	21	30	26	20	13	5	55	45	29	9	46
10	18	57	21	30	26	21	14	5	56	45	29	10	46
20	19	58	22	31	27	21	15	6	56	45	30	10	47
30	20	59	23	31	28	22	15	6	57	46	30	10	47
40	21	3 0	24	32	28	22	15	7	57	46	30	11	47
50	22	0	24	33	29	23	16	7	58	47	31	11	48
60	23	1	25	33	29	23	17	8	58	47	31	12	48
70	24	2	26	34	30	24	17	8	59	48	32	12	48
80	25	3	27	34	30	24	18	9	59	48	32	12	49
90	26	4	28	35	31	25	18	9	10 0	49	32	13	49
800	27	5	28	35	31	25	19	10	0	49	33	13	49
10	28	6	29	36	32	26	19	10	0	49	33	14	50
20	29	7	30	37	32	26	20	11	1	50	34	14	50
30	30	8	30	37	33	27	20	11	2	50	34	14	50
40	31	9	31	38	34	27	21	12	2	51	34	15	51
50	32	10	32	39	34	28	21	12	3	51	35	15	51
60	33	11	33	39	35	28	22	13	3	52	35	15	51
70	34	12	34	40	35	29	22	13	4	52	36	16	52
80	36	12	34	40	36	30	23	14	4	53	36	16	52
90	37	13	35	41	36	30	23	14	5	53	36	17	53
900	38	14	36	41	37	31	24	15	5	54	37	17	53
10	39	15	36	42	37	31	24	15	6	54	37	17	53
20	40	16	37	43	38	32	25	16	6	54	38	18	54
30	41	17	38	43	38	32	25	16	7	55	38	18	54
40	42	18	39	44	39	33	26	17	7	55	38	19	54
50	43	19	39	44	39	33	26	17	8	56	39	19	55
60	44	19	40	45	40	34	27	18	8	56	39	19	55
70	45	20	41	45	41	34	27	18	9	57	40	20	55
80	46	21	42	46	41	35	28	19	9	57	40	20	55
90	47	22	42	47	42	35	28	19	10	58	41	21	56
1000	48	23	43	47	42	36	29	20	10	58	41	21	56

При помощи этой таблицы легко находить разстоянія до эпицентровъ землетрясенія. Конечно, нельзя смотрѣть на эти числа, какъ на абсолютно вѣрныя. Вскорѣ, несомнѣнно, появятся усовершенствованныя годографы, но и таблица Zeissig'a даетъ въ общемъ, какъ въ этомъ неоднократно убѣждались, очень хорошее согласіе съ наблюденіями.

Первая фаза землетрясенія P обыкновенно характеризуется на сейсмограммахъ мелкими волнами съ короткими періодами. Если сейсмографъ обладаетъ достаточной чувствительностью, то моментъ P обыкновенно можно хорошо отмѣтить. Другое дѣло съ S. Наступленіе второй фазы бываетъ иногда довольно неясно и неотчетливо и является иногда сомнѣніе, какое именно мѣсто сейсмограммы надо принять за начало S.

Въ такихъ случаяхъ иногда бываетъ полезно отмѣчать моментъ прихода длинныхъ или поверхностныхъ волнъ.

Эти волны уже имѣютъ другой характеръ; имѣя бо̀льшій періодъ колебаній, онѣ болѣе растянуты, причемъ, послѣ прихода длинныхъ волнъ, наступаетъ всегда для отдаленныхъ станцій максимальная фаза землетрясенія, когда наблюдаются наибольшія горизонтальныя и вертикальныя смѣщенія точекъ земной поверхности.

Такъ какъ поверхностныя волны движутся еще съ меньшей скоростью, чѣмъ волны поперечныя, то онѣ достигаютъ мѣста наблюденій позднѣе всего.

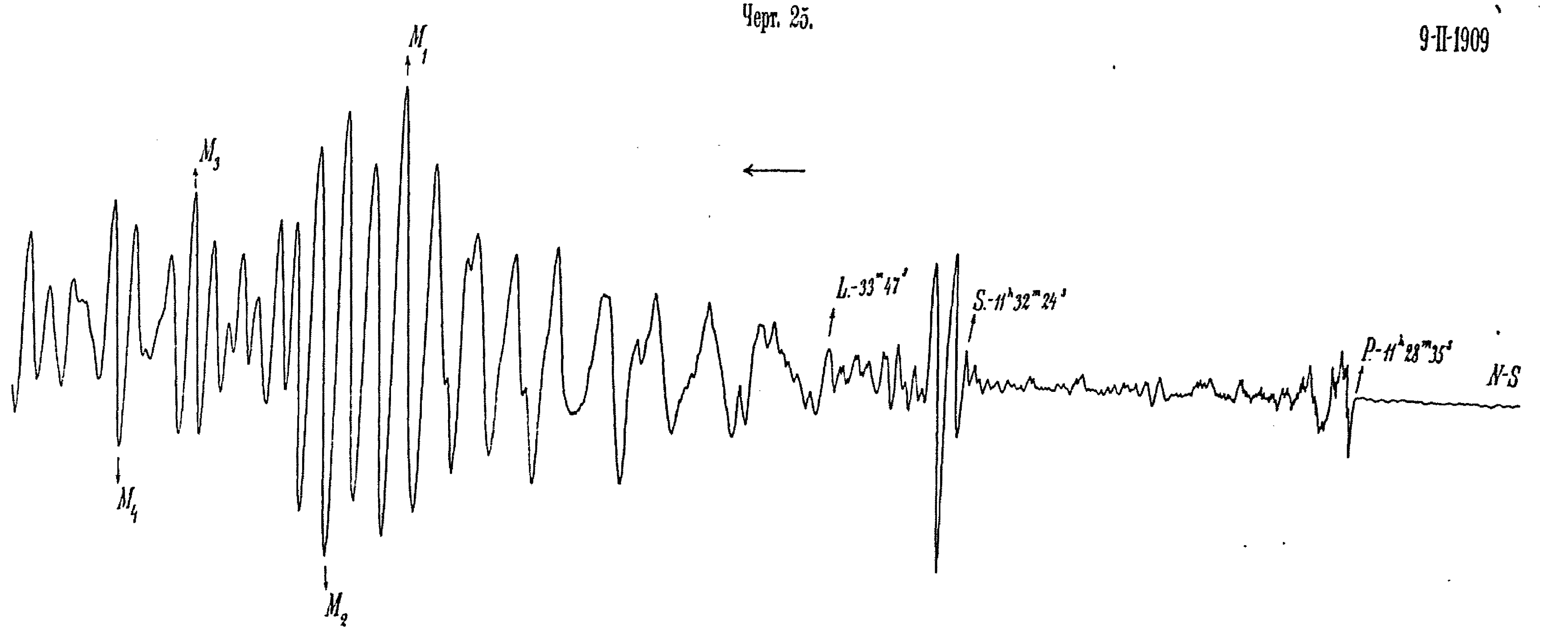
Кромѣ того, такъ какъ эти волны движутся по *поверхности земли* съ одной и той-же средней скоростью, независящей отъ Δ, то соотвѣтствующій годографъ представится прямой линіей. На черт. 24 этотъ годографъ представленъ прямой L, гдѣ этотъ символъ употребляется для обозначенія начала прихода длинныхъ волнъ (undae longae).

При отсутствіи ясно выраженнаго S, можно воспользоваться $L-P$ для опредѣленія приближеннаго разстоянія до эпицентра, хотя, вообще говоря, начало L далеко не бываетъ такъ отчетливо выражено на сейсмограммахъ, какъ начало P. Слѣдуетъ всегда предпочитать опредѣлять Δ по $S-P$ и пользоваться $L-P$ только для контроля.

Слѣдующій чертежъ 25 представляетъ собою воспроизведеніе весьма характерной сейсмограммы для горизонтальнаго смѣщенія почвы въ меридіанѣ, полученной въ Пулковѣ для одного Мало-Азіатскаго землетрясенія 9 февраля 1909 года. На ней очень отчетливо видны начало P, S, L и максимальная фаза землетрясенія, съ отдѣльными максимумами M_1, M_2 и т. д.

При близкихъ землетрясеніяхъ, въ виду того, что скорость распространенія поверхностныхъ волнъ ($V = 3{,}5^{\text{кил.}}/_{\text{сек.}}$) немногимъ только меньше скорости распространенія поперечныхъ волнъ въ верхнихъ слояхъ земли

Черт. 25.



($V = 4{,}0^{\text{кил.}}/_{\text{сек.}}$), то на соотвѣтствующихъ сейсмограммахъ начало L слѣдуетъ тотчасъ-же за началомъ S и волны обоихъ типовъ часто переплетаются.

Для малыхъ эпицентральныхъ разстояній

$$\frac{dT_1}{d\Delta} \quad \text{и} \quad \frac{dT_2}{d\Delta}$$

представляютъ собою съ достаточнымъ приближеніемъ, отвлекаясь отъ вліянія глубины залеганія очага землетрясенія, величины обратныя скоростямъ распространенія продольныхъ и поперечныхъ волнъ въ верхнихъ слояхъ земли.

Если эпицентральное разстояніе Δ извѣстно для нѣсколькихъ станцій, то можно сейчасъ же розыскать и положеніе самого эпицентра землетрясенія.

Для этой цѣли очень удобно пользоваться чернымъ глобусомъ, раздѣленнымъ на меридіаны и параллели, по которому можно чертить мѣломъ.

Чертятъ на глобусѣ изъ двухъ станцій, для которыхъ эпицентральныя разстоянія Δ и Δ_1 извѣстны, два круга съ соотвѣтствующими радіусами, для чего служитъ особая раздѣленная дуга, каждое дѣленіе которой соотвѣтствуетъ 100 километрамъ.

Въ точкѣ пересѣченія этихъ круговъ и будетъ находиться эпицентръ. Правда, такихъ точекъ двѣ, но, если одна изъ нихъ падаетъ на несейсмическую область, то такую точку можно прямо отбросить.

Если имѣть еще величину Δ для какой-нибудь третьей станціи, то всякая неопредѣленность въ рѣшеніи задачи исчезаетъ. Такое опредѣленіе эпицентра можно назвать *сейсмической тріангуляціей*. Можно для этой-же цѣли воспользоваться и картами въ стереографической проекціи.

Болѣе точное положеніе эпицентра получится вычисленіемъ при помощи извѣстныхъ формулъ сферической тригонометріи.

Пусть на слѣдующемъ чертежѣ 26 N представляетъ собою сѣверный полюсъ, а B и B_1 двѣ сейсмическія станціи, со слѣдующими географическими координатами:

	Станція B.	*Станція B_1.*
Широта	φ	φ_1
Долгота	λ	λ_1
Дополненіе широты	$\theta = 90 - \varphi$.	$\theta_1 = 90 - \varphi_1$.

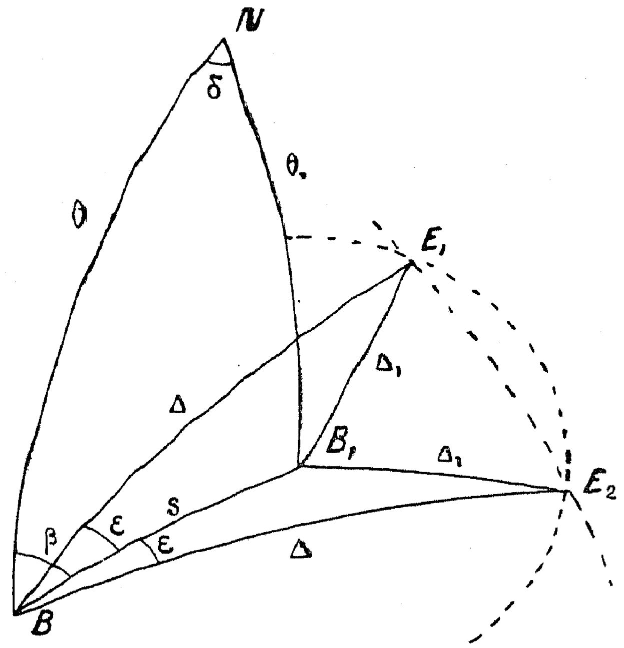
Тогда

$$\angle BNB_1 = \delta = \lambda_1 - \lambda.$$

Изъ точекъ B и B_1, какъ изъ центра, зачерчиваемъ дуги съ радіусами Δ и Δ_1, соотвѣтственно равными эпицентральнымъ разстояніямъ.

Въ одной изъ точекъ пересѣченія этихъ круговъ E_1 или E_2 и будетъ находиться искомый эпицентръ.

Черт. 26.



Чтобы найти географическія координаты точекъ E_1 и E_2 поступаемъ слѣдующимъ образомъ.

Надо сначала опредѣлить разстояніе s между станціями B и B_1, считаемое по дугѣ большого круга, а также азимутъ $\beta = \angle NBB_1$ станціи B_1 по отношенію къ меридіану станціи B.

Изъ сферическаго треугольника BNB_1 имѣемъ

$$\cos s = \cos\theta \cos\theta_1 + \sin\theta \sin\theta_1 \cos\delta, \ldots (36)$$

$$\sin\beta = \sin\delta \cdot \frac{\sin\theta_1}{\sin s} \quad \ldots\ldots (37)$$

и

$$\cos\theta_1 = \cos\theta \cos s + \sin\theta \sin s \cos\beta$$

или

$$\cos\beta = \frac{\cos\theta_1 - \cos\theta\cos s}{\sin\theta \sin s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (38)$$

По заданнымъ величинамъ θ, θ_1 и δ изъ формулы (36) находимъ сначала s, а потомъ уже по одной изъ формулъ (37) или (38) находимъ уголъ β.

Однако формулы (36) и (38) неудобны для вычисленія, потому что онѣ имѣютъ нелогариѳмическій видъ, а формула (37) даетъ двойственное рѣшеніе, такъ какъ, при той-же величинѣ синуса, уголъ β можетъ быть или больше, или меньше $90°$.

Чтобы избѣжать этого неудобства, вводятъ вспомогательный уголъ ω, опредѣляемый слѣдующимъ соотношеніемъ:

$$\operatorname{tg}\omega = \cos\delta \operatorname{tg}\theta_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (39)$$

Тогда

$$\sin\theta_1 \cos\delta = \operatorname{tg}\omega \cos\theta_1.$$

Подставимъ это выраженіе въ формулу (36).

Тогда

$$\cos s = \cos\theta_1 \{\cos\theta + \sin\theta \operatorname{tg}\omega\} = \frac{\cos\theta_1}{\cos\omega} \{\cos\theta\cos\omega + \sin\theta\sin\omega\}$$

или

$$\cos s = \frac{\cos\theta_1 \cos(\theta - \omega)}{\cos\omega} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (40)$$

Далѣе изъ уравненій (37) и (38) имѣемъ:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\delta . \sin\theta_1 \sin\theta}{\cos\theta_1 - \cos\theta\cos s}.$$

Подставляя сюда выраженіе $\cos s$ изъ формулы (40), получимъ

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\delta . \sin\theta_1 . \sin\theta}{\cos\theta_1 - \cos\theta \cdot \dfrac{\cos\theta_1\cos(\theta-\omega)}{\cos\omega}}$$

$$= \frac{\sin\delta . \operatorname{tg}\theta_1 . \sin\theta}{1 - \cos\theta \{\cos\theta + \sin\theta \operatorname{tg}\omega\}}$$

$$= \frac{\sin\delta . \operatorname{tg}\theta_1 . \sin\theta}{\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta\operatorname{tg}\omega} = \frac{\operatorname{tg}\delta . \{\cos\delta . \operatorname{tg}\theta_1\}}{\sin\theta\cos\omega - \cos\theta\sin\omega} \cdot \cos\omega$$

или, окончательно, принимая во вниманіе соотношеніе (39),

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\delta . \sin\omega}{\sin(\theta - \omega)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (41)$$

По формуламъ (40) и (41) и вычисляютъ величины s и β.

Для вычисленія эти формулы очень удобны, причемъ нѣтъ никакой двойственности въ рѣшеніи, такъ какъ знакъ при $\cos s$ и $\operatorname{tg}\beta$ опредѣляетъ тотчасъ-же, будетъ ли соотвѣтствующій уголъ больше или меньше 90°.

Чтобы перевести s въ километры, надо выразить s въ градусахъ и доляхъ градуса (s°) и умножить затѣмъ s° на количество A, гдѣ

$$A = 6371 \frac{\pi}{180} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (42)$$

и

$$\operatorname{Log} A = 2{,}0461.$$

$$s = A s^\circ \text{ километровъ.}$$

Для каждой данной пары сейсмическихъ станцій s и β суть величины постоянныя и могутъ быть вычислены напередъ.

Обращаемся теперь къ треугольникамъ BE_1B_1 или BE_2B_1 — безразлично—, въ которыхъ три стороны Δ, Δ_1 и s извѣстны, съ цѣлью вычисленія угла $\varepsilon = E_1BB_1 = E_2BB_1$.

Сначала надо перевести Δ и Δ_1 въ угловую мѣру, т.-е. раздѣлить эти величины на A. Получимъ Δ и Δ_1, выраженныя въ градусахъ и доляхъ градуса.

Введя далѣе обозначеніе

$$p=\frac{\Delta+\Delta_1+s}{2}, \dots\dots\dots\dots (43)$$

будемъ, на основаніи извѣстной формулы сферической тригонометріи, имѣть:

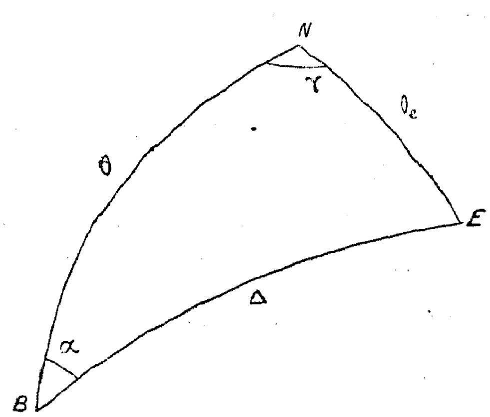
$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon=\sqrt{\frac{\sin(p-\Delta).\sin(p-s)}{\sin p.\sin(p-\Delta_1)}} \dots\dots\dots\dots (44)$$

Тогда азимутъ эпицентра землетрясенія относительно меридіана станціи B будетъ

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\beta-\varepsilon\\ \text{или}\quad \alpha&=\beta+\varepsilon\end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (45)$$

Зная теперь эпицентральное разстояніе Δ и азимутъ эпицентра α для станціи B, легко уже вычислить географическія координаты φ_e и λ_e самого эпицентра.

Черт. 27.



Въ треугольникѣ BNE (см. черт. 27) двѣ стороны θ, Δ и уголъ α извѣстны. Требуется опредѣлить дополненіе широты эпицентра θ_e и разность долготъ γ.

Аналогично тому, что у насъ было раньше при вычисленіи s, будемъ имѣть

$$\cos\theta_e=\cos\theta\cos\Delta+\sin\theta\sin\Delta\cos\alpha, \dots (46)$$

$$\sin\gamma=\sin\alpha.\frac{\sin\Delta}{\sin\theta_e}$$

и

$$\cos\gamma=\frac{\cos\Delta-\cos\theta\cos\theta_e}{\sin\theta\sin\theta_e}$$

или

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{\sin\alpha.\sin\theta.\sin\Delta}{\cos\Delta-\cos\theta\cos\theta_e} \dots\dots\dots\dots (47)$$

Введемъ опять нѣкоторый вспомогательный уголъ χ:

$$\operatorname{tg}\chi=\cos\alpha\operatorname{tg}\Delta \dots\dots\dots\dots (48)$$

Тогда

$$\cos\theta_e=\cos\theta\cos\Delta+\sin\theta\cos\Delta\operatorname{tg}\chi$$

$$=\frac{\cos\Delta}{\cos\chi}\cdot\{\cos\theta\cos\chi+\sin\theta\sin\chi\}$$

или, окончательно,

$$\cos\theta_e = \frac{\cos\Delta . \cos(\theta - \chi)}{\cos\chi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (49)$$

Подставляя эту величину въ формулу (47), получимъ

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin\alpha\sin\theta . \sin\Delta}{\cos\Delta - \cos\theta . \cos\Delta\dfrac{\cos(\theta-\chi)}{\cos\chi}}$$

$$= \frac{\sin\alpha\sin\theta\operatorname{tg}\Delta}{1 - \cos\theta\,\{\cos\theta + \sin\theta\operatorname{tg}\chi\}}$$

$$= \frac{\sin\theta\operatorname{tg}\alpha . \{\cos\alpha\operatorname{tg}\Delta\}}{\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta\operatorname{tg}\chi}$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\chi}{\sin\theta\cos\chi - \cos\theta\sin\chi} \cdot \cos\chi$$

или, окончательно,

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\alpha . \sin\chi}{\sin(\theta - \chi)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (50)$$

По формуламъ (49) и (50) и вычисляются величины θ_e и γ.

Тогда широта эпицентра будетъ

$$\varphi_e = 90 - \theta_e, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (51)$$

а долгота

$$\lambda_e = \lambda \pm \gamma, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (52)$$

гдѣ знакъ $+$ надо взять тогда, когда эпицентръ лежитъ къ востоку отъ станціи B, а знакъ $-$, когда онъ лежитъ къ западу.

Если-бы была возможность опредѣлить азимутъ эпицентра α по наблюденіямъ на самой станціи B, то, зная эпицентральное разстояніе Δ, можно бы было опредѣлить положеніе эпицентра, не прибѣгая вовсе къ содѣйствію другихъ сейсмическихъ станцій, а пользуясь только наблюденіями *одной* лишь данной сейсмической станціи.

При наличіи подходящихъ сейсмографовъ, обладающихъ достаточной чувствительностью, задача эта вполнѣ разрѣшима. Мы разсмотримъ этотъ вопросъ подробнѣе потомъ, когда познакомимся съ теоріей сейсмическихъ инструментовъ. Въ настоящее время достаточно указать на то, что для данной цѣли надо только знать *абсолютныя* величины смѣщенія точки земной поверхности при первомъ вступленіи *продольныхъ* сейсмическихъ волнъ и при томъ, какъ въ меридіанѣ, такъ и въ первомъ вертикалѣ. Отношеніе второй величины къ первой и дастъ намъ тангенсъ азимута

эпицентра. Всякая неопредѣленность въ рѣшеніи вопроса исчезнетъ, если мы съумѣемъ еще опредѣлить въ какую именно сторону произошло смѣщеніе, т.-е. была-ли измѣренная проэкція смѣщенія направлена къ N-у или S-у, E-у или W-у и соотвѣтствовалъ ли фронтъ первой продольной волны волнѣ сжатія или разрѣженія.

Въ недавнее время проф. Zeissig изъ Jugenheim'а близъ Darmstadt'а разработалъ особый пріемъ опредѣленія положенія эпицентра землетрясенія, сущность котораго заключается въ слѣдующемъ.

По наблюденнымъ въ Jugenheim'ѣ моментамъ прихода волнъ первой и второй предварительныхъ фазъ P и S Zeissig, обычнымъ путемъ, по кривымъ временъ пробѣга, опредѣляетъ разстояніе Δ до эпицентра. Затѣмъ онъ пользуется *абсолютными* моментами первой фазы P на различныхъ другихъ сейсмическихъ станціяхъ, и, комбинируя каждую такую станцію съ Jugenheim'омъ (съ соотвѣтствующей величиной P), выводитъ азимутъ α эпицентра относительно меридіана Jugenheim'а.

Изъ полученныхъ, такимъ образомъ, азимутовъ онъ беретъ среднее. Для упрощенія этихъ опредѣленій имъ составлены особые графики.

Зная Δ и α, можно уже затѣмъ легко опредѣлить географическія координаты эпицентра. Для этой цѣли Zeissig также пользуется особыми діаграммами.

Способъ этотъ имѣетъ то преимущество, что онъ кладетъ въ основаніе только величины моментовъ P, опредѣленныхъ на другихъ станціяхъ, каковые моменты большею частью легко точно отмѣтить на сейсмограммахъ, тогда какъ начало второй фазы S очень часто бываетъ неотчетливо. Моментъ S требуется, такимъ образомъ, только для *одной,* основной, станціи, для которой по годографу и опредѣляется соотвѣтствующее эпицентральное разстояніе Δ.

Но этотъ пріемъ, какъ и методъ сейсмической тріангуляціи, страдаетъ тѣмъ недостаткомъ, что онъ требуетъ, для опредѣленія положенія эпицентра землетрясенія, предварительнаго обмѣна данныхъ между отдѣльными сейсмическими станціями.

Изъ всего вышеизложеннаго видно, какое важное значеніе имѣетъ для практической сейсмометріи точное знаніе годографа.

Но значеніе годографа далеко не исчерпывается вопросомъ о розысканіи эпицентровъ землетрясеній. Мы увидимъ изъ дальнѣйшаго, что изъ кривой годографа можно вывести нѣкоторыя чрезвычайно важныя и интересныя заключенія о физическихъ свойствахъ глубокихъ, совершенно намъ недоступныхъ, внутреннихъ слоевъ земли.

§ 3.

Опредѣленіе угла выхода сейсмической радіаціи.

Въ § 1 настоящей главы мы нашли слѣдующее выраженіе для эпицентральнаго разстоянія Δ:

$$\Delta = 2r_0\alpha \int_{\rho_m}^{1} \frac{d\rho}{\rho\sqrt{\varphi^2(\rho)-\alpha^2}} = \Phi_1(\alpha), \ldots\ldots \text{(формула (24))}$$

гдѣ α есть cos угла выхода сейсмической радіаціи

$$\alpha = \cos e_0 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(формула (17))}$$

Слѣдовательно, каждому эпицентральному разстоянію Δ пріурочена опредѣленная величина e_0.

Съ другой стороны, для времени пробѣга T соотвѣтствующаго луча мы имѣли

$$T = 2n_0r_0 \int_{\rho_m}^{1} \frac{\nu^2\,\rho d\rho}{\sqrt{\varphi^2(\rho)-\alpha^2}} \ldots\ldots\ldots \text{(формула (27))}$$

Нижній предѣлъ этихъ двухъ опредѣленныхъ интеграловъ опредѣляется изъ условія

$$\varphi(\rho_m) = \alpha \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(формула (22))}$$

Функція

$$\varphi(\rho) = \nu\rho \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(формула (20))}$$

намъ неизвѣстна.

Наибольшая глубина проникновенія сейсмическаго луча внутрь земли или соотвѣтствующая величина ρ_m есть также функція отъ α.

Составимъ теперь выраженіе

$$T - n_0\alpha\Delta.$$

$$T - n_0\alpha\Delta = 2n_0r_0 \int_{\rho_m}^{1} \frac{\nu^2\rho^2\,d\rho}{\rho\sqrt{\varphi^2(\rho)-\alpha^2}} - 2n_0r_0 \int_{\rho_m}^{1} \frac{\alpha^2\,d\rho}{\rho\sqrt{\varphi^2(\rho)-\alpha^2}}$$

или, принимая во вниманіе соотношеніе (20),

$$T - n_0\alpha\Delta = 2n_0r_0 \int_{\rho_m}^{1} \frac{\sqrt{\varphi^2(\rho)-\alpha^2}}{\rho}\,d\rho \ldots\ldots\ldots\ldots (53)$$

Этотъ интегралъ есть также функція параметра α, интегрированіе-же производится по ρ.

Принимая во вниманіе, что нижній предѣлъ этого интеграла есть также функція отъ α, мы получимъ, на основаніи извѣстной теоремы интегральнаго исчисленія, касающейся дифференцированія опредѣленныхъ интеграловъ по перемѣнному параметру, по которой

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{x_1}^{x_2} f(x,\alpha)\,dx = \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\{f(x,\alpha)\}\,dx + f(x_2)\frac{\partial x_2}{\partial\alpha} - f(x_1)\frac{\partial x_1}{\partial\alpha},$$

слѣдующее выраженіе для производной выраженія (53) по параметру α:

$$\frac{dT}{d\alpha} - n_0\Delta - n_0\alpha\frac{d\Delta}{d\alpha} = -2n_0 r_0\alpha\int_{\rho_m}^{1}\frac{d\rho}{\rho\sqrt{\varphi^2(\rho)-\alpha^2}} - \left[2n_0 r_0\frac{\sqrt{\varphi^2(\rho)-\alpha^2}}{\rho}\right]_{\rho=\rho_m}\cdot\frac{\partial\rho_m}{\partial\alpha}.$$

Но, въ силу соотношенія (22), второй членъ въ правой части предыдущаго равенства равенъ нулю, а первый членъ, на основаніи формулы (24), есть ничто иное, какъ $-n_0\Delta$.

Итакъ,

$$\frac{dT}{d\alpha} - n_0\Delta - n_0\alpha\frac{d\Delta}{d\alpha} = -n_0\Delta$$

или

$$\alpha = \cos e_0 = \frac{1}{n_0}\cdot\frac{dT}{d\Delta}.$$

Такъ какъ n_0 есть величина обратная скорости распространенія соотвѣтствующаго сейсмическаго луча въ самыхъ верхнихъ слояхъ земли v_0, то, примѣняя эту формулу къ случаю продольныхъ волнъ первой предварительной фазы землетрясенія, будемъ имѣть

$$\cos e_0 = v_0\frac{dT_1}{d\Delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (54)$$

Эта формула имѣетъ чрезвычайно важное значеніе.

Въ ней $\frac{dT_1}{d\Delta}$ есть ничто иное, какъ тангенсъ угла, составляемаго касательной къ годографу продольныхъ волнъ съ осью Δ.

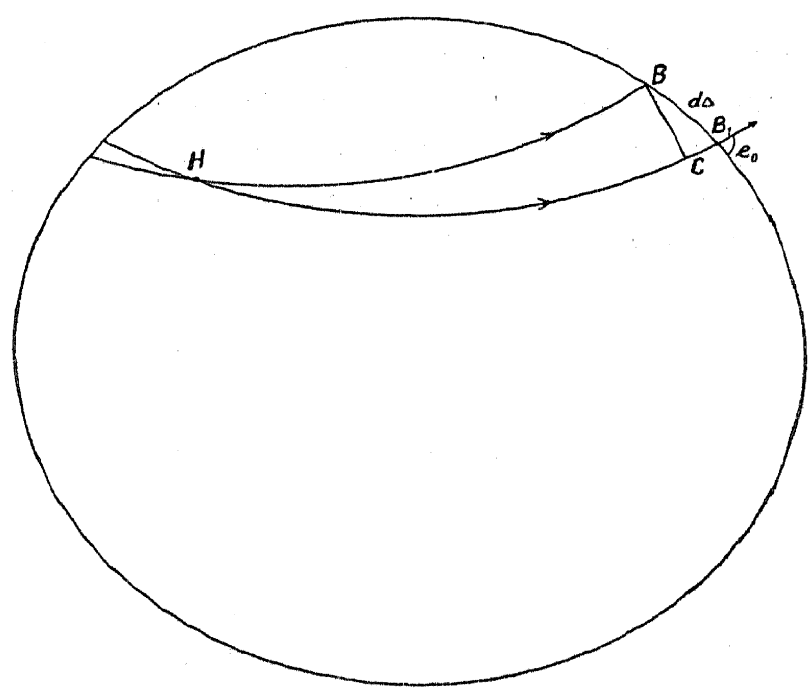
Такимъ образомъ, если мы знаемъ скорость распространенія продольныхъ волнъ въ верхнихъ слояхъ земли v_0, то всегда можемъ вычислить уголъ выхода сейсмической радіаціи e_0.

Наоборотъ, опредѣляя изъ наблюденій, тѣмъ или инымъ способомъ, уголъ e_0, о чемъ рѣчь будетъ впереди, можно по годографу опредѣлить v_0

и обнаружить, такимъ образомъ, возможныя аномаліи въ геологическомъ строеніи верхнихъ пластовъ земли.

Формулу (54) можно очень легко вывести и чисто геометрическимъ путемъ, причемъ эта формула остается всегда справедливой, независимо отъ глубины залеганія очага, если только соотвѣтствующій годографъ пріуроченъ именно къ этой глубинѣ; впрочемъ, такъ какъ очагъ землетрясенія никогда не лежитъ очень глубоко, то разница въ формѣ годографа можетъ сказаться только для точекъ, отстоящихъ недалеко отъ эпицентра, для болѣе-же значительныхъ эпицентральныхъ разстояній вопросъ о глубинѣ залеганія очага не имѣетъ для формы годографа почти никакого практическаго значенія.

Черт. 28.



На слѣдующемъ чертежѣ 28 H представляетъ собою очагъ землетрясенія, а B и B_1 двѣ точки, находящіяся въ безконечно-близкомъ разстояніи $d\Delta$ другъ отъ друга.

Опустимъ изъ B перпендикуляръ на траекторію продольнаго сейсмическаго луча, идущаго къ B_1. Уголъ выхода сейсмической радіаціи въ B_1 пусть будетъ e_0.

Тогда изъ элементарнаго треугольника BCB_1 слѣдуетъ, что

$$CB_1 = d\Delta \cos e_0.$$

Съ другой стороны разстоянію CB_1 соотвѣтствуетъ время пробѣга dT_1 продольнаго луча въ самыхъ верхнихъ слояхъ земли.

Слѣдовательно,

$$CB_1 = v_0\, dT_1.$$

Сравнивая оба эти выраженія, находимъ

$$\cos e_0 = v_0 \frac{dT_1}{d\Delta},$$

что и требовалось доказать.

Итакъ, формула (54) всегда справедлива, совершенно независимо отъ закона, опредѣляющаго зависимость величины $\nu = \frac{v_0}{v}$, т.-е. скорости распространенія сейсмическихъ лучей, отъ глубины (ρ) и при *совершенно произвольномъ* положеніи очага землетрясенія H и мѣста наблюденія B, что прямо слѣдуетъ изъ чертежа 28.

Формула, аналогичная формулѣ (54), можетъ также быть примѣнена и къ случаю поперечныхъ волнъ.

Zoepprítz и Geiger, на основаніи опубликованныхъ ими данныхъ для годографа продольныхъ сейсмическихъ волнъ, дали слѣдующія величины угла e_0 въ зависимости отъ эпицентральнаго разстоянія Δ.

Эти числа приведены въ слѣдующей таблицѣ III.

Рядомъ съ величинами e_0 сопоставлены величины угла ε, подъ которымъ сейсмическіе лучи выступали бы изъ нѣдръ земли, если-бы они распространялись между эпицентромъ E и мѣстомъ наблюденія B прямолинейно по хордѣ EB (см. черт. 19), т.-е., если-бы упругія свойства и плотность внутреннихъ слоевъ земли были-бы вездѣ одинаковы.

Такъ какъ уголъ при центрѣ, соотвѣтствующій эпицентральному разстоянію Δ (въ километрахъ) есть ϑ, гдѣ

$$\vartheta^\circ = \frac{\Delta}{6371} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{1}{A} \cdot \Delta, \; \ldots\ldots (\text{см. формулу } (42))$$

то изъ чертежа 19 легко видѣть, что

$$\varepsilon = \frac{\vartheta}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (55)$$

Такъ какъ траекторіи сейсмическихъ лучей обращены вообще вогнутостью къ поверхности земли, то мы будемъ имѣть

$$e_0 > \varepsilon.$$

Для величинъ Δ, превышающихъ 13000 кил., форма годографа почти совершенно еще не изслѣдована.

Таблица III показываетъ, что, при малыхъ величинахъ Δ, e_0 быстро возрастаетъ, а, около $\Delta = 6000$ кил., возрастаемость e_0 наименьшая.

Разность $e_0 - \varepsilon$ сначала быстро увеличивается, затѣмъ, около $\Delta = 5000$ кил., достигаетъ максимума, а потомъ уже эта разность медленно убываетъ. Это обстоятельство уже наводитъ на мысль, что въ глубокихъ слояхъ земли, соотвѣтствующихъ $\Delta = 5000$ кил., можно встрѣтить аномаліи въ законѣ измѣненія скорости распространенія сейсмическихъ волнъ

Таблица III.

Δ	e_0	ε	e_0 — ε
0 кил.	0° 0′	0° 0′	0° 0′
500	10 40	2 15	8 25
1000	20 42	4 30	16 12
1500	29 37	6 45	22 52
2000	37 15	9 0	28 15
2500	43 40	11 14	32 26
3000	49 3	13 29	35 34
3500	53 16	15 44	37 32
4000	56 47	17 59	38 48
4500	60 1	20 14	39 47
5000	62 48	22 29	40 19
5500	64 42	24 44	39 58
6000	64 47	26 59	37 48
6500	64 59	29 14	35 45
7000	65 18	31 29	33 49
7500	65 42	33 43	31 59
8000	66 11	35 58	30 13
8500	66 45	38 13	28 32
9000	67 22	40 28	26 54
9500	68 3	42 43	25 20
10000	68 48	44 58	23 50
10500	69 34	47 13	22 21
11000	70 23	49 28	20 55
11500	71 17	51 43	19 34
12000	72 13	53 58	18 15
12500	73 11	56 12	16 59
13000	74 9	58 27	15 42

въ зависимости отъ глубины. Къ этому вопросу мы вернемся еще въ слѣдующемъ параграфѣ.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что знанiе величины угла e_0, какъ функцiи отъ Δ, имѣетъ чрезвычайно важное значенiе, такъ какъ это даетъ возможность прослѣдить до извѣстной степени траекторiю сейсмическаго луча сквозь толщу земли и вывести отсюда нѣкоторыя заключенiя о физическихъ свойствахъ внутреннихъ слоевъ земли.

---

§ 4.

Зависимость скорости распространенiя продольныхъ и поперечныхъ волнъ отъ глубины.

Для опредѣленiя этой зависимости обратимся опять къ нашему основному уравненiю (формула (24)), дающему величину Δ въ зависимости отъ величины параметра $\alpha = \cos e_0$.

$$\Delta = 2r_0\alpha \int_{\rho_m}^{1} \frac{d\rho}{\rho\sqrt{\varphi^2(\rho) - \alpha^2}} = \Phi_1(\alpha) \ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

Зависимость Δ отъ α можетъ, какъ мы видѣли изъ предыдущаго §, считаться извѣстной, разъ что мы знаемъ форму кривой соотвѣтствующаго годографа.

Слѣдовательно, функцiя $\Phi_1(\alpha)$ извѣстна изъ наблюденiй.

Задача, съ математической точки зрѣнiя, сводится къ тому, чтобы подыскать для $\varphi(\rho) = \nu\rho$ такую функцiю, которая, будучи подставлена въ выраженiе предыдущаго опредѣленнаго интеграла, удовлетворила-бы уравненiю (24).

Мы ввели раньше слѣдующiя обозначенiя (см. формулы (14), (15) и (16)):

$$\rho = \frac{r}{r_0} \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

$$\nu = \frac{v_0}{v} \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

и

$$\nu = f(\rho) \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Слѣдовательно,

$$\varphi(\rho) = \nu\rho = \frac{v_0}{v}\rho \qquad \text{(см. формулу (20))}$$

или

$$v = v_0 \frac{\rho}{\varphi(\rho)} \ldots\ldots\ldots\ldots (56)$$

Такъ какъ ρ есть радіусъ слоя, выраженный въ доляхъ радіуса земли, то, если мы будемъ въ состояніи опредѣлить функцію $\varphi(\rho)$, то будемъ знать, какъ измѣняется скорость распространенія сейсмическихъ волнъ въ зависимости отъ глубины.

Введемъ, для удобства дальнѣйшихъ выкладокъ, слѣдующія обозначенія:

$$x = \rho^2,$$

$$y = \varphi^2(\rho).$$

Тогда

$$y = \nu^2 x = F(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (57)$$

и

$$v = v_0 \sqrt{\frac{x}{F(x)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (58)$$

Кривая $y = F(x)$ намъ неизвѣстна. Одно только мы знаемъ, а именно, что, такъ какъ ν^2 всегда конечно, то, при

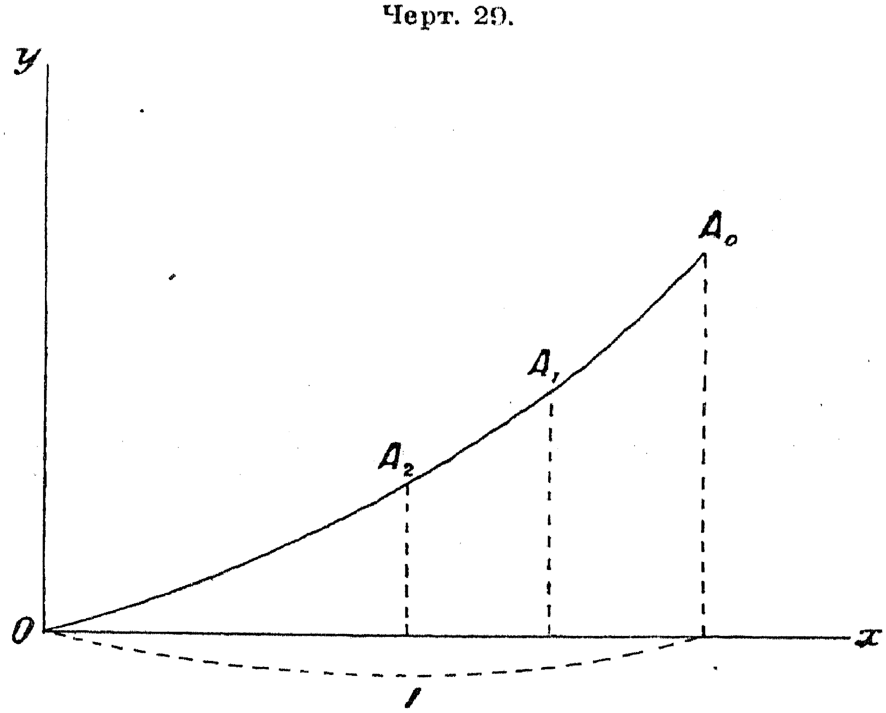
$$x = 0, \qquad y = 0$$

и, при

$$x = 1, \left\{ \begin{matrix} (r = r_0) \\ (v = v_0) \end{matrix} \right\} y = 1.$$

Кривая $y = F(x)$ представлена условно на чертежѣ 29.

Черт. 29.



Какова-бы ни была форма кривой, мы можемъ всегда, взявъ на ней двѣ близкія точки, какъ напр. A_1 и A_2, представить ее на этомъ участкѣ

функціей вида

$$y = a + bx + cx^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (59)$$

Чѣмъ ближе взяты точки A_1 и A_2, тѣмъ ближе будетъ кривая, выражаемая уравненіемъ (59), совпадать съ дѣйствительной кривой $y = F(x)$.

Само собою разумѣется, что для участка, прилегающаго непосредственно къ точкѣ 0, соотвѣтствующій коеффиціентъ a надо положить равнымъ нулю.

Итакъ, предположимъ, что, начиная отъ A_0, кривая на извѣстномъ участкѣ, между $x = x_0 = 1$ и $x = x_1$, можетъ быть представлена формулой (59), причемъ, при

$$x = x_0 = 1, \qquad y = y_0 = 1$$

и, при

$$x = x_1, \qquad y = y_1.$$

Задача сводится къ опредѣленію, на основаніи эмпирической зависимости $\Delta = \Phi_1(\alpha)$, коеффиціентовъ a, b и c.

Между послѣдними существуетъ, однако, опредѣленное соотношеніе:

$$y_0 = a + bx_0 + cx_0^2$$

или

$$b = \frac{y_0 - a - cx_0^2}{x_0} = \frac{y_0}{x_0} - \frac{1}{x_0} a - cx_0, \ldots\ldots\ldots\ldots (60)$$

что, для $x_0 = 1$, даетъ

$$b = 1 - a - c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (61)$$

Найдемъ теперь выраженіе интеграла, входящаго въ формулу (24). Вводя новыя перемѣнныя, будемъ имѣть

$$\Delta = 2r_0\alpha \int\limits_{\rho_m}^{1} \frac{\rho d\rho}{\rho^2 \sqrt{\varphi^2(\rho) - \alpha^2}} = r_0\alpha \int\limits_{x_m}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{y - \alpha^2}}, \ldots\ldots\ldots (62)$$

гдѣ $x_m = \rho_m^2$.

Соотвѣтствующая величина y_m опредѣлится на основаніи формулы (22):

$$y_m = \alpha^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (63)$$

Подставимъ теперь въ уравненіе (62) выраженіе y изъ формулы (59). Тогда

$$\Delta = r_0\alpha \int\limits_{x_m}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{(a - \alpha^2) + bx + cx^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots (64)$$

Найдемъ сначала выраженіе неопредѣленнаго интеграла, который мы обозначимъ черезъ I.

$$I=\int\frac{dx}{x\sqrt{(a-\alpha^2)+bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-a}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2(a-\alpha^2)+bx}{2\sqrt{\alpha^2-a}.\sqrt{(a-\alpha^2)+bx+cx^2}}\ldots(65)$$

Справедливость этой формулы можно легко провѣрить обратнымъ дифференцированіемъ.

Дѣйствительно,

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-a}}\left[\operatorname{arctg}\frac{2(a-\alpha^2)+bx}{2\sqrt{\alpha^2-a}.\sqrt{(a-\alpha^2)+bx+cx^2}}\right]'=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-a}}\frac{\left[\dfrac{2(a-\alpha^2)+bx}{2\sqrt{\alpha^2-a}.\sqrt{(a-\alpha^2)+bx+cx^2}}\right]'}{1+\left[\dfrac{2(a-\alpha^2)+bx}{2\sqrt{\alpha^2-a}.\sqrt{(a-\alpha^2)+bx+cx^2}}\right]^2}$$

$$=2\frac{b\sqrt{(a-\alpha^2)+bx+cx^2}.-\{2(a-\alpha^2)+bx\}\dfrac{b+2cx}{2\sqrt{(a-\alpha^2)+bx+cx^2}}}{-4(a-\alpha^2)\{(a-\alpha^2)+bx+cx^2\}+\{4(a-\alpha^2)^2+4(a-\alpha^2)bx+b^2x^2\}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(a-\alpha^2)+bx+cx^2}}\cdot\frac{2b\{(a-\alpha^2)+bx+cx^2\}-2(a-\alpha^2)b-b^2x-4(a-\alpha^2)cx-2bcx^2}{\{b^2-4(a-\alpha^2)c\}x^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(a-\alpha^2)+bx+cx^2}}\cdot\frac{b^2x-4(a-\alpha^2)cx}{\{b^2-4(a-\alpha^2)c\}x^2}=\frac{1}{x\sqrt{(a-\alpha^2)+bx+cx^2}}.$$

Формулу (65) можно написать еще такъ:

$$I=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-a}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2(a-\alpha^2)+bx}{2\sqrt{\alpha^2-a}.\sqrt{y-\alpha^2}}.$$

Найдя этотъ неопредѣленный интегралъ, можно уже подставить предѣлы.

Низшій предѣлъ x_m опредѣлится изъ условія

$$y_m=a+bx_m+cx_m{}^2=\alpha^2.$$

До этого x_m мы принимаемъ, что постоянныя a, b и c сохраняютъ свои численныя значенія.

Такъ какъ, при $x=x_m$, $y_m=\alpha^2$, то знаменатель предыдущаго выраженія обращается въ нуль, а слѣдовательно аргументъ при arctg въ ∞.

Такъ какъ, съ другой стороны, при верхнемъ предѣлѣ $x=x_0=1$, и $y=1$, то мы будемъ имѣть

$$[I]^1{}_{x_m}=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-\alpha}}\left[\operatorname{arctg}\frac{2(a-\alpha^2)+b}{2\sqrt{\alpha^2-a}.\sqrt{1-\alpha^2}}-\frac{\pi}{2}\right].$$

Введемъ теперь такое обозначенiе:

$$w = \frac{2\sqrt{\alpha^2-\alpha}.\sqrt{1-\alpha^2}}{2(\alpha^2-a)-b} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (66)$$

Тогда

$$[I]^1_{x_m} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-a}}\left[\operatorname{arctg}\frac{-1}{w} - \frac{\pi}{2}\right].$$

Но легко видѣть, что $\operatorname{arctg}\frac{-1}{w} - \frac{\pi}{2} = \operatorname{arctg} w$.

Дѣйствительно, положивши

$$\operatorname{arctg}\frac{-1}{w} = u,$$

будемъ имѣть

$$\operatorname{arctg}\frac{-1}{w} - \frac{\pi}{2} = u - \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\left(u - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg} u - \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}}{1 + \operatorname{tg} u . \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{\operatorname{tg} u}.$$

Но

$$\operatorname{tg} u = -\frac{1}{w},$$

слѣдовательно,

$$\operatorname{tg}\left(u - \frac{\pi}{2}\right) = w$$

и

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{w}\right) - \frac{\pi}{2} = u - \frac{\pi}{2} = \operatorname{arctg} w$$

или еще

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{w}\right) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} w.$$

Итакъ,

$$[I]^1_{x_m} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-\alpha}} \cdot \operatorname{arctg} w$$

и

$$\Delta = \frac{r_0\,\alpha}{\sqrt{\alpha^2-\alpha}} \cdot \operatorname{arctg} w \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (67)$$

Имѣя пару соотвѣтствующихъ значенiй Δ и α, и, принимая еще во вниманiе соотношенiе (61), будемъ имѣть 3 уравненiя, изъ которыхъ можно опредѣлить всѣ три постоянныя a, b и c, входящiя въ формулу (59).

Тогда формула (58) дастъ уже намъ зависимость скорости v отъ глубины слоя.

Совершенно подобно тому, какъ мы вычисляли Δ, мы можемъ вычислить и время пробѣга T.

Формула (27) даетъ намъ

$$T = 2n_0 r_0 \int_{\rho_m}^{1} \frac{\nu^2 \rho d\rho}{\sqrt{\varphi^2(\rho) - \alpha^2}} = \Phi_2(\alpha) \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

или

$$T = 2n_0 r_0 \int_{\rho_m}^{1} \frac{\nu^2 \rho^2 . \rho d\rho}{\rho^2 \sqrt{\varphi^2(\rho) - \alpha^2}}.$$

Вводя сюда новыя перемѣнныя x и y, получимъ

$$T = n_0 r_0 \int_{x_m}^{1} \frac{y dx}{x \sqrt{y - \alpha^2}}.$$

Подставимъ теперь сюда выраженіе y изъ формулы (59).

Тогда

$$T = n_0 r_0 \int_{x_m}^{1} \frac{a + bx + cx^2}{x\sqrt{(a - \alpha^2) + bx + cx^2}} dx$$

$$= n_0 r_0 \left[a \int_{x_m}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{(a - \alpha^2) + bx + cx^2}} + b \int_{x_m}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(a - \alpha^2) + bx + cx^2}} \right.$$

$$\left. + c \int_{x_m}^{1} \frac{x dx}{\sqrt{(a - \alpha^2) + bx + cx^2}} \right].$$

Займемся нахожденіемъ соотвѣтствующихъ неопредѣленныхъ интеграловъ.

Первый интегралъ есть ничто иное какъ то количество, которое мы обозначили раньше черезъ I.

Обозначимъ второй интегралъ черезъ I_1, а третій черезъ I_2:

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{(a - \alpha^2) + bx + cx^2}},$$

$$I_2 = \int \frac{x dx}{\sqrt{(a - \alpha^2) + bx + cx^2}}.$$

Начнемъ съ опредѣленія второго интеграла.

$$I_2 = \frac{1}{2c} \int \frac{(b + 2cx - b) dx}{\sqrt{(a - \alpha^2) + bx + cx^2}}$$

$$= \frac{1}{2c} \left[2\sqrt{(a - \alpha^2) + bx + cx^2} - bI_1 \right].$$

При $c > 0$

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{(a-\alpha^2)+bx+cx^2}} = \frac{1}{2\sqrt{c}} \cdot \lg \frac{b+2cx+2\sqrt{c}.\sqrt{(a-\alpha^2)+bx+cx^2}}{b+2cx-2\sqrt{c}.\sqrt{(a-\alpha^2)+bx+cx^2}}.$$

Въ справедливости этой формулы можно опять убѣдиться непосредственнымъ дифференцированіемъ.

Дѣйствительно,

$$\frac{1}{2\sqrt{c}} \cdot \left[\lg \frac{b+2cx+2\sqrt{c}.\sqrt{(a-\alpha^2)+bx+cx^2}}{b+2cx-2\sqrt{c}.\sqrt{(a-\alpha^2)+bx+cx^2}}\right]' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{c}} \cdot \left[\frac{1}{(b+2cx)+2\sqrt{c}.\sqrt{(a-\alpha^2)+bx+cx^2}} \left\{2c+2\sqrt{c} \cdot \frac{b+2cx}{2\sqrt{(a-\alpha^2)+bx+cx^2}}\right\}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{(b+2cx)-2\sqrt{c}.\sqrt{(a-\alpha^2)+bx+cx^2}} \left\{2c-2\sqrt{c} \cdot \frac{b+2cx}{2\sqrt{(a-\alpha^2)+bx+cx^2}}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{c}} \cdot \frac{1}{(b+2cx)^2-4c\,\{(a-\alpha^2)+bx+cx^2\}} \Big[\{(b+2cx)$$

$$-2\sqrt{c}.\sqrt{(a-\alpha^2)+bx+cx^2}\}\,\{2c.\sqrt{(a-\alpha^2)+bx+cx^2}+\sqrt{c}.(b+2cx)\}$$

$$-\{(b+2cx)+2\sqrt{c}.\sqrt{(a-\alpha^2)+bx+cx^2}\}\,\{2c.\sqrt{(a-\alpha^2)+bx+cx^2}$$

$$-\sqrt{c}.(b+2cx)\Big] \frac{1}{\sqrt{(a-\alpha^2)+bx+cx^2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{c}} \cdot \frac{1}{(b+2cx)^2-4c\,\{(a-\alpha^2)+bx+cx^2\}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(a-\alpha^2)+bx+cx^2}} \Big[2\sqrt{c}.(b+2cx)^2$$

$$-8c\sqrt{c}.\{(a-\alpha^2)+bx+cx^2\}\Big] = \frac{1}{\sqrt{(a-\alpha^2)+bx+cx^2}}.$$

Итакъ,

$$T = n_0 r_0 \, [aI + bI_1 + cI_2]_{x_m}^{1}$$

$$= n_0 r_0 \left[aI + bI_1 + c\left\{\frac{1}{2c}\left(2\sqrt{(a-\alpha^2)+bx+cx^2} - bI_1\right)\right\}\right]_{x_m}^{1}$$

$$= n_0 r_0 \left[aI + \frac{1}{2} bI_1 + \sqrt{(a-\alpha^2)+bx+cx^2}\right]_{x_m}^{1}.$$

Подставляя сюда выраженія I и I_1 и переходя къ предѣламъ, будемъ имѣть, принимая еще во вниманіе соотношенія (61) и (63),

$$T = n_0 r_0 \left[a \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-a}} \operatorname{arctg} w + \frac{1}{2} b \frac{1}{2\sqrt{c}} \cdot \lg \frac{b+2c+2\sqrt{c}.\sqrt{1-\alpha^2}}{b+2c-2\sqrt{c}.\sqrt{1-\alpha^2}} + \sqrt{1-\alpha^2}\right] \quad \ldots (68)$$

Мы нашли, такимъ образомъ, значенія Δ и T, выраженныя черезъ постоянныя a, b и c и перемѣнный параметръ α.

Если мы изъ этихъ двухъ выраженій исключимъ α, то можемъ получить T какъ функцію отъ Δ и постоянныхъ a, b и c,

$$T = \Psi(\Delta),$$

т.-е. мы получимъ для даннаго интервала *теоретическую формулу годографа.*

Исключеніе это, конечно, нельзя въ дѣйствительности произвести, такъ какъ α входитъ и въ алгебраическія и транцендентныя функціи, но, зная величины постоянныхъ a, b и c, можно, для каждаго заданнаго α, вычислить соотвѣтственныя величины T и Δ и сопоставить ихъ затѣмъ въ таблицѣ или представить зависимость T отъ Δ графически.

Если-бы мы взяли въ разложеніи (59) еще членъ содержащій x^3, напр. dx^3, то можно бы было получить еще болѣе точный результатъ, но это было-бы съ практической точки зрѣнія нецѣлесообразно, такъ какъ соотвѣтствующій анализъ привелъ-бы насъ къ эллиптическимъ интеграламъ, оперированіе съ которыми нѣсколько сложно.

Гораздо цѣлесообразнѣе итти обратнымъ путемъ, а именно, сохранить въ разложеніи (59) только два члена, но зато сблизить тѣ двѣ точки, напр. A_1 и A_2 (см. черт. 29), между которыми можно считать коеффиціенты разложенія (59) постоянными.

По этому пути мы теперь и пойдемъ.

Всякую функцію можно, конечно, съ большимъ или меньшимъ приближеніемъ, представить въ извѣстныхъ предѣлахъ полиномомъ второй степени вида формулы (59), но, принимая во вниманіе, что

$$y = \nu^2 x \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (\text{формула } (57))$$

и что, при $x = 0$, ν^2 остается конечнымъ, естественно положить въ формулѣ (59) коеффиціентъ $a = 0$.

Тогда

$$y = bx + cx^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (69)$$

Это равносильно тому, чтобы положить

$$\nu^2 = b + cx \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (70)$$

c есть величина положительная, потому что $\nu^2 = \left(\frac{v_0}{v}\right)^2$ вообще возрастаетъ вмѣстѣ съ x.

При сохраненіи-же трехчленнаго выраженія (59), надо уже положить

$$\nu^2 = \frac{a}{x} + b + cx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (71)$$

Для участка кривой $y = F(x)$, прилегающаго къ центру O (см. черт. 29), надо, какъ мы раньше видѣли, обязательно положить $a = 0$, потому что, при $x = 0$, ν^2 остается конечнымъ. Для другихъ-же участковъ кривой можно представить зависимость ν^2 отъ x функціей вида формулы (71); для этого надо только соотвѣтственнымъ образомъ опредѣлить коэффиціенты a, b и c. Если мы имѣемъ три пары соотвѣтственныхъ величинъ ν^2 и x, то по нимъ можно всегда опредѣлить значеніе этихъ коэффиціентовъ. Вопросъ сводится къ тому, чтобы черезъ три заданныя точки, лежащія на кривой $y = \nu^2 x = F(x)$, провести кривую второго порядка. Если точки лежатъ достаточно близко другъ отъ друга, то эта кривая будетъ мало отличаться отъ заданной кривой $y = F(x)$.

Но мы предположимъ теперь, что въ данномъ интервалѣ ν^2, въ зависимости отъ x, можетъ быть представлено формулой (70), а y формулой (69).

Соотвѣтственно этому преобразуемъ предыдущія уравненія, положивъ въ нихъ $a = 0$. Эти уравненія относятся къ участку, начинающемуся у поверхности земли.

Въ этомъ случаѣ формула (61) даетъ

$$b = 1 - c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (72)$$

Изъ формулы (66), при $a = 0$, имѣемъ

$$w = \frac{2\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{2\alpha^2 - 1 + c}.$$

Это выраженіе можно преобразовать слѣдующимъ образомъ:

$$\alpha = \cos e_0,$$

$$\sqrt{1-\alpha^2} = \sin e_0,$$

$$2\alpha^2 - 1 = 2\cos^2 e_0 - 1 = \cos 2e_0,$$

слѣдовательно,

$$w = \frac{\sin 2e_0}{\cos 2e_0 + c} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (73)$$

Изъ формулы-же (67) слѣдуетъ, что

$$\vartheta = \frac{\Delta}{r_0} = \operatorname{arctg} w \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (74)$$

Зная соотвѣтственныя величины Δ и e_0 изъ годографа, можно тотчасъ-же опредѣлить и значенiе постоянной c.

Изъ формулы-же (68), при $a = 0$, имѣемъ

$$T = n_0 r_0 \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{1-c}{\sqrt{c}} \cdot \lg \frac{1+c+2\sqrt{c}\sqrt{1-\alpha^2}}{1+c-2\sqrt{c}\sqrt{1-\alpha^2}} + \sqrt{1-\alpha^2} \right]$$

или

$$T = n_0 r_0 \left[\sin e_0 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1-c}{\sqrt{c}} \cdot \lg \frac{1+c+2\sqrt{c}.\sin e_0}{1+c-2\sqrt{c}.\sin e_0} \right] \ldots\ldots (75)$$

Исключая e_0 изъ формулъ (74) и (75), получимъ опять теоретическую форму годографа.

Посмотримъ во что обратятся предыдущiя формулы, если $c = 0$, т.-е. если ν^2 вездѣ постоянно и равно 1.

Это предположенiе соотвѣтствуетъ случаю однородности слоевъ земного шара.

Тогда

$$w = \operatorname{tg} 2e_0$$

и

$$\Delta = r_0 \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 2e_0) = r_0 . 2e_0.$$

Въ этомъ случаѣ $2e_0$ есть ничто иное, какъ уголъ ϑ при центрѣ, соотвѣтствующiй эпицентральному разстоянiю Δ. Слѣдовательно, траекторiя луча совпадаетъ съ хордой EB (см. черт. (19)), соединяющей эпицентръ съ мѣстомъ наблюденiя.

Для нахожденiя времени пробѣга T, опредѣлимъ во что обратится второй членъ въ формулѣ (75), содержащiй c, когда $c = 0$.

При малыхъ значенiяхъ c,

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1-c}{\sqrt{c}} \cdot \lg \frac{1+c+2\sqrt{c}.\sin e_0}{1+c-2\sqrt{c}\sin e_0}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1-c}{\sqrt{c}} \cdot \left[\lg \frac{1 + \frac{2\sqrt{c}}{1+c} \cdot \sin e_0}{1 - \frac{2\sqrt{c}}{1+c} \cdot \sin e_0} \right]$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1-c}{\sqrt{c}} \cdot \left[\lg\left\{1 + \frac{2\sqrt{c}}{1+c} \cdot \sin e_0\right\} - \lg\left\{1 - \frac{2\sqrt{c}}{1+c} \cdot \sin e_0\right\} \right]$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1-c}{\sqrt{c}} \cdot \frac{4\sqrt{c}}{1+c} \cdot \sin e_0 \left[1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{c}{(1+c)^2} \sin^2 e_0 \right]$$

$$= \frac{1-c}{1+c} \cdot \sin e_0 \cdot \left[1 + \frac{4}{3} c \sin^2 e_0 \right].$$

Итакъ, при $c=0$,

$$T=2n_0 r_0 \sin e_0 = 2r_0 \sin\frac{\vartheta}{2}\cdot\frac{1}{v_0}.$$

$2r_0\sin\frac{\vartheta}{2}$ есть ничто иное, какъ длина хорды EB.

Вернемся теперь опять къ формулѣ (74).

При ея выводѣ мы предполагали, что для всѣхъ слоевъ, по которымъ идетъ данный сейсмическій лучъ, c сохраняетъ одно и то-же значеніе, т.-е., что, въ предѣлахъ отъ $x=1$ до $x=x_m$, ν^2 можетъ быть представлено функціей вида формулы (70) съ тѣмъ-же значеніемъ постоянной c.

Величина x_m, соотвѣтствующая наибольшей глубинѣ проникновенія луча, опредѣлится изъ условія

$$y_m = bx_m + cx_m^2 = \alpha^2 = \cos^2 e_0 \,.\,.\, \text{(см. формулу (63))}$$

Отсюда имѣемъ, такъ какъ $b=1-c$,

$$x_m^2 + \frac{1-c}{c}x_m - \frac{\alpha^2}{c} = 0$$

или

$$x_m = -\frac{1-c}{2c} + \sqrt{\left(\frac{1-c}{2c}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{c}},$$

или еще

$$x_m = \frac{1}{2c}\cdot\left[\sqrt{(1-c)^2+4c\alpha^2}-(1-c)\right] \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (76)$$

При $c=0$,

$$x_m = \alpha^2 = \cos^2 e_0,$$

какъ и должно быть, потому что $r_m = r_0\cos e_0$, а, слѣдовательно, $\rho_m = \cos e_0$.

Коеффиціентъ c можно считать постояннымъ только въ предѣлахъ опредѣленнаго слоя; переходя же къ слѣдующему слою, мы должны уже измѣнить величину c и т. д.

Это равносильно тому, что мы разбиваемъ кривую $y=F(x)$ (см. черт. 29) на участки, напр. отъ A_0 до A_1, отъ A_1 до A_2 и т. д., и для каждаго такого участка принимаемъ свое опредѣленное c.

Посмотримъ теперь, какъ-же это можно практически осуществить и какъ можно опредѣлить зависимость скорости распространенія сейсмическихъ волнъ v отъ глубины.

Для этого выбираемъ опредѣленное начальное эпицентральное разстояніе Δ, напр. 1000 километровъ, и опредѣляемъ, по годографу, соотвѣтствующую ему величину $\alpha=\cos e_0$ (см. формулу (54)).

По этимъ даннымъ опредѣляемъ величину c.

Изъ формулы (74) имѣемъ

$$w = \operatorname{tg} \frac{\Delta}{r_0} = \operatorname{tg} \vartheta,$$

а изъ формулы (73)

$$w \cos 2e_0 + w\, c = \sin 2e_0$$

или

$$c = \frac{1}{w} \{\sin 2e_0 - w \cos 2e_0\}.$$

Подставляя сюда выраженіе для w изъ предыдущей формулы, получимъ

$$c = \frac{1}{\operatorname{tg} \vartheta} \cdot \left\{\sin 2e_0 - \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \cos 2e_0\right\}$$

или

$$c = \frac{\sin \{2e_0 - \vartheta\}}{\sin \vartheta} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (77)$$

Эта формула очень проста и изящна.

Зная, такимъ образомъ, величины $\alpha = \cos e_0$ и c, опредѣлимъ по формулѣ (76) и соотвѣтствующую величину x_m.

Для этой цѣли подставимъ выраженіе c изъ формулы (77) въ формулу (76).

$$x_m = \frac{\sin \vartheta}{2 \sin (2e_0 - \vartheta)} \left[\sqrt{1 + 2c(2\alpha^2 - 1) + c^2} - \left\{1 - \frac{\sin (2e_0 - \vartheta)}{\sin \vartheta}\right\}\right].$$

Найдемъ сначала выраженіе этого радикала.

$$\sqrt{1 + 2c(2\alpha^2 - 1) + c^2} = \sqrt{1 + \frac{\sin^2 (2e_0 - \vartheta)}{\sin^2 \vartheta} + 2\frac{\sin (2e_0 - \vartheta)}{\sin \vartheta} \cos 2e_0}$$

$$= \frac{1}{\sin \vartheta} \sqrt{\sin^2 \vartheta + \sin (2e_0 - \vartheta) \{\sin 2e_0 \cos \vartheta - \sin \vartheta \cos 2e_0 + 2 \sin \vartheta \cos 2e_0\}}$$

$$= \frac{1}{\sin \vartheta} \sqrt{\sin^2 \vartheta + \sin (2e_0 - \vartheta) \sin (2e_0 + \vartheta)}$$

$$= \frac{1}{\sin \vartheta} \sqrt{\sin^2 \vartheta + \{\sin 2e_0 \cos \vartheta - \sin \vartheta \cos 2e_0\} \{\sin 2e_0 \cos \vartheta + \sin \vartheta \cos 2e_0\}}$$

$$= \frac{1}{\sin \vartheta} \sqrt{\sin^2 \vartheta + \sin^2 2e_0 \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta \cos^2 2e_0}$$

$$= \frac{1}{\sin \vartheta} \sqrt{\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta \cos^2 2e_0 - \sin^2 \vartheta \cos^2 2e_0}$$

$$= \frac{1}{\sin \vartheta} \sqrt{1 - \cos^2 2e_0}$$

$$= \frac{\sin 2e_0}{\sin \vartheta}.$$

Подставимъ теперь это выраженіе въ предыдущую формулу для x_m. Тогда

$$x_m = \frac{1}{2\sin(2e_0 - \vartheta)} \cdot [\sin 2e_0 - \sin\vartheta + \sin(2e_0 - \vartheta)]$$

$$= \frac{1}{2\sin(2e_0 - \vartheta)} [\sin 2e_0 (1 + \cos\vartheta) - \sin\vartheta (1 + \cos 2e_0)]$$

$$= \frac{1}{2\sin(2e_0 - \vartheta)} \left[2\sin 2e_0 \cos^2\frac{\vartheta}{2} - 2\sin\vartheta\cos^2 e_0\right]$$

$$= \frac{2\sin e_0 \cos e_0 \cos^2\frac{\vartheta}{2} - 2\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos^2 e_0}{\sin 2\left(e_0 - \frac{\vartheta}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\cos e_0 \cos\frac{\vartheta}{2}\left\{\sin e_0 \cos\frac{\vartheta}{2} - \sin\frac{\vartheta}{2}\cos e_0\right\}}{2\sin\left(e_0 - \frac{\vartheta}{2}\right)\cos\left(e_0 - \frac{\vartheta}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\cos e_0 \cos\frac{\vartheta}{2}\sin\left(e_0 - \frac{\vartheta}{2}\right)}{2\sin\left(e_0 - \frac{\vartheta}{2}\right)\cos\left(e_0 - \frac{\vartheta}{2}\right)},$$

или, окончательно,

$$x_m = \frac{\cos e_0 \cos\frac{\vartheta}{2}}{\cos\left(e_0 - \frac{\vartheta}{2}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (78)$$

Эта формула также отличается большой простотой.

Если $c = 0$, т.-е. всѣ слои однородны, то $e_0 = \frac{\vartheta}{2}$ и $x_m = \cos^2 e_0$, что, какъ мы видѣли раньше, и должно въ данномъ случаѣ имѣть мѣсто.

Формула (78) опредѣляетъ глубину слоя, до котораго проникаетъ сейсмическій лучъ, идущій изъ эпицентральнаго разстоянія Δ.

На этой глубинѣ $\rho_m = \sqrt{x_m}$, $y_m = \alpha^2 = \cos^2 e_0$, а $\nu_m = \sqrt{\frac{y_m}{x_m}} = \frac{\cos e_0}{\sqrt{x_m}}$ (см. формулу (57)).

Обозначимъ значенія r, n и v на этой глубинѣ соотвѣтственно индексомъ 1.

Тогда

$$r_1 = \sqrt{x_m} \cdot r_0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (79)$$

а, такъ какъ $\nu = \frac{n}{n_0} = \frac{v_0}{v}$, то

$$n_1 = n_0 \frac{\cos e_0}{\sqrt{x_m}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (80)$$

и

$$v_1 = v_0 \frac{\sqrt{x_m}}{\cos e_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (81)$$

Эта послѣдняя формула даетъ намъ скорость распространенія сейсмическихъ волнъ на глубинѣ, соотвѣтствующей разстоянію r_1 отъ центра земли.

Опредѣливши, такимъ образомъ, r_1 и v_1, переходимъ къ слѣдующему эпицентральному разстоянію Δ', гдѣ напр. $\Delta' = 2\Delta = 2000$ километрамъ.

По годографу опредѣляемъ соотвѣтствующую величину $\alpha' = \cos e'$.

Мы можемъ теперь относительно шара радіуса r_1 разсуждать точно такъ-же, какъ мы разсуждали раньше относительно шара радіуса r_0.

Для этого новаго шара будемъ выражать величины r, n, и v въ доляхъ ихъ значенія у поверхности шара съ радіусомъ r_1 и соотвѣтственно этому положимъ:

$$\left.\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{r}{r_1} \\ \nu_1 &= \frac{n}{n_1} = \frac{v_1}{v} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (82)$$

Сейсмическій лучъ, идущій изъ эпицентральнаго разстоянія Δ', вступаетъ и выходитъ изъ этого новаго шара подъ угломъ e_1.

Положимъ

$$\cos e_1 = \alpha_1 .$$

Эта величина опредѣлится тотчасъ-же по формулѣ (18):

$$\nu_m \rho_m \cos e_1 = \alpha' = \cos e' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (83)$$

Такъ какъ ν_m и ρ_m извѣстны, а α' задано, то отсюда опредѣлится и e_1.

Уголъ при центрѣ, соотвѣтствующій пути сейсмическаго луча внутри второго шара съ радіусомъ r_1, пусть будетъ ϑ_1, а уголъ при центрѣ, соотвѣтствующій эпицентральному разстоянію Δ' на поверхности шара радіуса r_0, пусть будетъ $\vartheta' = \frac{\Delta'}{r_0}$.

На слѣдующемъ черт. 30

$$\smile APB = \Delta, \text{ а } \smile A'PB' = \Delta',$$

$$\angle AOB = \vartheta, \text{ а } \angle A'OB' = \vartheta',$$

$$OA' = OA = OB = OB' = r_0;$$

$$OA_1 = OM = OB_1 = r_1,$$

а

$$OM_1 = r_2.$$

$$\angle A_1OB_1 = \vartheta_1,$$

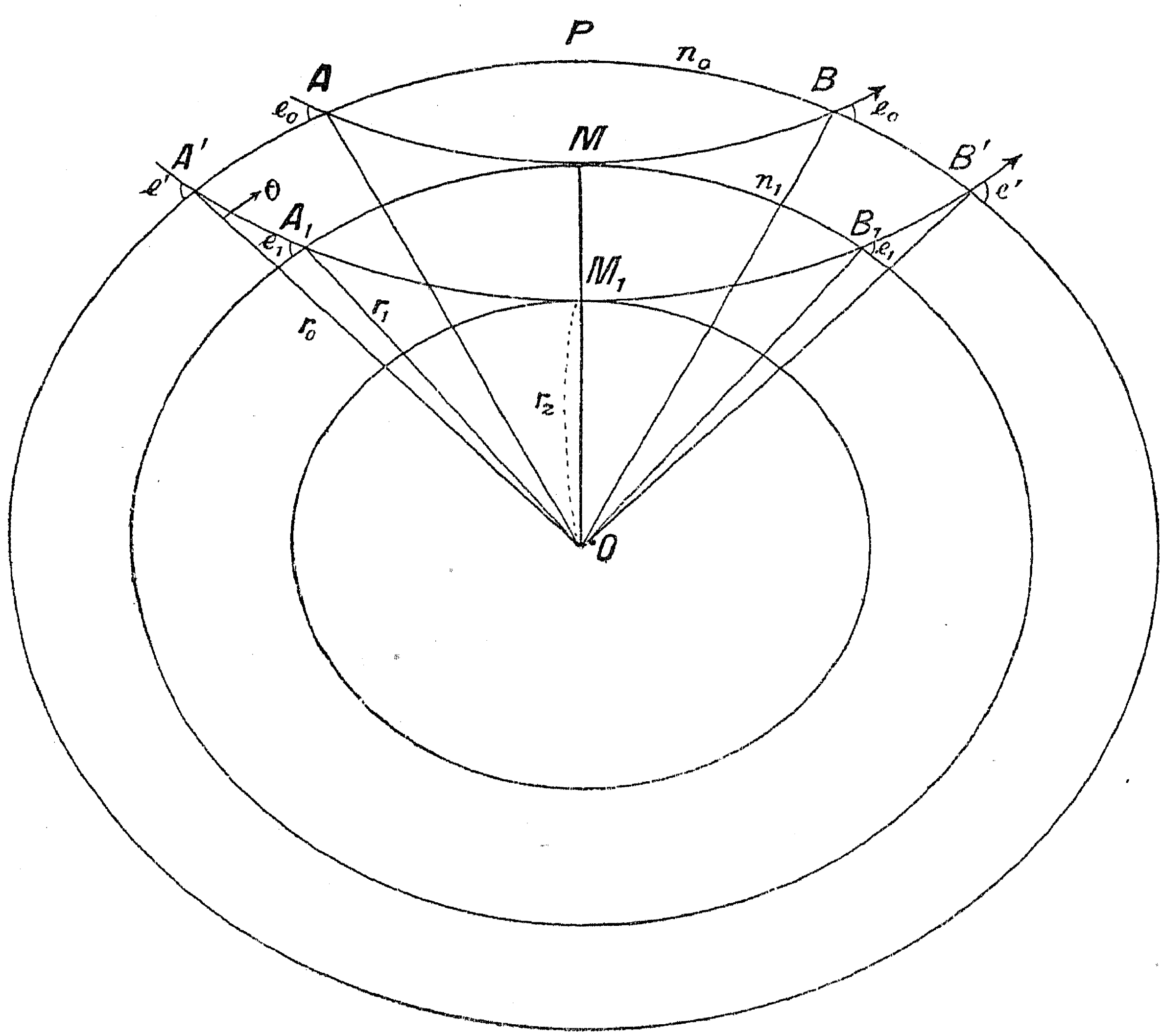
причемъ

$$\vartheta_1 < \vartheta'.$$

Остается теперь только опредѣлить разницу между ϑ' и ϑ_1.

Эта разница обусловливается пробѣгомъ луча въ слоѣ, заключенномъ между радіусами r_0 и r_1.

Черт. 30.



Общая формула (19) даетъ намъ для измѣненія угла θ

$$d\theta = \frac{\alpha d\rho}{\rho \sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{формула (19)}$$

Мы должны примѣнить эту формулу для пробѣга даннаго луча въ первомъ, верхнемъ слоѣ между r_0 и r_1, а потому мы въ ней должны положить

$$\rho = \frac{r}{r_0},$$

$$x = \rho^2,$$

$$\nu^2 \rho^2 = \nu^2 x = y = bx + cx^2$$

и

$$\alpha = \alpha'.$$

Здѣсь

$$b = 1 - c,$$

гдѣ c опредѣлено уже для верхняго слоя по формулѣ (77).

Итакъ,

$$d0 = \frac{1}{2} \alpha' \frac{dx}{x \sqrt{bx + cx^2 - \alpha'^2}}.$$

Взявъ интегралъ отъ этого выраженія отъ слоя радіуса r_1 до поверхности земли или отъ $x = x_m$ до $x = 1$ и умноживъ результатъ на два, получимъ разницу между углами ϑ' и ϑ_1.

Слѣдовательно,

$$\vartheta_1 = \vartheta' - \alpha' \int_{x_m}^{1} \frac{dx}{x \sqrt{bx + cx^2 - \alpha'^2}} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (84)$$

Выраженіе неопредѣленнаго интеграла I' получится изъ формулы (65), положивши въ ней $a = 0$.

$$I' = \int \frac{dx}{x \sqrt{bx + cx^2 - \alpha'^2}} = \frac{1}{\alpha'} \cdot \operatorname{arctg} \frac{bx - 2\alpha'^2}{2\alpha' \sqrt{bx + cx^2 - \alpha'^2}} \ldots \ldots (85)$$

Вводя слѣдующее обозначеніе:

$$w' = \frac{2\alpha' \sqrt{bx + cx^2 - \alpha'^2}}{2\alpha'^2 - bx}, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (86)$$

получимъ, (см. предыдущій выводъ формулы (67)),

$$I' = \frac{1}{\alpha'} \operatorname{arctg} \frac{-1}{w'} = \frac{1}{\alpha'} \left[\operatorname{arctg} w' + \frac{\pi}{2} \right].$$

Слѣдовательно,

$$\vartheta_1 = \vartheta' - \left[\operatorname{arctg} w' + \frac{\pi}{2} \right]_{x_m}^{1}$$

или

$$\vartheta_1 = \vartheta' - \left[\operatorname{arctg} \frac{2\alpha' \sqrt{b + c - \alpha'^2}}{2\alpha'^2 - 1 + c} - \operatorname{arctg} \frac{2\alpha' \sqrt{bx_m + cx_m{}^2 - \alpha'^2}}{2\alpha'^2 - (1 - c)\, x_m} \right].$$

Но

$$b + c = 1,$$

$$bx_m + cx_m{}^2 = y_m = \alpha^2 = \cos^2 e_0$$

и

$$\alpha' = \cos e',$$

слѣдовательно,

$$\vartheta_1 = \vartheta' - \left[\operatorname{arctg}\frac{\sin 2e'}{\cos 2e' + c} - \operatorname{arctg}\frac{2\cos e'\sqrt{\cos^2 e_0 - \cos^2 e'}}{2\cos^2 e' - (1-c)x_m}\right] \ldots . (87)$$

Такъ какъ c и x_m извѣстны уже изъ формулъ (77) и (78), то легко вычислить и ϑ_1.

Теперь переносимъ всѣ наши предыдущія разсужденія на шаръ радіуса r_1.

Лучъ, вступившій въ этотъ шаръ подъ угломъ e_1, опредѣляемымъ уравненіемъ (83), дойдетъ до максимальной глубины M_1, соотвѣтствующей радіусу r_2. Соотвѣтствующая величина ρ_1 пусть будетъ $\rho_{m_1} = \frac{r_2}{r_1}$.

Положимъ $\rho_1{}^2 = x_1$ и пусть между слоями съ радіусомъ r_1 и r_2 имѣетъ мѣсто слѣдующее соотношеніе:

$$\nu_1{}^2 = b_1 + c_1 x_1 \ldots \ldots . . \text{(см. формулу (70))}$$

и

$$y_1 = \nu_1{}^2 x_1 = b_1 x_1 + c_1 x_1^2.$$

При $x_1 = 1$, $\rho_1 = 1$, $r = r_1$, $n = n_1$ и $\nu_1 = 1$; слѣдовательно,

$$b_1 + c_1 = 1.$$

При $\qquad x_1 = x_{m_1} = (\rho_{m_1})^2, \qquad r = r_1\,\rho_{m_1} = r_2.$

Въ этомъ случаѣ $\cos e = 1$ и

$$\nu_{m_1}{}^2 \rho_{m_1}{}^2 = \nu_{m_1}{}^2 x_{m_1} = y_{m_1} = \alpha_1 = \cos e_1.$$

Примѣняя къ этому шару, какъ и раньше, ту-же формулу (67), будемъ имѣть, при $a = 0$,

$$\vartheta_1 = \operatorname{arctg} w_1,$$

гдѣ

$$w_1 = \frac{\sin 2e_1}{\cos 2e_1 + c_1} \ldots \ldots . . \text{(см. формулу (73))}$$

Формулы будутъ вполнѣ тождественны предыдущимъ, но только теперь при отдѣльныхъ величинахъ будетъ стоять индексъ 1.

Мы найдемъ, такимъ образомъ, что

$$c_1 = \frac{\sin(2e_1 - \vartheta_1)}{\sin\vartheta_1} \ldots\ldots\ldots (\text{см. формулу (77)})$$

$$x_{m_1} = \frac{\cos e_1 \cos\frac{\vartheta_1}{2}}{\cos\left(e_1 - \frac{\vartheta_1}{2}\right)} \ldots\ldots\ldots (\text{см. формулу (78)})$$

$$\nu_{m_1} = \frac{\cos e_1}{\sqrt{x_{m_1}}},$$

$$\rho_{m_1} = \sqrt{x_{m_1}}.$$

Но, такъ какъ

$$\rho_1 = \frac{r}{r_1} \text{ и } \nu_1 = \frac{n}{n_1},$$

то, обозначая величины n и v въ разстояніи r_2 отъ центра шара соотвѣтственно черезъ n_2 и v_2, будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} r_2 &= \sqrt{x_{m_1}}\,.\,r_1 \\ n_2 &= n_1\frac{\cos e_1}{\sqrt{x_{m_1}}} \\ v_2 &= v_1\frac{\sqrt{x_{m_1}}}{\cos e_1} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (88)$$

Послѣдняя формула даетъ намъ скорость v_2 въ разстояніи r_2 отъ центра земли.

Этотъ анализъ можно продолжить и дальше по той-же самой схемѣ.

Мы возьмемъ теперь шаръ радіуса r_2 и будемъ выражать различные r и n въ доляхъ ихъ значеній у поверхности этого второго шара; напр.

$$\rho_2 = \frac{r}{r_2},$$

$$\nu_2 = \frac{n}{n_2} = \frac{v_2}{v}.$$

Послѣ этого возьмемъ новое эпицентральное разстояніе Δ'' съ соотвѣтствующимъ угломъ e'', гдѣ $\cos e'' = \alpha''$.

Тогда уголъ e_2 входа луча въ этотъ третій шаръ опредѣлится изъ уравненія аналогичнаго уравненію (83):

$$\frac{n_2}{n_0}\cdot\frac{r_2}{r_0}\cos e_2 = \alpha'' = \cos e''.$$

Останется только опредѣлить уголъ при центрѣ ϑ_2, соотвѣтствующій пути сейсмическаго луча въ этомъ третьемъ слоѣ.

Здѣсь надо только отдѣльно вычислить измѣненіе θ, какъ въ первомъ, такъ и второмъ слоѣ.

Мы придемъ опять къ интеграламъ вида формулы (84), но при этомъ надо имѣть въ виду, что во второмъ интегралѣ для слоя, заключеннаго между r_1 и r_2, постоянныя b_1 и c_1 пріурочены къ тому случаю, когда величины r и n выражены черезъ ρ_1 и ν_1, т.-е. въ доляхъ ихъ значеній у поверхности шара радіуса r_1.

Этотъ анализъ мы дальше развивать не будемъ, такъ какъ путь къ рѣшенію поставленной задачи совершенно ясенъ.

Мы можемъ, такимъ образомъ, пользуясь годографами, прослѣдить измѣненіе скорости, какъ продольныхъ, такъ и поперечныхъ волнъ вглубь, отъ слоя къ слою.

Чѣмъ больше интерваловъ мы, такимъ образомъ, возьмемъ, тѣмъ лучше мы изучимъ законъ измѣняемости скорости сейсмическихъ волнъ съ глубиной.

Къ такому-же результату мы могли-бы прійти и помимо всякихъ годографовъ, если-бы намъ удалось прямо измѣрить уголъ выхода сейсмической радіаціи e_0 при различныхъ эпицентральныхъ разстояніяхъ Δ.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что ближайшее изслѣдованіе траекторій сейсмическихъ лучей открываетъ намъ путь къ изученію физическихъ свойствъ слоевъ, заключенныхъ въ совершенно недоступныхъ намъ нѣдрахъ земли.

Траекторію сейсмическихъ лучей внутри земли можно легко получить и чисто геометрическимъ путемъ, основываясь на ранѣе выведенномъ выраженіи для радіуса кривизны траекторіи луча R (см. формулу (31)). Путь этотъ былъ указанъ германскимъ сейсмологомъ Wiechert'омъ.

Дѣйствительно, мы имѣли раньше

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_0 \nu} \cdot \frac{d\nu}{d\rho} \cdot \cos e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

Если мы возьмемъ теперь какой-нибудь опредѣленный слой внутри земли и обозначимъ углы, подъ которыми различные сейсмическіе лучи входятъ и выходятъ изъ этого слоя черезъ e_1, e_2, e_3 и т. д., а соотвѣтствующіе радіусы кривизны траекторіи лучей въ этихъ точкахъ черезъ R_1, R_2, R_3 и т. д., то, на основаніи предыдущаго выраженія, будемъ имѣть:

$$R_1 : R_2 : R_3 : \ldots = \frac{1}{\cos e_1} : \frac{1}{\cos e_2} : \frac{1}{\cos e_3} : \ldots\ldots\ldots (89)$$

Пусть на слѣдующемъ чертежѣ 31 E представляетъ собою эпицентръ землетрясенія, а A_1, A_2, A_3 и т. д. рядъ точекъ на поверхности земли, находящихся отъ эпицентра въ различныхъ разстояніяхъ $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ и т. д.

Возьмемъ сначала наименьшее разстояніе Δ_1.

Сейсмическій лучъ, выходящій изъ E и приходящій въ A_1, проникаетъ внутрь земли до глубины, соотвѣтствующей разстоянію r_1 отъ центра земли.

Возьмемъ Δ_1 настолько малымъ, чтобы можно было считать радіусъ кривизны R_1 траекторіи луча, заключенной въ слоѣ между r_1 и поверхностью земли ($r = r_0$), постояннымъ.

Это предположеніе равносильно тому, что мы какъ-бы вводимъ въ формулѣ (31) для всего даннаго слоя нѣкоторое среднее значеніе

$$\frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{d\rho} = \frac{d \lg \nu}{d\rho}.$$

Эпицентральному разстоянію Δ_1 соотвѣтствуетъ изъ годографа опредѣленный уголъ e_1 выхода сейсмической радіаціи.

Тогда чертимъ двѣ прямыя $A_1 P_1$ и EP_1 подъ угломъ e_1 къ соотвѣтствующимъ радіусамъ шара OA_1 и OE.

Въ пересѣченіи этихъ прямыхъ, въ точкѣ P_1, и будетъ находиться центръ круга, который соотвѣтствуетъ траекторіи луча въ первомъ слоѣ. Радіусъ этого круга $R_1 = P_1 A_1$.

Вычерчиваемъ этотъ кругъ.

Ближайшая къ центру земли точка этого круга соотвѣтствуетъ радіусу $OD_1 = r_1$, который опредѣляетъ собою нижнюю границу перваго слоя.

Переходимъ затѣмъ къ точкѣ A_2, въ разстояніи Δ_2 отъ E. Этому разстоянію соотвѣтствуетъ уголъ e_2.

Въ точкахъ A_2 и E проводимъ опять двѣ прямыя $A_2 P_2$ и EP_2' подъ угломъ e_2 къ соотвѣтствующимъ радіусамъ шара OA_2 и OE.

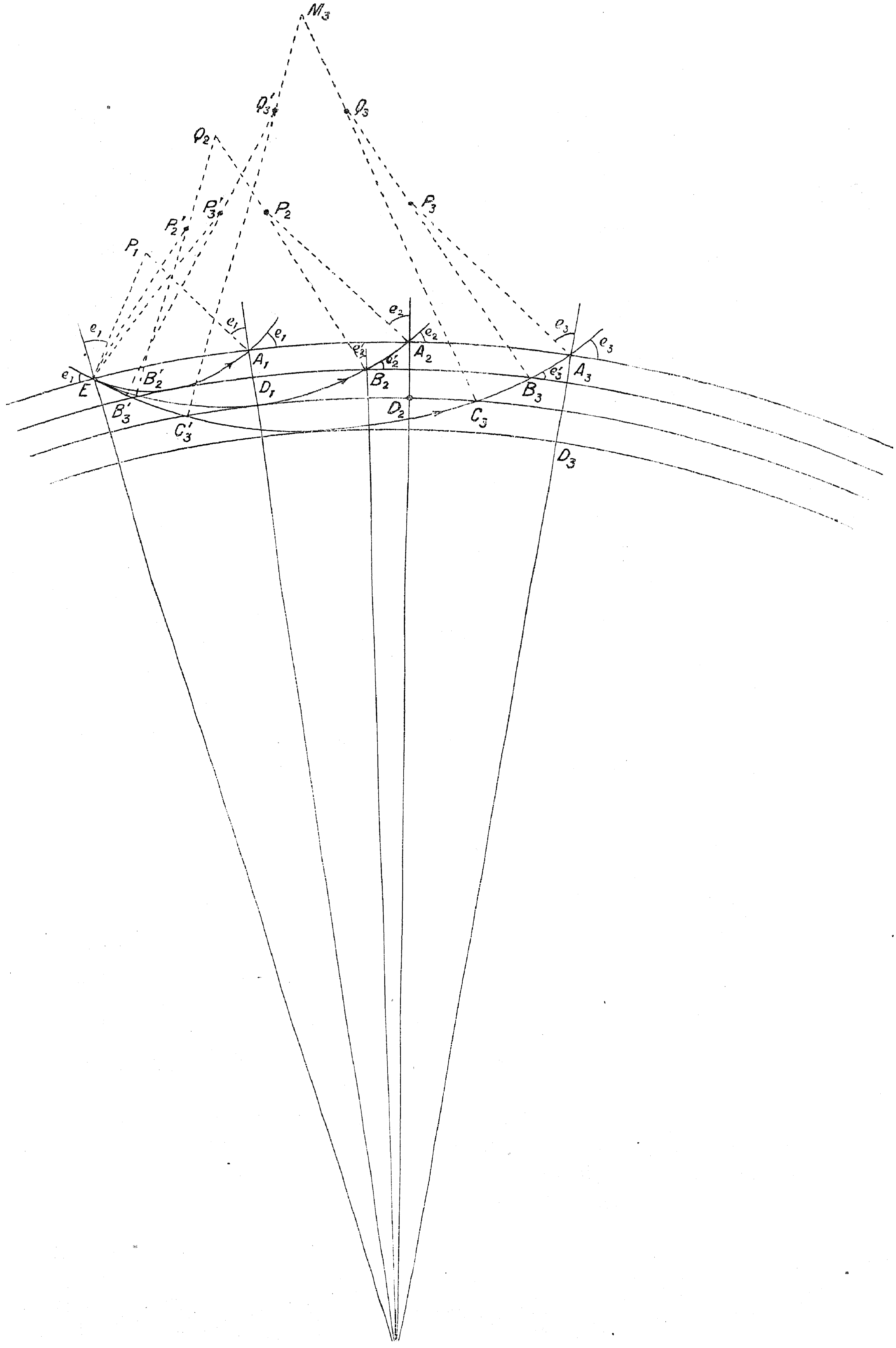
На этихъ прямыхъ откладываемъ величину R_2, соотвѣтствующую радіусу кривизны этого второго луча (пріуроченнаго къ разстоянію Δ_2) *въ первомъ слоѣ.* R_2 получается непосредственно изъ формулы (89), такъ какъ во всемъ первомъ слоѣ мы считаемъ $\frac{d \lg \nu}{d\rho}$ постояннымъ.

Итакъ,

$$R_2 = R_1 \cdot \frac{\cos e_1}{\cos e_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (90)$$

Получаемъ такимъ образомъ точки P_2 и P_2', изъ которыхъ, какъ изъ центровъ, радіусомъ R_2 вычерчиваемъ дуги $A_2 B_2$ и EB_2', представляющія собою части траекторіи второго луча въ первомъ-же слоѣ.

Черт. 31.



M_3
Q_3'
Q_3
Q_2
P_3'
P_2
P_2'
P_3
P_1
e_1
e_2
e_3
e_2'
e_3'
E
A_1
A_2
A_3
B_2'
B_3'
B_2
B_3
C_3'
C_3
D_1
D_2
D_3

Точно такимъ же образомъ вычерчиваемъ изъ точекъ P_3 и P_3' радіусомъ $R_3 = R_1 \frac{\cos e_1}{\cos e_3}$ дуги $A_3 B_3$ и EB_3', соотвѣтствующія части траекторіи сейсмическаго луча, пріуроченнаго къ эпицентральному разстоянію Δ_3 и т. д.

Такимъ образомъ, для любого эпицентральнаго разстоянія Δ мы можемъ вычертить траекторію сейсмическаго луча *въ первомъ слоѣ.*

Переходимъ теперь ко второму слою, заключенному между радіусами r_1 и $r_2 = OD_2$, и внутри котораго мы опять отождествляемъ часть траекторіи луча съ кругомъ.

Чтобы вычертить траекторію второго луча, идущаго изъ E въ A_2, *во второмъ слоѣ,* продолжаемъ прямыя $B_2 P_2$ и $B_2' P_2'$, соотвѣтственно перпендикулярныя къ элементу траекторіи луча въ точкахъ B_2 и B_2' до ихъ взаимнаго пересѣченія въ точкѣ Q_2.

Тогда изъ точки Q_2, какъ изъ центра, радіусомъ $R_2' = Q_2 B_2$ чертимъ дугу $B_2' B_2$, которая и представитъ собою траекторію второго луча во второмъ-же слоѣ. Ближайшая къ центру земли точка этого круга соотвѣтствуетъ радіусу $r_2 = OD_2$, опредѣляющему собою нижнюю границу второго слоя.

Уголъ выхода e_2' второго луча изъ второго слоя можно снять съ чертежа.

Переходимъ теперь къ третьему лучу, идущему изъ E въ A_3.

Части траекторіи этого луча $B_3 A_3$ и EB_3' въ первомъ слоѣ извѣстны, а потому мы можемъ опредѣлить соотвѣтствующій уголъ выхода e_3' этого луча изъ второго слоя.

Соотвѣтствующій радіусъ кривизны R_3' этого луча во второмъ слоѣ опредѣлится по формулѣ, аналогичной формулѣ (90), а именно

$$R_3' = R_2' \cdot \frac{\cos e_2'}{\cos e_3'}.$$

Тогда, на продолженіи линій $B_3 P_3$ и $B_3' P_3'$, соотвѣтственно перпендикулярныхъ элементамъ траекторіи луча около точекъ B_3 и B_3', откладываемъ длину R_3'. Получаемъ точки Q_3 и Q_3'.

Затѣмъ изъ точекъ Q_3 и Q_3', какъ изъ центровъ, радіусомъ R_3' зачерчиваемъ дуги $B_3 C_3$ и $B_3' C_3'$, представляющія собою части траекторіи третьяго луча во второмъ слоѣ и т. д.

Чтобы замкнуть траекторію этого третьяго луча въ третьемъ слоѣ, продолжаемъ линіи $C_3 Q_3$ и $C_3' Q_3'$ до ихъ взаимнаго пересѣченія въ точкѣ M_3, и тогда изъ точки M_3, какъ изъ центра, радіусомъ $M_3 C_3$ чертимъ дугу $C_3 C_3'$, которая и представитъ собою траекторію третьяго луча въ третьемъ слоѣ.

Ближайшая къ центру шара точка этого круга соотвѣтствуетъ радіусу $r_3 = OD_3$, который и опредѣляетъ собою нижнюю границу третьяго слоя.

Такимъ образомъ, переходя постепенно отъ одного эпицентральнаго разстоянія и отъ одного слоя къ другому, можно получить, чисто графическимъ путемъ, траекторіи продольныхъ и поперечныхъ сейсмическихъ лучей внутри земного шара для какого угодно эпицентральнаго разстоянія Δ.

Изслѣдованіемъ вопроса о траекторіяхъ сейсмическихъ лучей и о зависимости скорости распространенія продольныхъ и поперечныхъ волнъ отъ глубины слоя занимались Wiechert, Zoeppritz и Geiger, причемъ, для вычисленія v какъ функцію отъ r, они пользовались нѣсколько иными формулами, чѣмъ тѣ, которыя были выведены здѣсь, но существо дѣла отъ этого нисколько не измѣняется.

Я приведу здѣсь результаты послѣднихъ изслѣдованій Zoeppritz'а и Geiger'а, которыя представляютъ собою много весьма интереснаго и поучительнаго.

Основаніемъ для этого изслѣдованія послужили годографы продольныхъ и поперечныхъ волнъ, причемъ Zoeppritz и Geiger ограничились разсмотрѣніемъ только трехъ слоевъ.

На слѣдующемъ чертежѣ 32 нанесены наибольшія глубины h_m проникновенія продольныхъ и поперечныхъ сейсмическихъ лучей въ зависимости отъ эпицентральнаго разстоянія Δ до $\Delta = 13000$ кил.

$$h_m = r_0 - r_m = F_m(\Delta).$$

h_m дано въ километрахъ, а Δ въ мегаметрахъ или въ 1000 километрахъ.

Сплошная кривая I относится къ продольнымъ волнамъ, а пунктирная II къ поперечнымъ.

Кромѣ того, на чертежѣ нанесены еще наибольшія глубины h_m' (кривая III), которыя имѣли-бы мѣсто, если-бы земля представляла собою однородное тѣло и сейсмическіе лучи распространялись-бы просто по хордамъ, соединяющимъ эпицентръ съ мѣстомъ наблюденія.

Изъ предыдущаго чертежа 19 видно, что

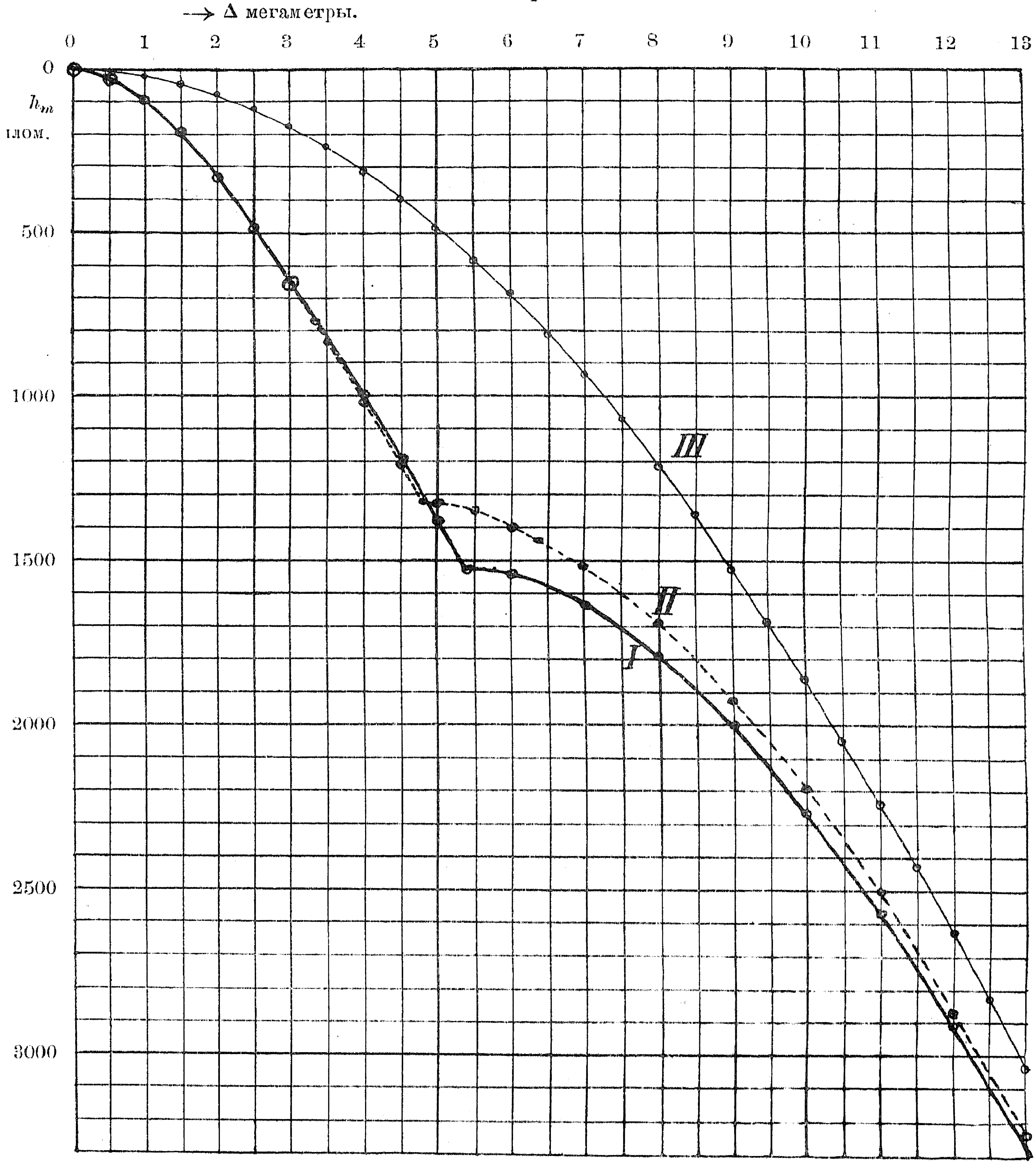
$$h_m' = r_0(1 - \cos\varepsilon) = r_0\left(1 - \cos\frac{\vartheta}{2}\right)$$

или

$$h_m' = 2r_0 \sin^2\frac{\varepsilon}{2}.$$

Здѣсь ϑ представляетъ собою уголъ при центрѣ, соотвѣтствующій эпицентральному разстоянію Δ.

Черт. 32.



Величины угла ε, соотвѣтствующія различнымъ эпицентральнымъ разстояніямъ Δ, приведены были раньше въ таблицѣ III.

Чертежъ 32 показываетъ намъ, что до Δ = 5000 килом. или h_m равномъ, приблизительно, 1300 килом., обѣ кривыя I и II совпадаютъ одна съ другой; для большихъ-же эпицентральныхъ разстояній Δ, кривая II

лежитъ нѣсколько выше кривой I, причемъ обѣ эти кривыя, во всѣхъ своихъ частяхъ, лежатъ ниже кривой III.

Если мы обратимся къ зависимости h_m отъ Δ для продольныхъ волнъ, то замѣтимъ, что на глубинѣ около 1500 километровъ кривая $h_m = F_m(\Delta)$ рѣзко измѣняетъ свой характеръ, образуя угловую точку. Слѣдовательно, на этой громадной глубинѣ подъ поверхностью земли слѣдуетъ ожидать встрѣтить довольно рѣзкое измѣненіе въ физическихъ свойствахъ внутреннихъ слоевъ земли, на что уже раньше было указано.

Таблица IV.

h	V_1	V_2
0 кил.	7,17 кил./сек.	4,01 кил./сек.
100	7,60	4,24
200	8,01	4,47
300	8,42	4,70
400	8,83	4,93
500	9,23	5,15
600	9,62	5,37
700	10,00	5,59
760	10,23	—
800	10,37	5,80
900	10,73	6,00
1000	11,07	6,21
1100	11,43	6,41
1200	11,75	6,60
1300	12,08	6,80
1316	—	6,83
1400	12,40	6,87
1430	—	6,87
1500	12,72	—
1519	12,78	—

Для поперечныхъ-же волнъ угловая точка кривой $h_m = F_m(\Delta)$ лежитъ на нѣсколько меньшей глубинѣ.

Это чрезвычайно любопытный результатъ, который непосредственно вытекаетъ изъ подробнаго анализа свойствъ соотвѣтствующихъ годографовъ.

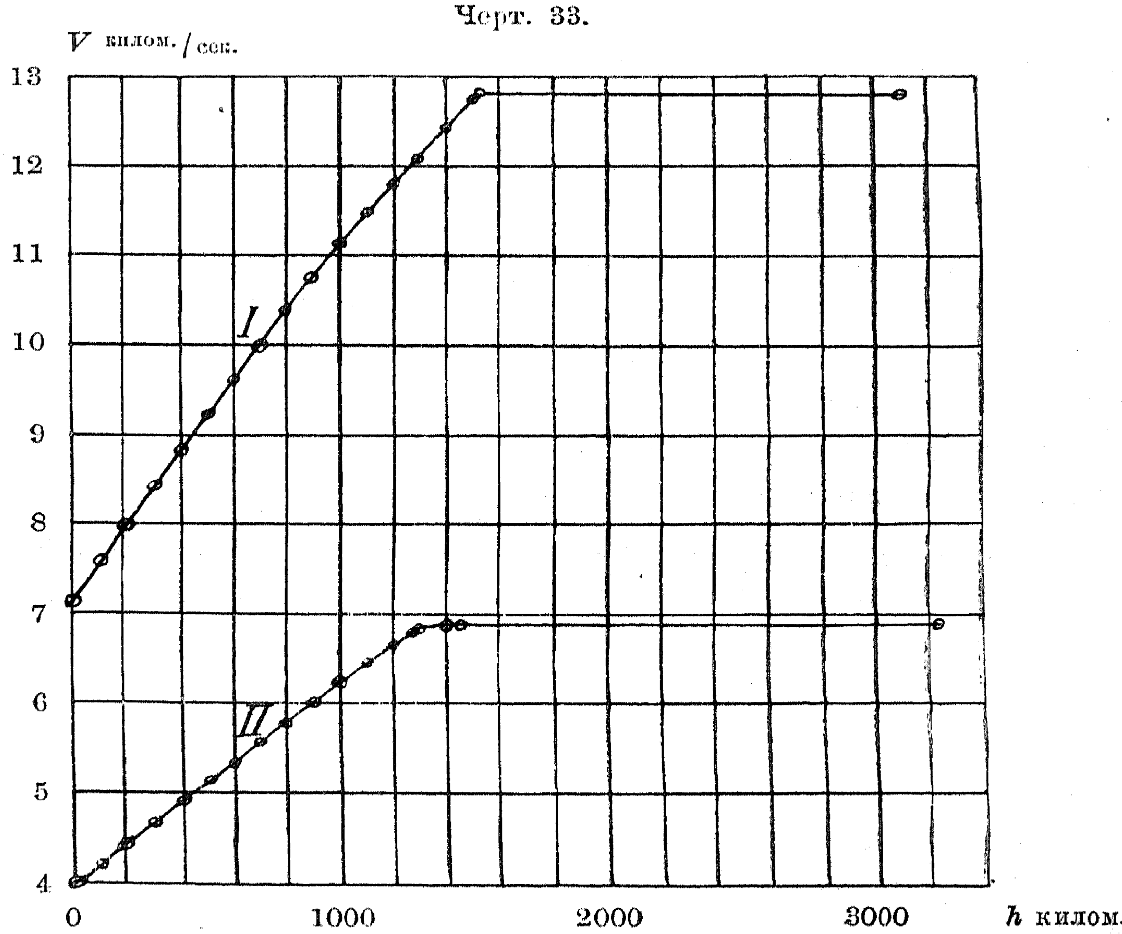
Въ предыдущей таблицѣ IV приведены по Zoeppritz'у и Geiger'у скорости распространенія продольныхъ и поперечныхъ волнъ V_1 и V_2 на различныхъ глубинахъ h.

Ходъ измѣняемости V_1 и V_2 съ глубиной h можно очень наглядно представить графически до глубины, нѣсколько превышающей 3000 килом., т. е., примѣрно, до половины земного радіуса, такъ какъ этой именно глубинѣ соотвѣтствуетъ, согласно чертежу 32, эпицентральное разстояніе Δ въ 13000 кил., до котораго только и доведены современные годографы.

Для этой цѣли по оси абциссъ будемъ откладывать глубину слоя h въ километрахъ, а по оси ординатъ соотвѣтствующія величины скоростей V_1 и V_2 продольныхъ и поперечныхъ волнъ въ километрахъ въ секунду. Числа эти заимствованы изъ предыдущей таблицы IV.

Мы получимъ, такимъ образомъ, кривыя I и II, представленныя на слѣдующемъ чертежѣ 33.

Черт. 33.



Эти кривыя чрезвычайно поучительны.

Онѣ показываютъ, что какъ V_1, такъ и V_2, вначалѣ возрастаютъ почти пропорціонально глубинѣ, а потомъ, начиная съ нѣкоторой опредѣленной глубины, скорости эти остаются почти *постоянными*. Для продольныхъ волнъ эта постоянная скорость начинается на глубинѣ около 1500 километровъ.

Этотъ замѣчательный результатъ указываетъ на то, что только въ верхнихъ слояхъ земли, примѣрно, до глубины $\frac{1}{4}$ земного радіуса, траекторіи сейсмическихъ лучей будутъ криволинейныя, а въ болѣе глубокихъ слояхъ путь сейсмическихъ лучей уже прямолинейный.

Если мы предположимъ, что отъ даннаго критическаго слоя, гдѣ происходитъ внезапное измѣненіе характера зависимости скорости отъ глубины, вплоть до центра земли скорости V_1 и V_2 сохраняютъ то-же самое численное значеніе, то можно вычислить время, потребное сейсмическому лучу, чтобы пройти весь діаметръ земного шара отъ эпицентра до антиэпицентра.

Для продольныхъ волнъ Geiger даетъ $19^м 31^с$, а для волнъ поперечныхъ $36^м 50^с$.

Всѣ вышеприведенныя числовыя данныя не могутъ, конечно, претендовать на абсолютную точность и на нихъ слѣдуетъ смотрѣть лишь, какъ на первое приближеніе къ истинѣ, но не подлежитъ сомнѣнію, что, по мѣрѣ накопленія новаго, болѣе обширнаго и вполнѣ надежнаго сейсмометрическаго матеріала, удастся построить болѣе надежные годографы, при помощи которыхъ возможно уже будетъ лучше изучить законъ измѣняемости скорости продольныхъ и поперечныхъ волнъ съ глубиной.

Особенно важно было-бы имѣть надежныя величины временъ пробѣга T для эпицентральныхъ разстояній, превышающихъ 13000 кил. Это позволило-бы, не только розыскивать, по ранѣе указаннымъ методамъ, положеніе эпицентра весьма удаленныхъ землетрясеній, но опредѣлить и скорости продольныхъ и поперечныхъ волнъ въ глубочайшихъ внутреннихъ слояхъ земли, прилегающихъ непосредственно къ ея центру.

Вопросъ о формѣ годографа для большихъ эпицентральныхъ разстояній Δ остается, однако, до сихъ поръ еще не выясненнымъ.

По мнѣнію Wiechert'а въ предѣлахъ отъ $\Delta = 13000$ клм. до $\Delta = 16000$ кил. существуетъ даже полный перерывъ въ кривой, т.-е. сейсмическія волны, благодаря разнымъ преломленіямъ и отраженіямъ внутри земли, вовсе не достигаютъ мѣста наблюденій. Существуетъ, такимъ образомъ, для этихъ разстояній какъ-бы сейсмическая тѣнь. Отъ $\Delta = 16000$ кил. до $\Delta = 20000$ кил. (полуокружность земли), отрѣзокъ кривой годографа уже лежитъ значительно выше и его нельзя разсматри-

вать, какъ продолженіе прежней вѣтви. Этотъ результатъ требуетъ, однако, еще дальнѣйшей провѣрки.

Возможно, что форма годографа зависитъ также нѣсколько и отъ того азимута, откуда приходятъ сейсмическія волны.

Въ самое послѣднее время Wiechert со своими ассистентами обработалъ новый накопившійся наблюдательный матеріалъ въ цѣляхъ усовершенствованія существующихъ годографовъ.

Результатомъ этого изслѣдованія, о которомъ было доложено на послѣднемъ съѣздѣ Международной Сейсмологической Ассоціаціи въ Манчестерѣ въ 1911 году, оказалось, что, для малыхъ эпицентральныхъ разстояній, въ новомъ годографѣ для продольныхъ волнъ оказались отклоненія отъ прежняго годографа, достигающія 4—5 секундъ, причемъ, въ самыхъ верхнихъ слояхъ земли (до 50 километровъ глубины), скорости распространенія сейсмическихъ волнъ оказались убывающими быстрѣе, по мѣрѣ приближенія къ земной поверхности, чѣмъ это было принято до сихъ поръ. Для большихъ эпицентральныхъ разстояній новая кривая оказалась лежащей, примѣрно, на 10 секундъ выше прежней, что имѣетъ уже большое вліяніе на величину вычисляемой скорости распространенія сейсмическихъ волнъ на различныхъ глубинахъ.

Вмѣсто одной поверхности, на глубинѣ 1500 километровъ, гдѣ происходитъ внезапное измѣненіе закона возрастанія скорости распространенія продольныхъ волнъ съ глубиной (Störungsfläche), о чемъ упоминалось раньше, такихъ поверхностей, по новѣйшей теоріи Wiechert'а, имѣется цѣлыхъ три: первая на глубинѣ 1200 кил., вторая на глубинѣ 1650 кил., а третья на глубинѣ 2450 кил. На громадной глубинѣ въ 3000 кил. (около половины земного радіуса) находится слой, отъ котораго, къ центру земли, скорость распространенія сейсмическихъ волнъ уже нѣсколько убываетъ; центральное-же ядро земли состоитъ, по мнѣнію Wiechert'а, изъ никеля и желѣза.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что современная сейсмометрія, въ томъ ея отдѣлѣ, который изучаетъ различныя свойства сейсмическихъ лучей, открываетъ, на основаніи наблюдательнаго матеріала, собраннаго на различныхъ сейсмическихъ станціяхъ, путь къ изученію физическихъ свойствъ самыхъ глубокихъ, внутреннихъ слоевъ земли.

Сейсмическіе лучи идутъ къ намъ изъ самыхъ нѣдръ земли и несутъ съ собою вѣсточку о ея внутреннихъ свойствахъ и особенностяхъ.

Подобно тому, какъ свѣтовые лучи, идущіе къ намъ изъ міроваго пространства, даютъ намъ указанія о химическомъ составѣ, и отчасти о температурѣ и давленіи, господствующихъ на различныхъ небесныхъ тѣлахъ, а, въ комбинаціи съ принципомъ Допплера, даютъ возможность

опредѣлить и скорость ихъ движенія по направленію луча зрѣнія, такъ и сейсмическіе лучи даютъ намъ ключъ къ разгадыванію сокровенныхъ тайнъ внутренняго строенія земли и именно на такихъ глубинахъ, которыя, по своей недоступности, совершенно изъяты изъ области изслѣдованій современной геологіи.

Такой блестящій результатъ былъ достигнутъ уже съ самыхъ первыхъ шаговъ жизни этой молодой науки — сейсмометріи. Въ дальнѣйшемъ она сулитъ намъ много важныхъ и новыхъ открытій въ этой до послѣдняго времени совершенно еще неизслѣдованной области проявленія физическихъ силъ природы.

Сейсмологія, какъ наука, сдѣлала такіе громадные успѣхи только съ тѣхъ поръ, что она усвоила себѣ чисто физическіе методы изслѣдованія и положила въ основаніе своего дальнѣйшаго развитія инструментальную сейсмологію или сейсмометрію.

Итакъ, основываясь на величинѣ угла выхода сейсмической радіаціи при различныхъ эпицентральныхъ разстояніяхъ Δ, выводимаго, или изъ кривой годографа, или изъ непосредственныхъ наблюденій съ соотвѣтствующими приборами, установленными у поверхности земли, можно опредѣлить скорости распространенія продольныхъ и поперечныхъ волнъ V_1 и V_2 на различныхъ глубинахъ.

Эти скорости связаны съ коэффиціентами упругости E и σ и съ плотностью ρ слѣдующими соотношеніями (37) и (38), которыя были выведены въ § 1 главы II-ой:

$$V_1 = \sqrt{\frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \cdot \frac{E}{\rho}}$$

и

$$V_2 = \sqrt{\frac{1}{2(1+\sigma)} \cdot \frac{E}{\rho}}.$$

Зная V_1 и V_2, мы не можемъ, однако, еще опредѣлить въ отдѣльности модуль продольной упругости E и плотность соотвѣтствующаго слоя ρ, но мы будемъ только знать отношеніе $\frac{E}{\rho}$, но и это уже очень много.

Исключая изъ предыдущихъ формулъ $\frac{E}{\rho}$, мы можемъ, тѣмъ не менѣе, опредѣлить вполнѣ точно другой коэффиціентъ упругости, а именно модуль поперечнаго сжатія или коэффиціентъ Poisson'а σ.

Для этой цѣли можно воспользоваться формулой (40) второй главы:

$$\sigma = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 - 1}{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 - 1}.$$

Zoeppritz и Geiger произвели эти вычисленія и получили слѣдующія величины коэффиціента Poisson'а σ на различныхъ глубинахъ h.

Таблица V.

h	σ
0 клм.	0,272
100	0,273
200	0,272
300	0,272
400	0,274
500	0,272
600	0,274
700	0,273
800	0,272
900	0,271
1000	0,270
1100	0,270
1200	0,269
1300	0,268

Эти числа показываютъ намъ, что, вплоть до глубины $h = 1300$ километровъ, σ остается чрезвычайно постояннымъ, причемъ оно весьма мало отличается отъ теоретической величины, принятой Poisson'омъ для модуля поперечнаго сжатія, а именно $\sigma = \frac{1}{4}$.

---

§ 5.

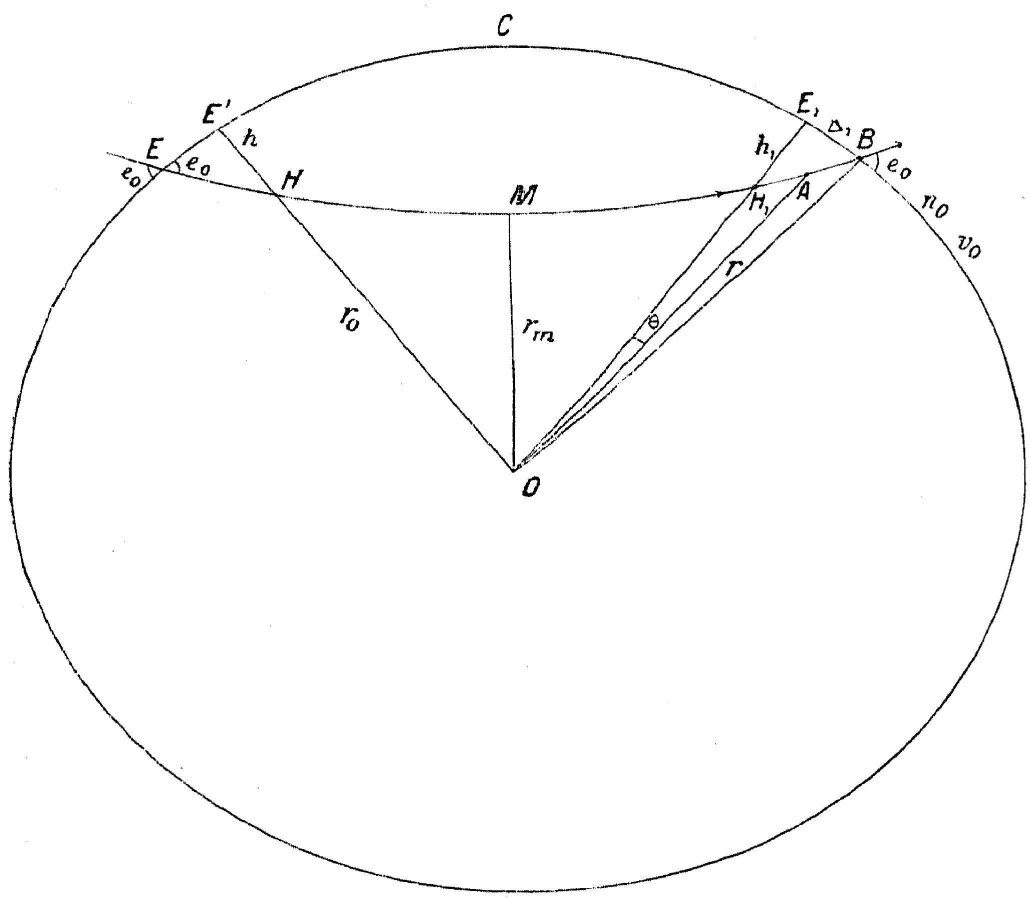
О глубинѣ залеганія очага землетрясенія.

До сихъ поръ мы предполагали, что очагъ землетрясенія лежитъ столь неглубоко или станція наблюденій находится въ такомъ значительномъ

разстояніи отъ эпицентра, что можно было безъ особой погрѣшности принять очагъ, какъ-бы совпадающимъ съ эпицентромъ.

Пусть на слѣдующемъ чертежѣ 34 E представляетъ собою такой эпицентръ-очагъ, а B какое-нибудь мѣсто наблюденій. Эпицентральное разстояніе Δ будетъ ECB.

Черт. 34.



Соотвѣтствующее время пробѣга, т. е. разность моментовъ появленія той-же соотвѣтственной фазы землетрясенія (первая или вторая предварительная фаза P или S) въ B и E пусть будетъ T.

Тогда

$$T = \Psi(\Delta),$$

гдѣ функція $\Psi(\Delta)$ представляетъ собою ничто иное, какъ соотвѣтствующую кривую *нормальнаго* годографа (для $h = 0$, гдѣ h есть глубина залеганія очага землетрясенія).

Соотвѣтствующій уголъ выхода сейсмической радіаціи пусть будетъ e_0.

Предположимъ теперь, что очагъ землетрясенія находится не въ E, а въ H, на глубинѣ h ниже поверхности земли.

Тогда эпицентръ, какъ ближайшая къ очагу землетрясенія точка

земной поверхности, будетъ находиться въ E', а соотвѣтствующее эпицентральное разстояніе будетъ

$$\Delta' = E'CB$$

или

$$\Delta' = \Delta - \delta\Delta, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (91)$$

гдѣ

$$\delta\Delta = EE'.$$

Обозначимъ черезъ v_0 среднюю скорость распространенія сейсмическихъ лучей въ верхнихъ слояхъ земли, заключенныхъ между поверхностью земли и глубиной h.

Такъ какъ время пробѣга сейсмическаго луча отъ E до B было T, то время пробѣга отъ H до B будетъ

$$T - \frac{EH}{v_0}.$$

Пусть t_0 будетъ моментъ выхода данной волны изъ H. Въ точку E' движеніе придетъ въ моментъ t', а въ точку B въ моментъ t, гдѣ

$$t' = t_0 + \frac{E'H}{v_0},$$

а

$$t = t_0 + T - \frac{EH}{v_0}.$$

Обозначивъ, согласно предыдущему, разность моментовъ появленія той-же фазы въ мѣстѣ наблюденій B и въ *истинномъ* эпицентрѣ E' черезъ T', будемъ имѣть

$$T' = t - t' = T - \frac{1}{v_0}\{EH + E'H\}$$

или

$$T' = T - \delta T, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (92)$$

гдѣ

$$\delta T = \frac{1}{v_0}[EH + E'H].$$

Мы видимъ, такимъ образомъ, что кривая годографа требуетъ небольшой поправки на глубину залеганія очага землетрясенія h, какъ для эпицентральнаго разстоянія Δ, такъ и для времени пробѣга T.

Опредѣлимъ теперь эти поправки $\delta\Delta$ и δT.

Изъ элементарнаго треугольника EHE' имѣемъ

$$EE' . \operatorname{tg} e_0 = h$$

и

$$EH.\sin e_0 = h$$

или

$$EE' = h \operatorname{cotg} e_0$$

и

$$EH = h \frac{1}{\sin e_0}.$$

Слѣдовательно,

$$\delta\Delta = h \operatorname{cotg} e_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (93)$$

и

$$\delta T = \frac{h}{v_0} \cdot \frac{1 + \sin e_0}{\sin e_0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (94)$$

Вводя эти поправки въ формулы (91) и (92), получимъ соотвѣтственные элементы годографа, исправленные на глубину залеганія очага землетрясенія.

Обратно, опредѣляя изъ наблюденій отступленія Δ и T, для какого-нибудь опредѣленнаго землетрясенія, отъ нормальнаго годографа (для $h = 0$), можно вывести извѣстныя заключенія о глубинѣ залеганія соотвѣтствующаго очага землетрясенія.

Посмотримъ-же теперь, какимъ образомъ можно воспользоваться наблюденіями около эпицентра, чтобы опредѣлить дѣйствительную глубину залеганія очага h.

Предположимъ, что сейсмическая станція B находится въ сравнительно незначительномъ разстояніи Δ_1 отъ эпицентра и, соотвѣтственно этому, возьмемъ на чертежѣ 34 очагъ въ H_1, на глубинѣ h_1. Тогда эпицентръ будетъ находиться въ E_1. Разстояніе точки H_1 до центра земли обозначимъ черезъ $r_1 = r_0 - h_1$.

Продолжимъ траекторію сейсмическаго луча, идущаго изъ H_1 въ B, влѣво; тогда мы дойдемъ до такой точки M, гдѣ разстояніе r_m траекторіи луча до центра земли будетъ minimum.

Мы предположимъ, что эпицентральное разстояніе Δ_1 выбрано съ такимъ расчетомъ, чтобы r_1 было всегда больше соотвѣтствующаго r_m.

Если мы имѣемъ нѣсколько станцій, расположенныхъ невдалекѣ отъ эпицентра и удовлетворяющихъ послѣднему условію, и мы произведемъ на нихъ соотвѣтственныя сейсмометрическія наблюденія, то, зная положеніе эпицентра, можно вычертить соотвѣтствующій годографъ, изъ котораго, по общей формулѣ

$$\cos e_0 = v_0 \frac{dT}{d\Delta}, \ldots\ldots (\text{см. формулу } (54))$$

опредѣлимъ уголъ выхода сейсмической радіаціи для различныхъ эпицентральныхъ разстояній Δ_1.

Положивши, какъ и раньше,

$$\alpha_1 = \cos e_0,$$

мы будемъ имѣть рядъ соотвѣтственныхъ значеній Δ_1 и α_1, которыя дадутъ намъ возможность опредѣлить глубину залеганія очага землетрясенія.

Возьмемъ для этого какую-нибудь точку A на траекторіи сейсмическаго луча между H_1 и B въ разстояніи r отъ центра земли O и обозначимъ уголъ H_1OA черезъ θ.

Уголъ H_1OB при центрѣ O, соотвѣтствующій эпицентральному разстоянію Δ_1, обозначимъ черезъ ϑ_1.

Тогда

$$\vartheta_1 = \frac{\Delta_1}{r_0},$$

гдѣ r_0 есть радіусъ земли.

Выразимъ, какъ и раньше, r въ доляхъ r_0 и соотвѣтственно этому положимъ

$$\rho = \frac{r}{r_0}$$

и

$$\rho_1 = \frac{r_1}{r_0}.$$

Обратимся теперь къ нашей основной формулѣ (19), по которой

$$d\theta = \frac{\alpha_1 \, d\rho}{\rho \sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha_1^2}}.$$

Проинтегрируемъ затѣмъ это выраженіе въ предѣлахъ отъ H_1 до B, т. е. отъ $\rho = \rho_1$ до $\rho = 1$.

Тогда мы получимъ

$$\Delta_1 = r_0 \alpha_1 \int\limits_{\rho_1}^{1} \frac{d\rho}{\rho \sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha_1^2}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (95)$$

гдѣ

$$\nu = \frac{n}{n_0} = \frac{v_0}{v}.$$

Такъ какъ r_1, по предположенію, всегда больше r_m, то величина, стоящая подъ радикаломъ, не можетъ, въ предѣлахъ интегрированія, обратиться въ нуль.

ν зависитъ отъ ρ.

При

$$\rho = 1, \quad \nu = 1.$$

Введемъ теперь новую перемѣнную

$$\xi = 1 - \rho. \qquad \qquad (96)$$

Тогда, при

$$\rho = 1, \quad \xi = 0,$$

а, при

$$\rho = \rho_1, \quad \xi = \xi_1 = 1 - \rho_1.$$

Мы можемъ теперь разсматривать ν какъ нѣкоторую функцію отъ ξ:

$$\nu = F(\xi).$$

Такъ какъ въ верхнихъ слояхъ земли, съ возрастаніемъ ρ, ν увеличивается, то

$$\frac{d\nu}{d\xi} < 0.$$

Не зная совершенно вида функціи $F(\xi)$, мы можемъ, тѣмъ не менѣе, для малыхъ значеній ξ, которыя теперь только и имѣютъ мѣсто, разложить $F(\xi)$ въ рядъ по строкѣ Маклорена:

$$\nu = F(\xi) = 1 - a_1\xi + a_2\xi^2,$$

гдѣ $a_1 > 0$.

Ограничимся членами порядка ξ^2.

Тогда

$$\begin{aligned}\nu^2\rho^2 &= [1 - a_1\xi + a_2\xi^2]^2\,[1 - \xi]^2 \\ &= [1 - 2a_1\xi + (a_1^2 + 2a_2)\xi^2]\,[1 - 2\xi + \xi^2] \\ &= 1 - (2a_1 + 2)\xi + (a_1^2 + 2a_2 + 4a_1 + 1)\xi^2\end{aligned}$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{\nu^2\rho^2 - \alpha_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha_1^2) - 2(a_1+1)\xi + (a_1^2 + 2a_2 + 4a_1 + 1)\xi^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\alpha_1^2}}\left[1 - 2\xi\left\{\frac{a_1+1}{1-\alpha_1^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{a_1^2 + 2a_2 + 4a_1 + 1}{1-\alpha_1^2}\,\xi\right\}\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Разложимъ теперь это выраженіе по степенямъ ξ.

Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{\nu^2\rho^2-\alpha_1^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha_1^2}}\Bigg[1+\xi\left\{\frac{a_1+1}{1-\alpha_1^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{a_1^2+2a_2+4a_1+1}{1-\alpha_1^2}\xi\right\}$$

$$+\frac{-\frac{1}{2}\cdot-\frac{3}{2}}{1.2}\cdot 4\xi^2\left(\frac{a_1+1}{1-\alpha_1^2}\right)^2\Bigg]=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha_1^2}}\Bigg[1+\frac{a_1+1}{1-\alpha_1^2}\xi$$

$$+\frac{1}{2}\left\{3\left(\frac{a_1+1}{1-\alpha_1^2}\right)^2-\frac{a_1^2+2a_2+4a_1+1}{1-\alpha_1^2}\right\}\xi^2\Bigg].$$

Съ другой стороны

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{1-\xi}=1+\xi+\xi^2.$$

Перемножая эти два выраженія (см. формулу (95)), получимъ

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{1}{\sqrt{\nu^2\rho^2-\alpha_1^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha_1^2}}[1+\xi+\xi^2]\Bigg[1+\frac{a_1+1}{1-\alpha_1^2}\xi$$

$$+\frac{1}{2}\left\{3\left(\frac{a_1+1}{1-\alpha_1^2}\right)^2-\frac{a_1^2+2a_2+4a_1+1}{1-\alpha_1^2}\right\}\xi^2\Bigg]=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha_1^2}}\Bigg[1+\left\{1+\frac{a_1+1}{1-\alpha_1^2}\right\}\xi$$

$$+\left\{1+\frac{a_1+1}{1-\alpha_1^2}+\frac{1}{2}\left(3\left(\frac{a_1+1}{1-\alpha_1^2}\right)^2-\frac{a_1^2+2a_2+4a_1+1}{1-\alpha_1^2}\right)\right\}\xi^2\Bigg].$$

Введемъ теперь такія обозначенія:

$$A_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{2+a_1-\alpha_1^2}{1-\alpha_1^2}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(97)$$

и

$$A_2=\frac{1}{3}\left[\frac{2+a_1-\alpha_1^2}{1-\alpha_1^2}+\frac{1}{2}\left\{3\left(\frac{a_1+1}{1-\alpha_1^2}\right)^2-\frac{a_1^2+2a_2+4a_1+1}{1-\alpha_1^2}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(1-\alpha_1^2)^2}\left[\{6+4a_1-2a_2+2a_1^2\}\right.$$

$$\left.-\{5-2a_1-2a_2-a_1^2\}\alpha_1^2+2\alpha_1^4\right]\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(98)$$

Тогда

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{1}{\sqrt{\nu^2\rho^2-\alpha_1^2}}=[1+2A_1\xi+3A_2\xi^2]\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\alpha_1^2}}.$$

Вводя это выраженіе въ формулу (95), и, принимая во вниманіе, что

$$d\rho=-d\xi,$$

получимъ, перемѣнивъ предѣлы интегрированія,

$$\Delta_1 = \frac{r_0\,\alpha_1}{\sqrt{1-\alpha_1^2}} \int\limits_0^{\xi_1} [1 + 2A_1\,\xi + 3A_2\,\xi^2]\,d\xi$$

или

$$\Delta_1 = r_0 \frac{\alpha_1}{\sqrt{1-\alpha_1^2}} [\xi_1 + A_1\,\xi_1^2 + A_2\,\xi_1^3].$$

Здѣсь $\frac{\alpha_1}{\sqrt{1-\alpha_1^2}}$ есть ничто иное, какъ котангенсъ угла выхода сейсмической радіаціи ($\operatorname{cotg} e_0$), соотвѣтствующій эпицентральному разстоянію Δ_1.

Отбросивъ въ предыдущей формулѣ членъ, содержащій ξ_1^3, получимъ

$$\Delta_1 = r_0 \frac{\alpha_1}{\sqrt{1-\alpha_1^2}} \xi_1\,[1 + A_1\,\xi_1] \ldots\ldots\ldots\ldots (99)$$

Здѣсь коеффиціентъ A_1 зависитъ отъ a_1 и отъ α_1. Имѣя, такимъ образомъ, пару соотвѣтственныхъ значеній Δ_1 и α_1, мы можемъ опредѣлить двѣ неизвѣстныя ξ_1 и a_1.

Если-бы мы взяли наблюденія трехъ станцій, то, сохраняя членъ $A_2\,\xi_1^3$, мы могли-бы опредѣлить и другую постоянную a_2.

Величина ξ_1 даетъ намъ тотчасъ-же искомую глубину залеганія очага h_1.

Дѣйствительно,

$$\xi_1 = 1 - \rho_1 = 1 - \frac{r_1}{r_0} = 1 - \frac{r_0 - h_1}{r_0} = \frac{h_1}{r_0}$$

или

$$h_1 = \xi_1\,r_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (100)$$

Съ другой стороны, такъ какъ

$$v = \frac{v_0}{\nu},$$

то, опредѣливши коеффиціенты a_1 и a_2 изъ наблюденій, мы будемъ знать и законъ измѣненія скорости распространенія сейсмическихъ волнъ въ верхнихъ слояхъ земли, непосредственно прилегающихъ къ данной эпицентральной области.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что есть полная теоретическая возможность опредѣлить глубину залеганія очага землетрясенія, но для этой цѣли надо имѣть въ распоряженіи достаточно надежный сейсмометрическій матеріалъ, полученный со станцій, расположенныхъ невдалекѣ отъ соотвѣтствующаго эпицентра землетрясенія.

Глава IV.

Главнѣйшія задачи сейсмометріи.

§ 1.

Изслѣдованіе различныхъ сейсмическихъ явленій.

Въ предыдущей главѣ мы разсмотрѣли подробно теорію сейсмическихъ лучей и видѣли, какое громадное значеніе для практической сейсмометріи имѣетъ опредѣленіе точнаго момента прихода продольныхъ и поперечныхъ волнъ на различныя сейсмическія станціи.

Но послѣ прихода этихъ волнъ движеніе почвы отнюдь не успокаивается, а за первыми волнами приходятъ вторыя, третьи и т. д., съ различными періодами и амплитудами, которыя налагаются на первыя, такъ что въ результатѣ получается весьма сложная и запутанная картина движенія почвы.

Позднѣе всего приходятъ длинныя, поверхностныя волны, которыя также, въ большинствѣ случаевъ, представляютъ собою наложеніе отдѣльныхъ, болѣе или менѣе правильныхъ, синусоидальныхъ колебаній, и только вблизи максимальной фазы землетрясенія картина обыкновенно проясняется и сейсмограммы обнаруживаютъ нѣкоторыя болѣе или менѣе чистыя синусоидальныя волны, съ опредѣленнымъ періодомъ и опредѣленной амплитудой. Однако, эти волны рѣдко сохраняются въ теченіе нѣсколькихъ полныхъ періодовъ, а большею частью быстро искажаются наложеніемъ новыхъ волнъ, а также вслѣдствіе неизбѣжнаго вліянія затуханія, которое несомнѣнно присуще всѣмъ типамъ волнъ.

Дѣйствительно, по существу дѣла, всякое гармоническое колебаніе земной поверхности, у которой мы и производимъ наши сейсмическія наблюденія, должно быть, вслѣдствіе неизбѣжнаго вліянія тренія, колебаніе затухающее, характеръ котораго вполнѣ аналогиченъ затухающимъ коле-

баніямъ обыкновеннаго горизонтальнаго маятника, съ теоріей котораго мы познакомимся въ слѣдующей главѣ.

Одна изъ важнѣйшихъ, но вмѣстѣ съ тѣмъ и труднѣйшихъ задачъ современной сейсмометріи и заключается въ томъ, чтобы распутать это сложное движеніе почвы, отдѣлить одну волну отъ другой, изслѣдовать ихъ характеръ, свойства, періодъ, амплитуду, происхожденіе, соотвѣтствующій коеффиціентъ затуханія и пр.

Японскій сейсмологъ Omori сдѣлалъ попытку классифицировать сейсмическія волны, наблюдаемыя у поверхности земли, по группамъ, въ зависимости отъ ихъ періода и мѣстоположенія на сейсмограммахъ, но эта классификація содержитъ въ себѣ очень много произвольнаго, причемъ во многихъ случаяхъ бываетъ очень трудно пріурочить наблюдаемое явленіе къ заранѣе опредѣленнымъ рамкамъ или нормамъ.

Германскій сейсмологъ Wiechert подмѣтилъ, что, при большинствѣ землетрясеній, въ главной фазѣ (поверхностныя волны) преобладаетъ періодъ волнъ T въ 18 секундъ.

Такъ какъ произведеніе изъ скорости распространенія волны V на періодъ T даетъ соотвѣтствующую длину волны λ (см. формулу (29) главы II), то

$$\lambda = VT.$$

Для поверхностныхъ волнъ можно принять, какъ мы уже видѣли, $V = 3{,}5\ ^{\text{килм.}}/_{\text{сек.}}$; слѣдовательно

$$\lambda = 3{,}5 \times 18 = 63 \text{ килом.}$$

Мы видимъ, такимъ образомъ, что поверхностныя волны дѣйствительно чрезвычайно длинныя.

Теперь, современная геологія учитъ насъ, что внѣшняя земная оболочка или корка земли, состоящая изъ самыхъ разнообразныхъ горныхъ породъ, отдѣляется отъ внутренняго ядра земли слоемъ магмы, гдѣ вещество находится какъ-бы въ расплавленномъ состояніи. Эта магма и служитъ тѣмъ элементомъ, который питаетъ вулканы при изверженіяхъ. Хотя магма и находится въ расплавленномъ состояніи, но, благодаря тѣмъ громаднымъ давленіямъ, которыя господствуютъ на такихъ глубинахъ, вещество магмы не представляется намъ въ жидкомъ состояніи, а является скорѣе тѣломъ пластическимъ, тягучимъ, чѣмъ-то среднимъ между жидкостью и твердымъ тѣломъ (напр. какъ смола, которая съ теченіемъ времени можетъ течь, какъ настоящая жидкость).

Что магма не можетъ обладать свойствами настоящей жидкости

явствуетъ уже изъ того, что сквозь слой магмы проходятъ поперечныя волны отъ дальнихъ землетрясеній, тогда какъ въ настоящихъ жидкостяхъ поперечныя упругія волны не могутъ имѣть мѣсто, такъ какъ жидкости не представляютъ никакого сопротивленія къ измѣненію своей формы; слѣдовательно, какія-нибудь сдвиги не могутъ вызвать реакціи силъ упругости, а поперечныя волны суть именно волны сдвига.

Вопросъ о глубинѣ залеганія слоя магмы представляется очень важнымъ и интереснымъ. Wiechert подошелъ къ его рѣшенію слѣдующимъ образомъ.

Замѣтивъ, что при землетрясеніяхъ преобладаетъ длина волны въ 63 километра, онъ предположилъ, что эта волна соотвѣтствуетъ собственнымъ колебаніямъ всей внѣшней земной оболочки, покоющейся на слоѣ магмы. На внѣшней и внутренней свободной поверхности этой оболочки должны находиться какъ-бы пучности, а на серединѣ узловая поверхность, подобно тому какъ металлическій стержень, колеблющійся обоими своими концами, имѣетъ посрединѣ узловую линію. Въ этомъ случаѣ разстояніе между колеблющимися свободными поверхностями земной оболочки должно соотвѣтствовать полъ-волнѣ.

Такимъ образомъ, Wiechert опредѣлилъ вѣроятную глубину залеганія слоя магмы въ 31,5 километровъ.

Къ тому-же результату можно прійти и совершенно другимъ путемъ.

Мы знаемъ, изъ наблюденій въ глубокихъ шахтахъ и буровыхъ скважинахъ, что, по мѣрѣ углубленія внутрь земли, температура возрастаетъ.

Самая глубокая буровая скважина, полученная до настоящаго времени, находится въ Чуховѣ (Czuchow) въ Прусской Силезіи. Глубина ея 2239,7 метра, т.-е. свыше двухъ километровъ.

Тамъ, на глубинѣ 2221 метровъ подъ земной поверхностью, наблюдается температура въ $+85^\circ,0$ C. Принявъ среднюю температуру у поверхности земли въ $+15^\circ$ C., мы получимъ для такъ называемаго *средняго геотермическаго градіента*, т.-е. для числа метровъ глубины, соотвѣтствующихъ увеличенію температуры на 1° C.,

$$\frac{2221}{85-15} = 31,7 \text{ м.}$$

При температурѣ въ 1000° C. мы можемъ предполагать, что различныя горныя породы находятся уже въ расплавленномъ состояніи, и на соотвѣтствующей глубинѣ и можно именно ожидать встрѣтить слой магмы.

По геотермическому градіенту и можно сейчасъ же опредѣлить, на какой глубинѣ подъ поверхностью земли можно ожидать встрѣтить температуру въ 1000° C.

Соотвѣтствующая глубина будетъ

$$(1000 - 15) \times 0{,}0317 = 31{,}2 \text{ килом.}$$

Это число находится въ прекрасномъ согласіи съ предыдущимъ результатомъ, полученномъ изъ сейсмическихъ наблюденій.

Спрашивается теперь, въ какомъ-же именно физическомъ состояніи находится вещество подъ магмой и вообще въ очень глубокихъ слояхъ земли?

Тамъ температура будетъ настолько высока, что вещество уже не можетъ находиться въ такъ называемомъ твердомъ состояніи. Жидкое состояніе тоже едва ли мыслимо, такъ какъ температура можетъ быть выше всякой критической температуры. Остается, слѣдовательно, предположить, что тамъ вещество находится въ газообразномъ состояніи; но и это предположеніе нѣсколько парадоксально. Одно, однако, мы можемъ съ достовѣрностью утверждать, а именно, что, несмотря на чрезвычайно высокую температуру, вещество въ глубокихъ слояхъ земли находится подъ такими громадными давленіями и такъ сильно сжато, что для насъ оно представляется какъ-бы обладающимъ *свойствами* твердаго тѣла.

Мы видѣли, что, при дальнихъ землетрясеніяхъ, колебанія почвы, вообще говоря, чрезвычайно сложны и запутаны, представляя собой результатъ суперпозиціи цѣлой системы различныхъ сейсмическихъ волнъ. Въ этомъ легко убѣдиться, взглянувъ, напримѣръ, на черт. 25, представляющій собою воспроизведеніе Мало-Азіатскаго землетрясенія 9 февраля 1909 года (Пулковская сейсмограмма).

Кромѣ большой сложности колебаній, наблюдается еще и слѣдующее любопытное явленіе.

Въ плейстосейстовой и эпицентральной областяхъ, землетрясенія продолжаются обыкновенно не долго, ограничиваясь большею частью рядомъ отдѣльныхъ толчковъ или сотрясеній почвы. На дальнихъ-же станціяхъ землетрясенія растягиваются по времени очень значительно, продолжаясь иногда цѣлый часъ и больше. На сейсмограммахъ такихъ станцій не наблюдается вовсе никакихъ перерывовъ въ записяхъ, которые соотвѣтствовали-бы моментамъ покоя между отдѣльными толчками въ эпицентрѣ. Когда землетрясеніе началось, то сейсмическія волны продолжаютъ непрерывно притекать, переплетаясь между собою, и только, по истеченіи сравнительно большого промежутка времени, движеніе начинаетъ замирать и колебанія почвы постепенно сходятъ на нѣтъ.

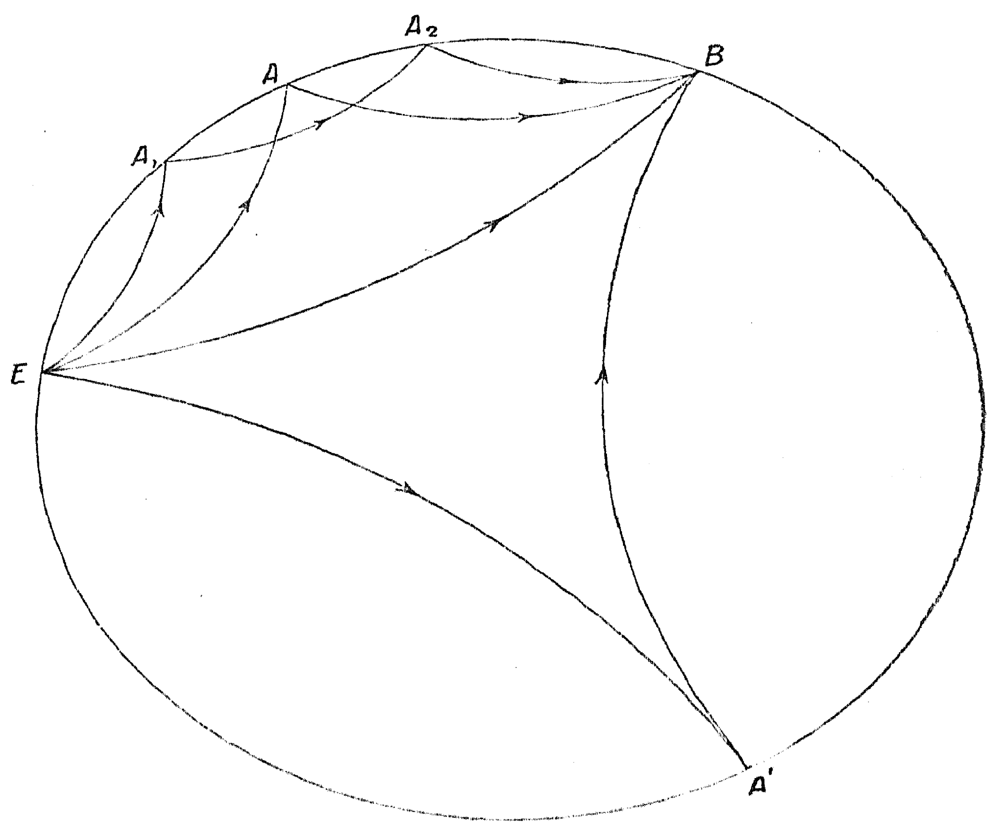
Спрашивается теперь, откуда-же берутся всѣ эти многочисленныя волны и почему самое явленіе такъ растягивается по времени?

Для этого могутъ быть три различныя причины.

Во-первыхъ, кромѣ продольныхъ и поперечныхъ волнъ, достигающихъ

мѣста наблюденія по ранѣе изслѣдованнымъ нами траекторіямъ сейсмическихъ лучей, могутъ прійти и цѣлыя системы волнъ, отраженныхъ одинъ, два и бóльшее число разъ отъ свободной поверхности земли, какъ то представлено на слѣдующемъ чертежѣ (35).

Черт. 35.



Волны могутъ прійти изъ эпицентра E на сейсмическую станцію въ B, отразившись или одинъ разъ отъ поверхности земли въ A, или два раза, въ точкахъ A_1 и A_2 и т. д. Возможны также и отраженія въ точкѣ A'.

Кромѣ того, внутри земли, гдѣ соприкасаются слои съ рѣзко различающимися физическими свойствами, могутъ имѣть мѣсто и внутреннія отраженія и преломленія. Если прибавить къ этому, что всякій разъ, когда какой-нибудь сейсмическій лучъ, будетъ-ли онъ соотвѣтствовать продольнымъ или поперечнымъ колебаніямъ—безразлично,—встрѣчаетъ границу раздѣла двухъ слоевъ съ различными физическими свойствами, то онъ даетъ, какъ мы видѣли раньше, начало *четыремъ* лучамъ, двумъ отраженнымъ и двумъ преломленнымъ, причемъ каждой парѣ лучей соотвѣтствуетъ одна продольная и одна поперечная волна. Неудивительно поэтому, что картина записи землетрясенія на отдаленной станціи представляется очень сложной.

Во-вторыхъ, возможно, что сейсмическія волны, проходя сквозь толщу земли, вызываютъ собственныя колебанія различныхъ слоевъ. Такіе соб-

13

ственные періоды колебаній извѣстныхъ массивовъ горныхъ породъ несомнѣнно существуютъ. Недавно Grunmach изслѣдовалъ колебанія одной скалы въ Силезіи, вызванныя паденіемъ на нее большихъ массъ воды, и пришелъ къ тому заключенію, что наблюденный имъ весьма короткій періодъ колебаній соотвѣтствовалъ именно собственному періоду даннаго горнаго массива.

Что сейсмическія волны, при достаточной ихъ интенсивности, могутъ, дѣйствительно, вызвать подобныя явленія, подтверждается и тѣмъ обстоятельствомъ, что иногда одно землетрясеніе вызываетъ въ совершенно другомъ мѣстѣ, при проходѣ сейсмическихъ волнъ, другое землетрясеніе. Сейсмическая энергія прошедшихъ волнъ является достаточной, чтобы нарушить мало устойчивыя условія равновѣсія слоевъ, находящихся въ состояніи весьма сильнаго упругаго натяженія, и вызвать новое землетрясеніе. Въ нѣмецкой терминологіи такія землетрясенія называются Relais-Beben.

Третья причина сложности записей на отдаленныхъ станціяхъ можетъ еще заключаться въ особомъ явленіи, которое, по аналогіи съ оптикой, можно назвать *сейсмической дисперсіей*.

Въ предыдущей теоріи сейсмическихъ волнъ мы нигдѣ не встрѣтились съ явленіемъ дисперсіи, т.-е. мы нигдѣ не обнаружили зависимости скорости распространенія волнъ отъ періода. Для опредѣленнаго типа волнъ скорость эта оказалась для тѣла, обладающаго опредѣленными физическими свойствами, величиной постоянной. Произошло это оттого, что мы въ нашихъ основныхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ пренебрегли членами высшихъ порядковъ, что и привело насъ къ *линейнымъ* дифференціальнымъ уравненіямъ. При нелинейныхъ же уравненіяхъ оказывается, что скорость распространенія сейсмическихъ волнъ должна нѣсколько зависѣть, какъ отъ періода, такъ и отъ амплитуды колебаній. Зависимость скорости отъ періода могла бы получиться и при линейной формѣ дифференціальныхъ уравненій, если только придать имъ нѣсколько иной видъ. Итакъ, при попыткѣ дополнить уравненія классической теоріи упругости съ цѣлью приблизиться къ дѣйствительности, мы неизбѣжно наталкиваемся на явленіе сейсмической дисперсіи.

Въ оптикѣ явленіе дисперсіи хорошо извѣстно и изучено. Тамъ каждому періоду колебаній или каждой опредѣленной длинѣ волны присуща и своя опредѣленная скорость распространенія луча, непосредственно связанная съ соотвѣтствующимъ показателемъ преломленія. Повидимому, явленіе дисперсіи есть общее свойство матеріи, и было-бы совершенно неестественно и нелогично предполагать, что сейсмическіе лучи въ этомъ отношеніи представляютъ изъ себя исключеніе.

Для очень упругихъ тѣлъ, какъ, напримѣръ, сталь, слоновая кость и пр., которыя ближе удовлетворяютъ требованіямъ классической теоріи упругости, возможно, что дисперсія и очень незначительна, но зато, для разныхъ горныхъ породъ, менѣе соотвѣтствующихъ вышеуказаннымъ требованіямъ, весьма вѣроятно, что сейсмическая дисперсія имѣетъ вполнѣ реальное существованіе.

Благодаря дисперсіи, сейсмическіе лучи, вышедшіе одновременно изъ одного и того-же очага, но характеризуемые различными періодами колебаній (аналогія съ бѣлымъ свѣтомъ въ оптикѣ), придутъ въ мѣсто наблюденія въ различныя времена, чѣмъ самымъ естественнымъ образомъ объясняется явленіе растягиванія сейсмограммъ по времени.

Вопросъ о сейсмической дисперсіи совершенно еще не изученъ. По существу онъ имѣетъ много общаго съ вопросами спектральнаго анализа.

Повидимому, при продольныхъ волнахъ, быстрѣе всего движутся волны съ короткими періодами, такъ какъ онѣ преобладаютъ въ началѣ первой фазы сейсмограммъ отъ отдаленныхъ землетрясеній.

Въ этомъ отношеніи сейсмическая дисперсія совершенно противоположна *нормальной* оптической дисперсіи, гдѣ волны съ короткими періодами (напр. фіолетовые лучи, имѣющіе бóльшій показатель преломленія) распространяются въ прозрачныхъ срединахъ со скоростями меньшими, чѣмъ волны съ бóльшими періодами. Сейсмическая дисперсія соотвѣтствуетъ, такимъ образомъ, какъ-бы *аномальной* оптической дисперсіи около полосъ поглощенія.

Строго говоря, для каждаго отдѣльнаго періода колебаній, слѣдовало-бы, какъ для продольныхъ, такъ и для поперечныхъ волнъ, имѣть и свой отдѣльный годографъ. Построеніе такихъ годографовъ является, однако, вопросомъ будущаго, но этимъ, во всякомъ случаѣ, нисколько не умаляется значеніе тѣхъ *среднихъ* годографовъ, съ которыми мы до сихъ поръ имѣли дѣло, такъ какъ наблюденія показываютъ, что періоды продольныхъ и поперечныхъ волнъ въ первой и второй предварительной фазѣ землетрясенія колеблятся не въ очень широкихъ предѣлахъ.

Аналогичныя разсужденія примѣнимы и къ поверхностнымъ волнамъ, такъ какъ и тамъ можетъ до извѣстной степени сказаться зависимость скорости распространенія волнъ отъ періода. Вопросъ этотъ также еще не изученъ какъ слѣдуетъ, хотя англійскій математикъ Love и указалъ на то, что имѣются вполнѣ опредѣленныя причины, заставляющія предполагать существованіе дисперсіи для сейсмическихъ волнъ съ длинными періодами.

При изслѣдованіи характерныхъ особенностей продольныхъ волнъ въ моментъ ихъ перваго появленія на отдаленныхъ сейсмическихъ станціяхъ,

въ послѣднее время натолкнулись на одно очень любопытное обстоятельство. Оказывается, что въ нѣкоторыхъ случаяхъ фронтъ первой продольной волны представляетъ собою волну сжатія, т.-е. волна, ударяясь о поверхность земли въ мѣстѣ наблюденія, даетъ небольшое смѣщеніе поверхности въ сторону *отъ эпицентра*. Бываютъ, однако, случаи, когда фронтъ первой волны представляетъ собою волну разрѣженія, вызывая какъ-бы всасывающее дѣйствіе, и тѣмъ самымъ смѣщая элементъ поверхности земли въ сторону *къ эпицентру*. Отчего зависитъ возникновеніе волнъ того или иного типа остается вопросомъ еще совершенно открытымъ, но съ этимъ явленіемъ непремѣнно надо считаться при опредѣленіи азимута эпицентра по величинѣ проэкцій начальнаго смѣщенія почвы на направленіе меридіана и параллели, выведенныхъ изъ наблюденій съ соотвѣтствующими сейсмографами, такъ какъ въ зависимости отъ характера волны (сжатіе или разрѣженіе) первое смѣщеніе почвы (при P) можетъ быть или отъ эпицентра, или къ эпицентру, и, если не учитывать этого обстоятельства, то легко, при опредѣленіи азимута эпицентра, сдѣлать ошибку въ 180°.

Вертикальный сейсмографъ, указывающій направленіе смѣщенія почвы въ вертикальномъ направленіи, даетъ возможность тотчасъ-же разобраться въ этомъ вопросѣ. А именно, такъ какъ продольныя сейсмическія волны идутъ всегда снизу, то, если вертикальный сейсмографъ укажетъ, что первое смѣщеніе почвы было кверху, то тѣмъ самымъ опредѣлится, что первая пришедшая сейсмическая волна была волною сжатія и наоборотъ.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что вертикальный сейсмографъ является весьма цѣннымъ приборомъ, снимающимъ всякую неопредѣленность въ вопросѣ объ опредѣленіи, по двумъ горизонтальнымъ составляющимъ смѣщенія почвы, истиннаго азимута эпицентра.

Переходя къ волнамъ поперечнымъ, чрезвычайно важнымъ является вопросъ о *направленіи колебаній* частицъ въ такой поперечной волнѣ, или, что то-же самое, о положеніи плоскости колебаній въ соотвѣтствующемъ поперечномъ сейсмическомъ лучѣ, каковую плоскость можно условно назвать плоскостью поляризаціи. Изслѣдуя направленіе истиннаго смѣщенія почвы при первомъ вступленіи поперечныхъ волнъ въ началѣ второй фазы землетрясенія, можно подойти къ рѣшенію и этого вопроса. Мы его разсмотримъ подробнѣе впослѣдствіи въ § 3 главы X.

Характерныя, геологическія и физическія особенности тѣхъ слоевъ, черезъ которые проходятъ сейсмическіе лучи, должны несомнѣнно оказывать вліяніе на положеніе этой плоскости поляризаціи.

Для изслѣдованія скоростей распространенія продольныхъ и поперечныхъ волнъ въ самыхъ верхнихъ слояхъ земли, а также для изученія ихъ различныхъ характерныхъ особенностей, было-бы чрезвычайно важно и

интересно произвести аккуратныя измѣренія, съ приспособленными къ тому сейсмографами, при искусственныхъ землетрясеніяхъ, напр. при подземныхъ взрывахъ съ большими массами динамита, разставивъ около мѣстъ взрыва и въ различныхъ разстояніяхъ отъ него соотвѣтствующіе приборы. Несомнѣнно, что скорости распространенія продольныхъ и поперечныхъ волнъ должны въ значительной мѣрѣ зависѣть отъ физическихъ свойствъ верхнихъ слоевъ земли, и, напримѣръ, въ вулканическихъ породахъ скорости эти должны получиться совершенно иныя, чѣмъ на пескѣ или вообще на наносныхъ отложеніяхъ.

Такія изслѣдованія дали бы намъ возможность получить столь важныя для сейсмометріи данныя прямо изъ опыта.

Кое-какія попытки въ этомъ направленіи уже дѣлались, но все это далеко еще не достаточно. Слѣдовало-бы предпринять вполнѣ систематическое и раціональное изслѣдованіе вопроса.

Что такія наблюденія дѣйствительно возможны, подтверждается тѣмъ фактомъ, что одинъ очень чувствительный сейсмографъ, съ нормальнымъ увеличеніемъ 2000 (см. § 4 главы V), установленный въ Göttingen'ѣ, отмѣтилъ взрывъ, произошедшій въ Besançon'ѣ, въ разстояніи 600 километровъ.

Сейсмическія явленія, наблюдаемыя при землетрясеніяхъ у поверхности земли, могутъ быть раздѣлены на два главныхъ класса: 1) на *микросейсмическія* и 2) на *макросейсмическія*.

Первыя, по своей малости, непосредственно не ощущаются людьми, но могутъ быть отмѣчены чувствительными сейсмографами. Большею частью эти колебанія почвы происходятъ отъ отдаленныхъ землетрясеній, причемъ современные сейсмографы обладаютъ такой громадной чувствительностью, что можно съ увѣренностью утверждать, что ни одно мало-мальски значительное землетрясеніе, гдѣ-бы оно не произошло на всемъ земномъ шарѣ, не можетъ остаться неотмѣченнымъ на чувствительныхъ приборахъ первоклассныхъ сейсмическихъ станцій. Въ частности, Пулковская сейсмическая станція съ величайшей легкостью и очень отчетливо отмѣчаетъ землетрясенія изъ Камчатки, Японіи, Формозы, Новой-Гвинеи, Калифорніи, Мексики, Южной-Америки и т. д. Увеличеніе Пулковскихъ приборовъ настолько велико, что они могутъ отмѣтить движеніе почвы порядка 0,1 микрона или 0,0001 $^{м}/_{м}$. Такова предѣльная точность записей подобнаго типа сейсмографовъ.

Макросейсмическія колебанія почвы суть такія колебанія, которыя непосредственно ощущаются людьми. Они могутъ вызвать подчасъ сильныя разрушительныя дѣйствія и даже сопровождаться гибелью людей и длительнымъ измѣненіемъ рельефа почвы. Само собою разумѣется, что пере-

ходъ отъ микросейсмическихъ къ макросейсмическимъ колебаніямъ, въ зависимости отъ чувствительности приборовъ и отзывчивости наблюдателя, будетъ совершенно постепенный.

Если въ дѣлѣ изученія микросейсмическихъ явленій современная сейсмометрія стала на совершенно раціональный путь и, при помощи соотвѣтствующихъ приборовъ—сейсмографовъ, оцѣниваетъ силу этихъ явленій по ихъ механическому дѣйствію у поверхности земли, измѣряя *абсолютныя* величины смѣщеній и періоды колебаній точекъ земной поверхности, откуда легко уже вывести и соотвѣтствующія наибольшія ускоренія движенія, являющіяся мѣриломъ дѣйствія той или иной силы, то въ вопросѣ оцѣнки силы макросейсмическихъ явленій господствуетъ еще до сихъ поръ большой произволъ.

Интенсивность макросейсмическихъ явленій оцѣнивается въ настоящее время почти исключительно на основаніи субъективныхъ впечатлѣній, причемъ извѣстнымъ мѣриломъ, регулирующимъ таковую оцѣнку, служатъ различныя условныя шкалы, напр. 10-ти-балльная шкала Росси-Фореля и 12-ти-балльная шкала Меркалли, гдѣ признаками для оцѣнки силы землетрясенія тѣмъ или инымъ балломъ служатъ нѣкоторыя внѣшнія явленія, какъ напр., ощущеніе колебаній почвы нѣсколькими лицами въ состояніи покоя, качаніе висячихъ предметовъ, остановка часовъ съ висячими маятниками, паденіе дымовыхъ трубъ и пр.

Конечно, такая оцѣнка силы землетрясенія, на основаніи того или иного балла, въ высшей степени условна и не даетъ намъ еще настоящаго представленія *о динамической интенсивности* явленія.

Для того, чтобы произвести раціональную оцѣнку силы макросейсмическихъ явленій, надлежало-бы, какъ и въ случаѣ микросейсмическихъ явленій, знать соотвѣтствующую величину *наибольшаго ускоренія* движенія почвы.

Только располагая такимъ наблюдательнымъ матеріаломъ, можно произвести дѣйствительно раціональную оцѣнку силы землетрясенія въ различныхъ точкахъ такъ называемой *плейстосейстовой области* или области наибольшихъ разрушеній, и вычертить затѣмъ на картѣ правильныя *изосейсты* или кривыя одинаковой интенсивности землетрясенія.

Къ сожалѣнію, это теперь нигдѣ еще не дѣлается и сила близкихъ землетрясеній по прежнему оцѣнивается по условнымъ шкаламъ, хотя, казалось-бы, что съ принципіальной точки зрѣнія не было-бы никакихъ препятствій къ тому, чтобы воспользоваться для оцѣнки макросейсмическихъ явленій приборами того-же типа, какъ и для оцѣнки микросейсмическихъ явленій, придавъ послѣднимъ значительно меньшую чувствительность и бо́льшую прочность и упростивъ во всемъ ихъ конструкцію, дабы они, при сильныхъ колебаніяхъ почвы, не выходили-бы изъ строя.

Но можно, для приблизительной оцѣнки силы макросейсмическихъ явленій, воспользоваться явленіемъ опрокидыванія предметовъ опредѣленныхъ размѣровъ и формы подъ вліяніемъ колебаній почвы, и на этомъ принципѣ основать чисто *динамическую шкалу* для оцѣнки силы макросейсмическихъ явленій.

Къ этому вопросу мы еще вернемся въ этой-же главѣ.

Сейсмическія явленія могутъ быть еще подраздѣлены на слѣдующія двѣ категоріи: 1) на *тахисейсмическія* и 2) на *брадисейсмическія*.

Тахисейсмическія явленія суть тѣ, которыя протекаютъ по времени сравнительно быстро. Къ нимъ относятся колебанія почвы при близкихъ и дальнихъ землетрясеніяхъ.

Брадисейсмическія явленія суть такія явленія, которыя протекаютъ сравнительно медленно, а нѣкоторыя даже чрезвычайно медленно. Къ послѣдней категоріи относятся, напримѣръ, медленныя поднятія и опусканія материковъ или вообще медленное относительное смѣщеніе однѣхъ массъ горныхъ породъ по отношенію къ другимъ. Такія брадисейсмическія движенія имѣютъ, несомнѣнно, очень важное значеніе въ вопросѣ о возникновеніи землетрясеній, такъ какъ, при такихъ относительныхъ смѣщеніяхъ, состояніе упругаго натяженія въ отдѣльныхъ горныхъ породахъ или слояхъ можетъ сдѣлаться весьма значительнымъ, и тогда достаточно самого незначительнаго внѣшняго импульса, чтобы предѣлъ упругости былъ перейденъ и произошло-бы внезапное смѣщеніе однихъ слоевъ по отношенію къ другимъ, каковое смѣщеніе можетъ вызвать тектоническое землетрясеніе.

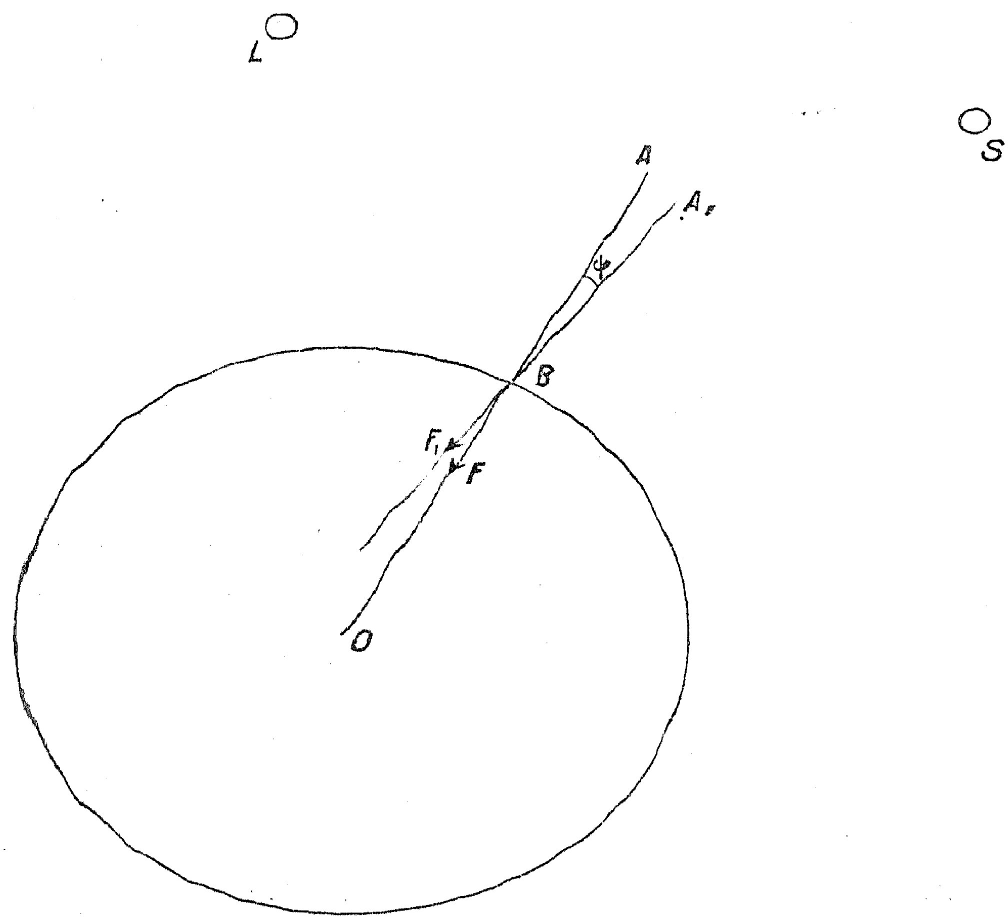
Какъ на примѣръ такихъ брадисейсмическихъ явленій можно указать на то, что два извѣстныхъ горныхъ массива Aspromonte и Monti Peloritani, расположенные соотвѣтственно на Калабрійскомъ и Сицилійскомъ берегахъ Мессинскаго пролива, медленно смѣщаются одинъ по отношенію къ другому, и, дѣйствительно, мы знаемъ, что Калабрія и Сицилія представляютъ собою сильно сейсмичную область, гдѣ подчасъ бываютъ очень сильныя землетрясенія, примѣромъ чему можетъ служить послѣднее извѣстное Мессинское землетрясеніе 28 декабря 1908 года.

Къ брадисейсмическимъ явленіямъ можно отнести и медленныя деформаціи земли, какъ цѣлаго, подъ вліяніемъ лунно-солнечнаго притяженія.

На слѣдующемъ чертежѣ 36 представлена земля, которая, для простоты, начерчена въ видѣ шара, хотя истинная форма земли ближе подходитъ къ эллипсоиду вращенія.

Въ мѣстѣ наблюденія B равнодѣйствующая всѣхъ силъ притяженія, исходящихъ отъ отдѣльныхъ массъ земли и центробѣжной силы вращенія земли около своей оси, имѣетъ опредѣленное направленіе F въ простран-

Черт. 36.



ствѣ. Это направленіе OBA и будетъ направленіе такъ называемой *нормальной отвѣсной линіи.*

Но, кромѣ притяженія самой земли на какую-нибудь массу, находящуюся въ B, дѣйствуетъ еще и притяженіе солнца, обладающаго громадной массой, и притяженіе луны, имѣющей, хотя и значительно меньшую массу, но зато находящейся въ сравнительно близкомъ разстояніи отъ земли (около 60 земныхъ радіусовъ).

Благодаря притяженію солнца и луны, равнодѣйствующая F_1 всѣхъ силъ, дѣйствующихъ въ точкѣ B, измѣнитъ нѣсколько свое направленіе. Соотвѣтственно этому измѣнится и направленіе отвѣсной линіи изъ BA въ BA_1.

Такъ какъ притяженіе солнца и луны очень мало въ сравненіи съ притяженіемъ земли, то уголъ $\psi = \angle ABA_1$ будетъ очень малъ; но онъ все-таки, при помощи достаточно чувствительныхъ приборовъ, доступенъ непосредственному измѣренію.

Направленіе истинной отвѣсной линіи BA_1 зависитъ отъ относительнаго расположенія солнца, луны и точки B; такимъ образомъ, съ теченіемъ времени, прямая BA_1 будетъ описывать нѣкоторую коническую поверхность.

Направленіе истинной отвѣсной линіи дается направленіемъ отвѣса или направленіемъ нити, къ концу которой привѣшена тяжелая масса.

Представимъ себѣ, что къ этой массѣ придѣланъ регистрирующій штифтъ, могущій чертить на горизонтальной, закопченной стеклянной пластинкѣ, неизмѣнно скрѣпленной съ поверхностью земли.

Если-бы земля представляла собою абсолютно твердое тѣло, то конецъ этого штифта вычерчивалъ-бы на пластинкѣ кривую, соотвѣтствующую различнымъ положеніямъ истинной отвѣсной линіи. Измѣривъ амплитуду смѣщенія штифта и зная разстояніе его до точки подвѣса, можно бы было получить соотвѣтствующій уголъ ψ. На самомъ-же дѣлѣ, въ виду малости угла ψ, такой способъ измѣренія былъ-бы очень неточенъ и даже не былъ-бы въ состояніи ничего дать, если только не пользоваться чрезмѣрно длиннымъ отвѣсомъ. Той-же цѣли можно, однако, гораздо лучше и проще достигнуть при помощи такъ называемаго горизонтальнаго маятника, теорію котораго мы разсмотримъ въ слѣдующей главѣ. Для этой цѣли надо только воспользоваться двумя горизонтальными маятниками, расположенными въ двухъ, взаимно перпендикулярныхъ азимутахъ. Изъ такихъ наблюденій нетрудно вывести истинное положеніе отвѣсной линіи BA_1 по отношенію къ нормальному ея положенію BA.

Вернемся, однако, къ разсмотрѣнію простого вертикальнаго маятника съ пишущимъ штифтомъ, и спросимъ себя, что было-бы, если-бы земля, какъ цѣлое, обладала-бы свойствами жидкаго тѣла.

Въ этомъ случаѣ, по извѣстнымъ законамъ гидростатики, поверхность земли около точки B расположилась бы перпендикулярно къ равнодѣйствующей всѣхъ силъ, дѣйствующихъ въ точкѣ B, т.-е. перпендикулярно къ направленію BA_1, и нашъ приборъ, показывающій лишь *относительное* положеніе истинной отвѣсной линіи по отношенію къ поверхности земли, *не обнаружилъ* бы никакого отклоненія отвѣсной линіи, т.-е. уголъ ψ получился-бы изъ опыта равнымъ нулю.

Итакъ, для абсолютно твердаго тѣла уголъ ψ будетъ maximum, а для жидкаго тѣла равенъ нулю.

Величину угла ψ можно опредѣлить, какъ раньше было указано, изъ наблюденій съ горизонтальными маятниками, изслѣдуя ихъ постепенныя уклоненія отъ нормальнаго положенія равновѣсія, причемъ величину угла ψ можно получить, такимъ образомъ, изъ наблюденій какъ функцію времени t.

Теоретическое же значеніе ψ, въ предположеніи, что земля абсолютно тверда, т.-е. максимальное значеніе ψ_m, можно получить прямо изъ вычисленій, зная массу земли, солнца и луны и ихъ взаимное расположеніе, и также выразить ψ_m какъ функцію времени t.

Такими изслѣдованіями занимались Rebeur-Paschwitz въ Страсбургѣ и русскій астрономъ Картацци въ Николаевѣ; потомъ этимъ-же вопросомъ занимались Hecker въ Потсдамѣ и А. Я. Орловъ въ Юрьевѣ. Наблюденія послѣдняго особенно надежны и интересны, причемъ Орловъ спеціально занялся вопросомъ изученія вліянія притяженія луны, исключивъ, очень остроумнымъ расположеніемъ наблюдательнаго матеріала, вліяніе солнечныхъ членовъ.

Сравненіе наблюденныхъ и теоретическихъ значеній угловъ ψ и ψ_m показало, во-первыхъ, что зависимость ψ отъ времени соотвѣтствуетъ вполнѣ теоріи, но что ψ *всегда меньше* ψ_m.

Это обстоятельство указываетъ прямо на то, что земля, какъ цѣлое, не представляетъ собою абсолютно твердаго тѣла, а, подъ вліяніемъ лунно-солнечнаго притяженія, она нѣсколько *деформируется*. Величину этой деформаціи можно, такимъ образомъ, легко измѣрить. Такія деформаціи можно, слѣдовательно, отнести къ классу брадисейсмическихъ явленій.

Оказывается, что упругія свойства земли, какъ цѣлаго, близко подходятъ къ свойствамъ стали, т.-е. земля деформируется почти также, какъ деформировался-бы стальной шаръ, того-же самого діаметра.

Эти наблюденія указываютъ кромѣ того на то, что упругія свойства земли какъ-будто нѣсколько различны въ направленіи меридіана и въ направленіи параллели, но вопросъ этотъ не можетъ считаться окончательно еще выясненнымъ.

Дѣло въ томъ, что послѣднія, наиболѣе надежныя наблюденія Hecker'а и Орлова были произведены въ мѣстахъ, отстоящихъ сравнительно недалеко отъ большихъ водныхъ массъ, гдѣ наблюдаются приливы и отливы. Эти послѣдніе могутъ, въ свою очередь, благодаря періодическому подниманію и опусканію громадныхъ массъ воды, также оказать нѣкоторое вліяніе на положеніе отвѣсной линіи, и это возмущающее вліяніе приливовъ и отливовъ очень трудно учесть и исключить.

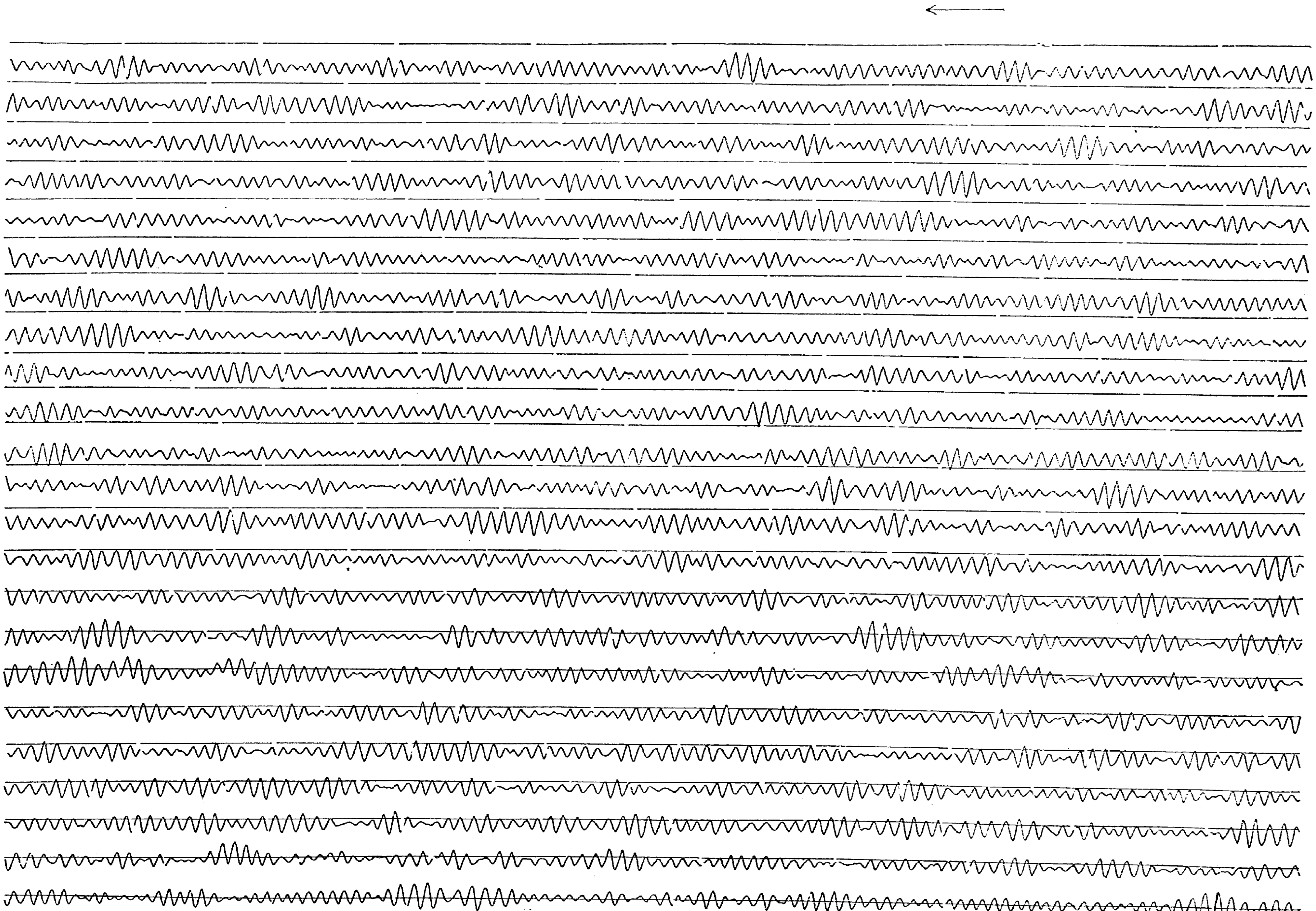
Для окончательнаго рѣшенія вопроса, слѣдовало-бы произвести соотвѣтствующія наблюденія надъ деформаціями земли въ значительномъ удаленіи отъ большихъ морей, гдѣ-нибудь въ глубинѣ большихъ континентовъ, напр. въ Казани, Иркутскѣ, Томскѣ или Ташкентѣ. Русская Постоянная Центральная Сейсмическая Комиссія и озабочена въ настоящее время организаціей подобныхъ наблюденій, общее руководство которыми поручено А. Я. Орлову.

Теорію наблюденій надъ деформаціями земли мы разсмотримъ подробнѣе отдѣльно въ главѣ XI.

Кромѣ колебаній почвы, вызванныхъ близкими или отдаленными

Черт. 37.

18-IX-1910.



землетрясеніями, наблюдаются, при отсутствіи всякихъ землетрясеній, совершенно особыя, чрезвычайно характерныя пульсаціи земной коры, которыя отличаются замѣчательной правильностью и ритмичностью.

Эти колебанія производятъ впечатлѣніе того, какъ-будто вся земля дышетъ.

Такія правильныя пульсаціи наблюдались всюду, гдѣ только производились точныя сейсмометрическія наблюденія, причемъ эти колебанія отмѣчаются, какъ горизонтальными, такъ и вертикальными сейсмографами.

На слѣдующемъ чертежѣ 37 представлены эти колебанія въ томъ видѣ, въ какомъ они были записаны Пулковскимъ вертикальнымъ сейсмографомъ 18-го сентября 1910 г. (часть оригинальной сейсмограммы).

Этимъ пульсаціямъ присвоено названіе *микросейсмическихъ колебаній I-го рода.*

Иногда они продолжаются всего только нѣсколько часовъ, иногда-же они длятся цѣлые дни подрядъ, постепенно, то усиливаясь, то ослабляясь. Особенно часто они наблюдаются въ осенніе и зимніе мѣсяцы, причемъ въ эти времена года почти никогда не бываетъ дней, когда эти микросейсмическія колебанія совершенно отсутствовали-бы. Наоборотъ, въ весенніе и особенно лѣтніе мѣсяцы, микросейсмическія колебанія I-го рода значительно слабѣе, и встрѣчаются дни, когда сейсмографъ чертитъ почти совершенно идеально прямыя линіи, безъ всякихъ намековъ на какое-либо движеніе почвы.

Микросейсмическія колебанія, когда они достаточно интенсивны, подчасъ крайне затрудняютъ разборъ сейсмограммъ отъ дальнихъ землетрясеній, маскируя начало предварительныхъ фазъ.

Не подлежитъ никакому сомнѣнію, что эти колебанія не инструментальнаго происхожденія, а обусловливаются дѣйствительными пульсаціями земной оболочки.

Если отъ записи сейсмографа перейти къ истиннымъ періодамъ и смѣщеніямъ точки земной поверхности, то оказывается, что полный періодъ T этихъ колебаній, на самыхъ различныхъ точкахъ земной поверхности, колеблется большею частью въ предѣлахъ отъ 4 до 8 секундъ, хотя встрѣчаются иногда періоды и меньшіе, и бо́льшіе этихъ предѣльныхъ величинъ.

Большею частью можно подмѣтить цѣлый рядъ правильныхъ синусоидальныхъ волнъ; потомъ налагается, видимо, какое-то новое движеніе и запись нѣсколько теряетъ свой правильный характеръ, но, по истеченіи немногихъ секундъ, эта правильность вновь устанавливается, потомъ снова теряется и т. д. Характерный образчикъ такихъ микросейсмическихъ колебаній представляетъ собою именно сейсмограмма, изображенная на чертежѣ 37.

Подмѣчена еще одна особенность этихъ пульсацій, а именно, что вообще, съ увеличеніемъ періода колебаній, увеличивается нѣсколько и соотвѣтствующая амплитуда и наоборотъ, хотя, по наблюденіямъ Walker'а и van Everdingen'а, существуютъ иногда и исключенія изъ этого правила. Эта особенность не имѣетъ совершенно мѣста при обыкновенныхъ гармоническихъ колебаніяхъ, напр. при колебаніяхъ простого вертикальнаго маятника, гдѣ, для малыхъ угловъ отклоненія, періодъ колебаній практически совершенно не зависитъ отъ амплитуды.

Абсолютная величина смѣщенія почвы при этихъ микросейсмическихъ колебаніяхъ вообще говоря очень мала, колеблясь въ предѣлахъ нѣсколькихъ микроновъ или тысячныхъ долей миллиметра.

Причина возникновенія этихъ микросейсмическихъ колебаній I-го рода еще мало выяснена и нѣсколько даже загадочна.

Къ правильному, систематическому изученію этого явленія приступлено только въ самое послѣднее время. Этимъ вопросомъ, болѣе другихъ, занимался, между прочимъ, германскій сейсмологъ Hecker. И на Пулковской сейсмической станціи собранъ въ настоящее время по этому вопросу довольно богатый наблюдательный матеріалъ.

Эти колебанія, повидимому, не находятся ни въ какой прямой связи съ направленіемъ и силой вѣтра въ *мѣстѣ наблюденія*, такъ какъ часто, при совершенно тихой погодѣ, микросейсмическія колебанія I-го рода бываютъ очень значительны.

То обстоятельство, что періодъ этихъ колебаній оказывается одинаковымъ для различныхъ точекъ земного шара, наводитъ невольно на мысль, что въ этомъ вопросѣ мы имѣемъ, такъ или иначе, дѣло съ какими-нибудь *собственными* періодами колебанія земной оболочки или земной коры, покоящейся, по современнымъ геологическимъ воззрѣніямъ, на слоѣ магмы.

Если это такъ, то спрашивается, что можетъ вызвать эти колебанія земной оболочки и заставить ее пульсировать?

Такихъ причинъ можетъ быть, конечно, нѣсколько. Напримѣръ, землетрясенія могутъ привести земную оболочку въ состояніе дрожжанія, которое, и послѣ прохода сейсмическихъ волнъ, сохраняется на нѣкоторое время.

Этому-же можетъ способствовать и сильный вѣтеръ, особенно, если онъ на своемъ пути встрѣчаетъ какія-нибудь преграды къ своему распространенію, въ видѣ ли высокихъ горъ или какихъ-нибудь другихъ препятствій. То-же дѣйствіе можетъ быть вызвано и прибоемъ морскихъ волнъ о высокіе и скалистые берега материковъ или вліяніемъ значительныхъ передвиженій массъ, напр. при приливахъ и отливахъ, или-же рѣзкими измѣненіями внѣшняго давленія, напр. при проходѣ какого-нибудь циклоническаго

минимума. Послѣднее дѣйствіе можетъ быть очень значительно, если принять во вниманіе, что измѣненіе высоты барометра всего только на $10^{м.}/_{м.}$ соотвѣтствуетъ уже измѣненію давленія на 1 квадратный метръ въ $\frac{1 \times 13{,}6 \times 10000}{1000} = 136$ килогр.

И, дѣйствительно, нѣкоторыя наблюденія, произведенныя въ Сѣверной Америкѣ, указываютъ какъ-будто на то, что интенсивность микросейсмическихъ колебаній I-го рода находится въ нѣкоторой зависимости отъ формы и расположенія изобаръ и отъ величины соотвѣтствующаго барометрическаго градіента. Слѣдовательно, возможно, что существуетъ зависимость между микросейсмическими колебаніями I-го рода и движеніемъ циклоновъ. Дѣйствительно, есть даже намеки на то, что въ Западной Европѣ усиленіе этихъ микросейсмическихъ колебаній I-го рода *предшествуетъ* появленію циклона. На этомъ основаніи можетъ быть удастся со временемъ установить особый способъ предсказыванія циклоновъ.

Чтобы окончательно выяснить вопросъ о происхожденіи этихъ пульсацій земной оболочки, надлежало-бы произвести сравнительныя наблюденія на многихъ станціяхъ въ опредѣленные часы дня и ночи, а также и на рядѣ станцій, расположенныхъ по особому плану въ различныхъ удаленіяхъ отъ берега моря, у котораго часто наблюдается сильный прибой, причемъ слѣдовало-бы одновременно организовать и правильныя, систематическія наблюденія надъ періодомъ и высотой морскихъ волнъ.

Для этой послѣдней цѣли, а именно, для опредѣленія промежутка времени между двумя послѣдовательными волнами, при ихъ ударахъ о берега, Schuster'омъ и Airey былъ, по порученію Международной Сейсмологической Ассоціаціи, сконструированъ особый приборъ — счетчикъ числа волнъ.

Онъ состоитъ изъ двухъ вертикальныхъ трубокъ, наполненныхъ водой, одна изъ которыхъ соединена, при помощи особой трубки, съ моремъ. Оба колѣна соединены между собою очень узкой трубочкой, такъ что собственное колебаніе воды въ приборѣ почти апеpіодическое. Приборъ основанъ, такимъ образомъ, на передачѣ гидростатическаго давленія, причемъ, при каждой волнѣ, благодаря особому электрическому приспособленію съ замыкающимся контактомъ, пишущее перо подается немного впередъ, перпендикулярно къ направленію движенія регистрирной ленты.

Послѣ прохода 120 волнъ перо возвращается автоматически назадъ въ свое первоначальное положеніе. Такимъ образомъ, на регистрирной лентѣ получается рядъ діагональныхъ линій, по величинѣ наклона которыхъ, имѣя на лентѣ отмѣтки времени, легко вывести среднюю продолжительность одной волны.

Приборъ этотъ снабженъ также особымъ приспособленіемъ для исключенія вліянія измѣненія уровня въ трубкахъ при приливахъ и отливахъ.

Предварительныя наблюденія, произведенныя съ этимъ приборомъ около береговъ Англіи, обнаружили преобладаніе періода между двумя волнами, примѣрно, въ 6 секундъ, что весьма близко соотвѣтствуетъ средней величинѣ періода микросейсмическихъ колебаній I-го рода.

Кромѣ правильныхъ, ритмическихъ пульсацій земной оболочки, сейсмограммы обнаруживаютъ часто еще другой, совершенно отличный типъ колебаній, которыя также подчасъ очень мѣшаютъ разбору сейсмограммъ отъ дальнихъ землетрясеній. Этимъ послѣднимъ колебаніямъ, въ отличіе отъ первыхъ, присвоено названіе *микросейсмическихъ колебаній II-го рода.*

Эти послѣднія колебанія имѣютъ далеко уже не такой правильный характеръ, притомъ они отличаются значительно бо̀льшими періодами; эти періоды колеблятся къ тому-же въ гораздо болѣе широкихъ предѣлахъ, чѣмъ при микросейсмическихъ колебаніяхъ I-го рода, но въ среднемъ можно принять соотвѣтствующій періодъ колебаній равнымъ 30 секундамъ.

Эти микросейсмическія колебанія II-го рода, повидимому, совершенно мѣстнаго происхожденія и обусловливаются главнымъ образомъ силой господствующаго въ данномъ мѣстѣ вѣтра. Сопоставленіе силы этихъ микросейсмическихъ колебаній съ силой вѣтра, сдѣланное И. И. Вилипомъ для Пулкова, устанавливаетъ несомнѣннымъ образомъ тотъ фактъ, что въ вѣтренные дни микросейсмическія колебанія II-го рода въ Пулковѣ усиливаются.

При сильномъ вѣтрѣ возможны разные неправильные потоки воздуха, внезапные толчки, особая аспирація въ помѣщеніи, гдѣ стоятъ приборы и т. п. Не исключена, конечно, возможность, что такія движенія воздуха могутъ, черезъ разныя щели и отверстія колпаковъ, прикрывающихъ сейсмографы, дѣйствовать и непосредственно на приборы, что и подтверждается соотвѣтственными наблюденіями, но дѣйствіе вѣтра заключается главнымъ образомъ не въ этомъ.

Дѣйствительно, въ Пулковѣ одинъ весьма чувствительный сейсмографъ былъ установленъ въ теченіе нѣсколькихъ мѣсяцевъ подъ особымъ стальнымъ колпакомъ, изъ подъ котораго воздухъ былъ выкаченъ, примѣрно, до давленія въ 45 $^м/_м$ ртутнаго столба. Прикрытіе маятника оказалось столь герметически сдѣланнымъ, что давленіе подъ колпакомъ совершенно не измѣнилось въ теченіе многихъ мѣсяцевъ, и, тѣмъ не менѣе, такой маятникъ обнаруживалъ подчасъ (регистрація была гальванометрическая на разстояніи) довольно значительныя микросейсмическія колебанія II-го рода. Здѣсь уже о какомъ-либо непосредственномъ дѣйствіи потоковъ воздуха на маятникъ, конечно, не могло быть и рѣчи.

Причину возникновенія микросейсмическихъ колебаній II-го рода надо

скорѣе искать въ дѣйствіи вѣтра на всякіе высокіе предметы, какъ-то зданія, деревья и пр., находящіеся въ непосредственномъ сосѣдствѣ или даже, какъ до сихъ поръ въ Пулковѣ, надъ самой сейсмической станціей, которая помѣщается какъ разъ въ подвалахъ главнаго зданія астрономической обсерваторіи.

Подъ вліяніемъ вѣтра всѣ эти высокіе предметы могутъ прійти въ движеніе, которое передается затѣмъ уже самой почвѣ и обнаруживается на записяхъ чувствительныхъ сейсмографовъ.

Потоки воздуха внутри помѣщенія станціи могутъ также производить извѣстное давленіе на столбы, на которыхъ стоятъ сейсмическіе приборы, и сообщать имъ нѣкоторые, хотя и минимальные наклоны, но которые, тѣмъ не менѣе, обнаруживаются на чувствительныхъ сейсмографахъ.

Этотъ вопросъ былъ также обстоятельно изслѣдованъ И. И. Вилипомъ.

Оказалось, что простой, маленькій электрическій вентиляторъ, поставленный у входной двери сейсмической станціи, вызывалъ отклоненіе свѣтящейся точки на регистрирномъ аппаратѣ сейсмографа. Даже, если дуть просто ртомъ на вышеупомянутый стальной колпакъ, герметически прикрывавшій одинъ изъ сейсмографовъ и вѣсившій около *10 пудовъ*, то получалось небольшое отклоненіе свѣтящейся точки на барабанѣ. При различныхъ этихъ опытахъ малыя измѣненія давленія въ помѣщеніи сейсмографовъ измѣрялись при помощи очень чувствительнаго статоскопа (чувствительный барографъ), у котораго 1 м/м на бумагѣ соотвѣтствовалъ, приблизительно, давленію въ 0,1 м/м барометра.

Послѣ такихъ опытовъ легко представить себѣ, что вѣтеръ можетъ, своимъ косвеннымъ дѣйствіемъ на зданія и пр., вызвать особыя колебанія сейсмическихъ аппаратовъ, обнаруживающіяся въ видѣ микросейсмическихъ колебаній II-го рода.

Въ виду этого, слѣдуетъ всегда стремиться къ тому, чтобы строить сейсмическія станціи, предназначенныя для чувствительныхъ сейсмографовъ, совершенно подъ землей, избѣгая въ ихъ ближайшемъ сосѣдствѣ всякихъ высокихъ предметовъ.

Кромѣ микросейсмическихъ колебаній II-го рода, наблюдаются еще иногда особыя колебанія третьяго типа, съ еще болѣе длинными періодами, доходящими до 1—2-хъ минутъ и болѣе. Причина ихъ возникновенія совершенно еще не выяснена. Можетъ быть они обусловливаются какими нибудь температурными измѣненіями внѣшней среды, но можетъ быть причина ихъ возникновенія кроется въ чемъ-нибудь совершенно иномъ.

Мы видимъ, такимъ образомъ, сколько различныхъ вопросовъ современная сейсмометрія выдвигаетъ и какое широкое поле открывается для всякихъ новыхъ изслѣдованій и изысканій.

Одинъ вопросъ, касающійся землетрясеній, особенно много служилъ объектомъ изслѣдованій, а именно вопросъ о частотѣ и повторяемости землетрясеній.

Что касается частоты землетрясеній, то таковыхъ на всемъ земномъ шарѣ происходитъ гораздо больше, чѣмъ можно было-бы съ перваго взгляда предполагать.

Наличіе высоко-чувствительныхъ сейсмографовъ даетъ возможность, какъ раньше было указано, слѣдить съ одного и того-же пункта за тѣмъ, что происходитъ на всемъ земномъ шарѣ. Такіе сейсмографы показываютъ намъ, что землетрясенія представляютъ собою чрезвычайно обычное явленіе. Въ частности, въ видѣ примѣра, можно указать на то, что за 1910 годъ Пулковскіе сейсмографы отмѣтили 272 большихъ и малыхъ землетрясенія.

Что касается вопроса о времени возникновенія землетрясеній, то есть намеки на то, что землетрясенія бываютъ вообще чаще осенью и зимой, чѣмъ лѣтомъ и весной, и чаще въ ночные часы, чѣмъ въ дневные, но вопросъ этотъ далеко еще не выясненъ.

Было много попытокъ найти какой-нибудь законъ, характеризующій періодичность или повторяемость землетрясеній. Старались сопоставить частоту землетрясеній съ различными циклами луны и т. п. На эти изслѣдованія было потрачено очень много времени и труда, но результатъ получился пока довольно неопредѣленный, по крайней мѣрѣ, о какой-нибудь явно выраженной закономѣрности въ повторяемости землетрясеній совершенно говорить не приходится.

Одно, однако, несомнѣнно, что, послѣ какого-нибудь сильнаго землетрясенія, внутренніе слои земли испытываютъ такія значительныя смѣщенія, что они еще очень долго не въ состояніи принять окончательное положеніе равновѣсія, а продолжаютъ нѣсколько перемѣщаться одни по отношенію къ другимъ, вызывая тѣмъ самымъ колебаніе верхнихъ слоевъ земли или повторныя землетрясенія и отдѣльные удары, интенсивность которыхъ съ теченіемъ времени постепенно убываетъ. Эти послѣдующія землетрясенія или удары (after-shocks въ терминологіи англичанъ) продолжаются иногда цѣлые мѣсяцы, а иногда и годы. Такъ было, напримѣръ, послѣ извѣстнаго Вѣрненскаго землетрясенія 9-го іюня 1887 года; то-же самое наблюдается и теперь, послѣ послѣдняго Семирѣченскаго землетрясенія 3—4 января 1911 года.

Доискивались также зависимости землетрясеній отъ различныхъ метеорологическихъ элементовъ, но пока довольно безуспѣшно, хотя и есть какъ-будто намеки на то, что въ нѣкоторыхъ случаяхъ возникновеніе землетрясенія совпадаетъ по времени съ проходомъ какого-нибудь глубокаго циклона.

Въ существованіи подобной зависимости отъ давленія барометра, по существу дѣла, нѣтъ ничего неправдоподобнаго, если мы обратимъ вниманіе на то, что, при проходѣ сильнаго циклона, давленіе атмосферы, передающееся и на внутренніе слои земли, можетъ въ теченіе короткаго промежутка времени измѣниться въ довольно широкихъ предѣлахъ, такъ что вполнѣ возможно, что такое быстрое измѣненіе величины внѣшней силы и служитъ тѣмъ послѣднимъ импульсомъ, который окончательно нарушаетъ мало-устойчивое состояніе равновѣсія внутреннихъ слоевъ земли и вызываетъ тѣмъ самымъ тектоническое землетрясеніе. Но пока это только одно предположеніе.

Несомнѣнно, что послѣ всякаго крупнаго землетрясенія происходитъ значительное перемѣщеніе массъ внутри земли. Хотя эти глубоко лежащія массы намъ и совершенно недоступны, но тѣмъ не менѣе представится быть можетъ въ недалекомъ будущемъ возможность, по наблюденіямъ, произведеннымъ у поверхности земли, вывести нѣкоторыя заключенія объ относительномъ перемѣщеніи внутреннихъ ея массъ. Съ перваго взгляда трудно и представить себѣ, какимъ образомъ это возможно осуществить, но дѣло въ томъ, что въ недавнее время венгерскимъ ученымъ барономъ Eotvös'омъ былъ построенъ особый, высоко-чувствительный приборъ, а именно варіаціонный гравиметръ, который въ состояніи указывать малѣйшія относительныя измѣненія въ величинѣ и направленіи ускоренія силы тяжести.

Приборъ этотъ, по своей основной идеѣ, имѣетъ много общаго съ извѣстнымъ приборомъ Cavendish'a, при помощи котораго послѣдній опредѣлилъ величину постоянной тяготѣнія, а отсюда вывелъ и величину средней плотности земли.

По закону Ньютона, двѣ массы M и m, напримѣръ два шара, разстояніе между центрами которыхъ равно r, притягиваются съ силой

$$F = k\frac{Mm}{r^2}.$$

Если мы массы выразимъ въ граммахъ, r въ сантиметрахъ, а F въ абсолютной системѣ единицъ, т.-е. динахъ, то такъ называемая постоянная тяготѣнія k выразится въ абсолютной системѣ единицъ (C. G. S.) слѣдующимъ числомъ:

$$k = 6{,}65.10^{-8} \text{ C. G. S.}$$

Обозначивъ средній радіусъ земли черезъ R, среднюю величину ускоренія силы тяжести черезъ g, а *среднюю* плотность земли черезъ ρ, будемъ имѣть

$$g = k\frac{M}{R^2} = \frac{4}{3}\pi kR\rho$$

или

$$\rho = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{g}{kR}.$$

Принявъ $R = 6371$ кил., а $g = 981$ см., найдемъ отсюда

$$\rho = 5{,}53.$$

Хотя коэффиціентъ k и очень малъ, но въ настоящее время техника изготовленія чувствительныхъ крутильныхъ вѣсовъ сдѣлала такіе успѣхи, что представляется уже вполнѣ возможнымъ примѣнять крутильные вѣсы, въ которыхъ дѣйствіе внѣшнихъ силъ притяженія уравновѣшивается моментомъ крученія нити, къ изслѣдованію самыхъ незначительныхъ измѣненій въ величинѣ и направленіи силы тяжести.

Приборъ Eotvös'а обладаетъ, напримѣръ, такой громадной чувствительностью, что онъ даетъ разныя величины для ускоренія силы тяжести посрединѣ комнаты и около какой-нибудь изъ ея стѣнъ, иначе говоря, притяженіе самой стѣны легко можетъ быть обнаружено. Избѣгаютъ даже въ настоящее время ставить приборъ Eotvös'а на треножникъ, такъ какъ несимметричное расположеніе ножекъ можетъ вызвать аномаліи въ распредѣленіи силы тяжести около самого прибора.

Съ приборомъ такой громадной чувствительности можно, дѣйствительно, надѣятся получить указанія о перегруппировкѣ внутреннихъ массъ земли послѣ какого-нибудь крупнаго землетрясенія. Въ этихъ цѣляхъ Русская Постоянная Центральная Сейсмическая Комиссія заказала одинъ экземпляръ такого прибора Eotvös'а походнаго типа, съ которымъ предположено произвести наблюденія надъ *относительнымъ* распредѣленіемъ силы тяжести въ какой-нибудь сейсмичной области, напр. въ Туркестанѣ или Семирѣчьѣ, и повторить затѣмъ эти наблюденія послѣ какого-нибудь новаго, сильнаго землетрясенія.

Всякое перемѣщеніе массъ внутри земли или на ея поверхности должно, согласно извѣстной теоремѣ механики, сопровождаться относительнымъ измѣненіемъ направленія оси вращенія земли.

Слѣдствіемъ этого будетъ измѣненіе такъ называемой высоты полюса надъ горизонтомъ или измѣненіе широты мѣста. Это измѣненіе широты, во всякомъ случаѣ, очень мало, но оно вполнѣ доступно современнымъ астрономическимъ измѣреніямъ, обладающимъ высокой степенью точности. И, дѣйствительно, точныя астрономическія наблюденія, производимыя на разныхъ обсерваторіяхъ, показываютъ, что широта мѣста подвержена назначительнымъ, но непрерывнымъ измѣненіямъ, такъ что, если мы мысленно проектируемъ ось вращенія земли на небесную сферу, то конецъ оси опишетъ

на сферѣ нѣкоторую кривую, а сама ось соотвѣтствующую коническую поверхность.

Были дѣлаемы попытки найти зависимость между землетрясеніями и колебаніями высоты полюса, хотя, само собою разумѣется, что второе явленіе не можетъ быть причиной, а лишь слѣдствіемъ перваго. Прямой зависимости еще не установлено, но есть опять-таки намекъ на то, что частота землетрясеній находится въ нѣкоторой зависимости, не отъ абсолютной величины отклоненія земной оси отъ ея средняго положенія, а отъ *быстроты* измѣненія этой величины, иначе говоря, отъ кривизны соотвѣтствующей кривой движеніе полюса на небесной сферѣ.

Особеннаго вниманія заслуживаетъ, конечно, тщательное изученіе различныхъ явленій, *предшествующихъ* землетрясеніямъ, дабы въ будущемъ могла явиться возможность предсказывать, съ бо̀льшей или меньшей вѣроятностью, наступленіе землетрясеній.

Къ рѣшенію этой задачи, имѣющей громадное практическое значеніе, въ смыслѣ сохраненія человѣческихъ жизней и разнаго рода имущества, намѣчаются различные пути.

Во-первыхъ, надо произвести самыя тщательныя и систематическія изслѣдованія надъ записями чувствительныхъ сейсмографовъ, какъ за время предшествующее землетрясенію, такъ и во время самого землетрясенія и послѣ него. На этомъ пути можетъ быть удастся подмѣтить нѣкоторыя закономѣрности и уловить явленія, непосредственно предшествующія землетрясеніямъ. Вообще детальное изученіе всѣхъ особенностей движенія почвы, выведенныхъ изъ сейсмограммъ, полученныхъ на различныхъ сейсмическихъ станціяхъ, можетъ пролить много свѣта на тѣ сложные физическіе процессы, которые непрерывно совершаются въ нѣдрахъ земли. Мы, дѣйствительно, видѣли въ предшествующей главѣ, какъ много уже даетъ одно изученіе годографовъ.

Можно уподобить всякое землетрясеніе фонарю, который зажигается, на короткое время и освѣщаетъ намъ внутренность земли, позволяя тѣмъ самымъ разсмотрѣть то, что тамъ происходитъ. Свѣтъ отъ этого фонаря пока еще очень тусклый, но не подлежитъ сомнѣнію, что со временемъ онъ станетъ гораздо ярче и позволитъ намъ разобраться въ этихъ сложныхъ явленіяхъ природы.

Второй путь — это систематическое изслѣдованіе медленныхъ смѣщеній однѣхъ горныхъ породъ по отношенію къ другимъ, обнаруживающееся въ брадисейсмическихъ явленіяхъ у поверхности земли.

Третій путь особенно интересенъ и важенъ.

На основаніи изслѣдованій венгерскаго сейсмолога Kövesligethy и

японскаго Omori выясняется, какъ-будто, что существуетъ особая закономѣрность въ явленіи повторяемости землетрясеній *въ той-же области.* Kövesligethy приписываетъ это явленіе медленнымъ, предварительнымъ измѣненіямъ упругихъ свойствъ верхнихъ слоевъ земли, т.-е. явленію, напоминающему собою упругое послѣдѣйствіе, которое онъ и назвалъ *сейсмическимъ гистерезисомъ.*

Скорость распространенія продольныхъ и поперечныхъ волнъ, какъ оказывается, не есть для того-же самого мѣста величина постоянная, а она измѣняется съ теченіемъ времени, въ зависимости отъ состоянія натяженія внутреннихъ слоевъ земли. Съ увеличеніемъ натяженія скорости эти убываютъ.

Послѣ крупнаго землетрясенія эта скорость съ теченіемъ времени сначала возрастаетъ, затѣмъ переходитъ черезъ нѣкоторый максимумъ, а затѣмъ уже начинаетъ постепенно убывать. Когда эта скорость, на нисходящей вѣтви такой кривой, достигнетъ нѣкотораго предѣльнаго значенія, свидѣтельствующаго о значительномъ состояніи натяженія внутреннихъ слоевъ земли, то можно ожидать новой катастрофы. Судить объ измѣненіи скорости съ теченіемъ времени можно по наблюденіямъ надъ разными слабыми, повторными землетрясеніями, встрѣчающимися въ той-же сейсмической области. Kövesligethy провѣрилъ свою теорію на примѣрахъ Японскихъ землетрясеній и опредѣлилъ значеніе различныхъ постоянныхъ, входящихъ въ его формулы.

Конечно, нельзя предсказать землетрясеніе по теоріи Kövesligethy съ точностью до одного дня, такъ какъ многое можетъ зависѣть и отъ разныхъ метеорологическихъ факторовъ: напримѣръ, проходъ сильнаго барометрическаго минимума, сопровождаемаго значительнымъ уменьшеніемъ внѣшняго давленія, можетъ дать послѣдній импульсъ къ сдвигу слоевъ, находящихся въ весьма неустойчивомъ состояніи равновѣсія и вызвать землетрясеніе, но можно, по крайней мѣрѣ, намѣтить тѣ предѣлы времени, между которыми можно ожидать наступленія новаго, крупнаго землетрясенія.

Теорія Kövesligethy далеко не представляетъ собою что-либо законченное и цѣльное, но она имѣетъ несомнѣнное значеніе, какъ первая попытка поставить вопросъ о предсказаніи землетрясеній, представляющій громадную практическую важность, на строго научное основаніе.

Въ-четвертыхъ, существуетъ, по всей вѣроятности, тѣсная связь между землетрясеніями и нарушеніями въ правильности режима нѣкоторыхъ особыхъ, пульсирующихъ или интермитирующихъ, ювенильныхъ минеральныхъ источниковъ, берущихъ свое начало въ глубокихъ слояхъ земной коры.

Какъ на примѣръ такого интермитирующаго источника можно указать

на Екатерининскій источникъ въ Боржомѣ, который регулярно, черезъ опредѣленные промежутки времени (около 8-ми минутъ), вскипаетъ, причемъ измѣняется и его дебитъ. Иногда, въ правильномъ режимѣ этого источника наступаютъ рѣзкія измѣненія, которыя, по изслѣдованіямъ Мольденгауера, находятся весьма часто въ связи съ землетрясеніями, причемъ, во многихъ случаяхъ, эти измѣненія *предшествуютъ* землетрясеніямъ.

Систематическое изслѣдованіе этого явленія, въ связи съ записями сейсмографовъ, представляетъ собою выдающійся интересъ, такъ какъ на этомъ пути можетъ быть удастся найти ключъ къ разгадкѣ тѣхъ таинственныхъ явленій, которыя совершаются подъ земнымъ покровомъ и предшествуютъ землетрясеніямъ. Въ виду этого наша Сейсмическая Комиссія и постановила организовать правильныя, параллельныя наблюденія, какъ надъ температурой, пульсаціей и дебитомъ Екатерининскаго источника въ Боржомѣ, такъ и надъ однимъ изъ Ессентукскихъ источниковъ Пятигорской минеральной группы, одновременно съ наблюденіями надъ различными сейсмическими явленіями.

Легко возможно, что со временемъ обнаружатся и другія явленія, имѣющія связь съ возникновеніемъ землетрясеній, какъ напр. измѣненіе количества того или иного газа, выдѣляемаго въ различныхъ мѣстностяхъ изъ нѣдръ земли и т. п.

Сейсмометрія, какъ точная наука, основанная на *измѣреніи* явленій, за короткое время своего существованія дала уже такъ много, что это служитъ хорошей порукой тому, что, въ дальнѣйшемъ ея развитіи, откроется цѣлый рядъ новыхъ соотношеній и законовъ, которые позволятъ намъ ближе разобраться въ тѣхъ сложныхъ процессахъ, которые непрерывно совершаются въ глубокихъ и совершенно намъ недоступныхъ, внутреннихъ слояхъ земли.

Сейсмометріи, какъ совершенно молодой наукѣ, никоимъ образомъ нельзя поставить въ вину, что она до сихъ поръ не умѣетъ предсказывать землетрясенія. Это станетъ особенно яснымъ, если мы сравнимъ нашу науку съ метеорологіей, которая существуетъ уже около 100 лѣтъ и которая имѣетъ дѣло съ вполнѣ *доступнымъ* объектомъ изслѣдованій, а именно съ земной атмосферой, и у которой методы предсказанія погоды, особенно на нѣсколько дней впередъ, чрезвычайно еще несовершенны.

Можно-бы было, конечно, указать еще и на разныя другія явленія сейсмическаго характера, которыя заслуживали-бы вниманія и изученія, но и перечисленныхъ вопросовъ достаточно, чтобы видѣть какія интересныя и важныя темы современная сейсмометрія затрагиваетъ и какіе широкіе она открываетъ горизонты.

§ 2.

Основная задача сейсмометріи.

Изъ всего предыдущаго изложенія явствуетъ, что развитіе сейсмометріи самымъ тѣснымъ образомъ связано съ вопросомъ объ опредѣленіи *абсолютныхъ, истинныхъ* элементовъ движенія точки земной поверхности во время землетрясеній или при проявленіи разныхъ другихъ сейсмическихъ явленій. На эту сторону вопроса въ прежнее время было обращаемо очень мало вниманія, такъ какъ большею частью довольствовались разсмотрѣніемъ *относительнаго* движенія того или иного типа сейсмографа по отношенію къ поверхности земли, и, на основаніи такого наблюдательнаго матеріала, и дѣлались уже соотвѣтственныя заключенія. Но такой путь, очевидно, совершенно неправиленъ и можетъ, какъ мы увидимъ дальше, привести къ совершенно невѣрнымъ выводамъ. Для раціональнаго изученія различныхъ сейсмическихъ явленій, надо, отъ показаній приборовъ, переходить всегда къ истиннымъ движеніямъ поверхности земли, такъ какъ только на этомъ фундаментѣ и могутъ основываться дальнѣйшіе успѣхи сейсмометріи.

Измѣрительная часть сейсмологіи, а именно сейсмометрія, сдѣлала такіе громадные успѣхи и такъ быстро подвинулась впередъ, только съ того момента, когда она усвоила себѣ чисто *физическіе методы* изслѣдованія и развила свою инструментальную часть, особенно-же теорію различныхъ сейсмическихъ приборовъ, покоющуюся непосредственно на основныхъ положеніяхъ раціональной механики.

Выяснимъ себѣ теперь основную постановку вопроса.

Возьмемъ на поверхности земли элементарную площадку S (см. черт. 38) и помѣстимъ на ней начало системы *неподвижныхъ*, прямоугольныхъ координатныхъ осей x, y, z.

Ось z-овъ направимъ вертикально вверхъ, ось x-овъ къ сѣверу (N), а ось y-овъ къ востоку (E).

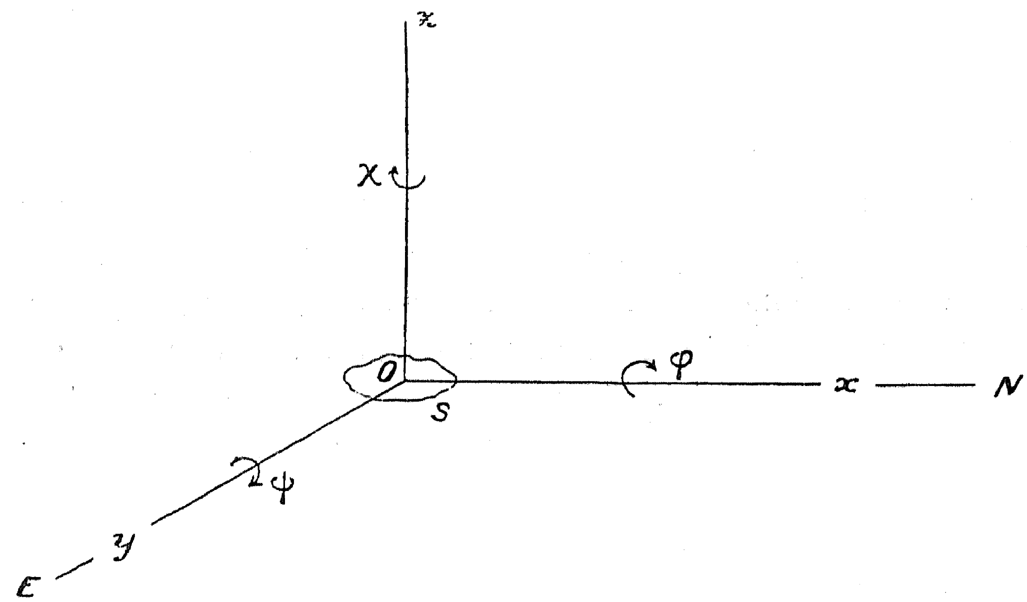
При движеніяхъ поверхности земли эта площадка можетъ имѣть 6 различныхъ движеній: во-первыхъ, три смѣщенія параллельно осямъ координатъ, величины которыхъ мы обозначимъ соотвѣтственно черезъ x, y, z, и три вращенія около тѣхъ-же осей Ox, Oy, Oz. Величины угловъ поворота мы обозначимъ соотвѣтственно черезъ φ, ψ и χ, причемъ мы будемъ считать эти величины положительными, когда, смотря вдоль оси къ началу координатъ O, вращеніе совершается по направленію движенія часовой стрѣлки.

Каждый изъ этихъ шести элементовъ движенія почвы есть нѣкоторая функція времени, напр.,

$$x = f(t), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

а потому, если мы желаемъ въ точности получить и возстановить движеніе почвы, то должны имѣть *шесть* различныхъ сейсмографовъ, три для записи трехъ смѣщеній и три для записи трехъ вращеній.

Черт. 38.



Каждый такой приборъ даетъ опредѣленную запись, при которой осью абсциссъ служитъ ось временъ t, а соотвѣтствующая ордината кривой есть нѣкоторая величина, напр. ξ, характеризующая собою отклоненіе прибора отъ своего нормальнаго положенія равновѣсія при покоящейся землѣ.

ξ даетъ намъ *относительное* перемѣщеніе прибора по отношенію къ поверхности земли; эта величина есть также нѣкоторая функція времени t, напр.,

$$\xi = F(t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Значеніе этой функціи *извѣстно* для любого момента t изъ соотвѣтствующей *сейсмограммы* или записи прибора.

Основная задача сейсмометріи и заключается именно въ томъ, чтобы, по извѣстной функціи $\xi = F(t)$, найти неизвѣстную функцію $x = f(t)$ за все время колебаній почвы и при томъ отдѣльно для каждаго изъ шести элементовъ движенія.

Поставленная въ такой общей формѣ основная задача сейсмометріи представляетъ собою весьма большія, хотя, пожалуй, и преодолимыя труд-

ности, то въ такомъ общемъ видѣ вопросъ этотъ въ настоящей стадіи развитія сейсмометріи почти никогда не трактуется. Обыкновенно ограничиваются разсмотрѣніемъ только трехъ смѣщеній, такъ какъ вращенія, при дальныхъ землетрясеніяхъ, какъ мы увидимъ дальше, чрезвычайно ничтожны; кромѣ того, ограничиваются изученіемъ только тѣхъ движеній почвы, которыя имѣютъ явно выраженный синусоидальный характеръ, отвѣчающій законамъ гармоническихъ колебаній.

Только въ рѣдкихъ, исключительныхъ, случаяхъ, нѣкоторые сейсмологи, какъ, напримѣръ, И. И. Померанцевъ, Arnold занимались вопросомъ о возстановленіи функціи $f(t)$ по заданной функціи $F(t)$ для опредѣленнаго промежутка времени, но уже ихъ изслѣдованія съ достаточной очевидностью показываютъ съ какими трудностями такая задача сопряжена.

Но, если-бы даже удалось получить, напр., x какъ функцію отъ t, то тѣмъ самымъ задача не была-бы еще, по существу своему, исчерпана. Оставалось-бы еще анализировать кривую $x = f(t)$, опредѣлить ея составные элементы, найти именно ту систему волнъ, которая ее обуславливаетъ и опредѣлить затѣмъ соотвѣтствующіе періоды, амплитуды, начальныя фазы и коеффиціенты затуханія. До такого исчерпывающаго рѣшенія вопроса современная сейсмометрія еще очень далека; она ограничивается пока разсмотрѣніемъ лишь простѣйшихъ случаевъ. Но и въ этой, болѣе узкой, области изслѣдованій предстоитъ еще очень много работы, отъ которой можно ожидать много важныхъ теоретическихъ и практическихъ результатовъ.

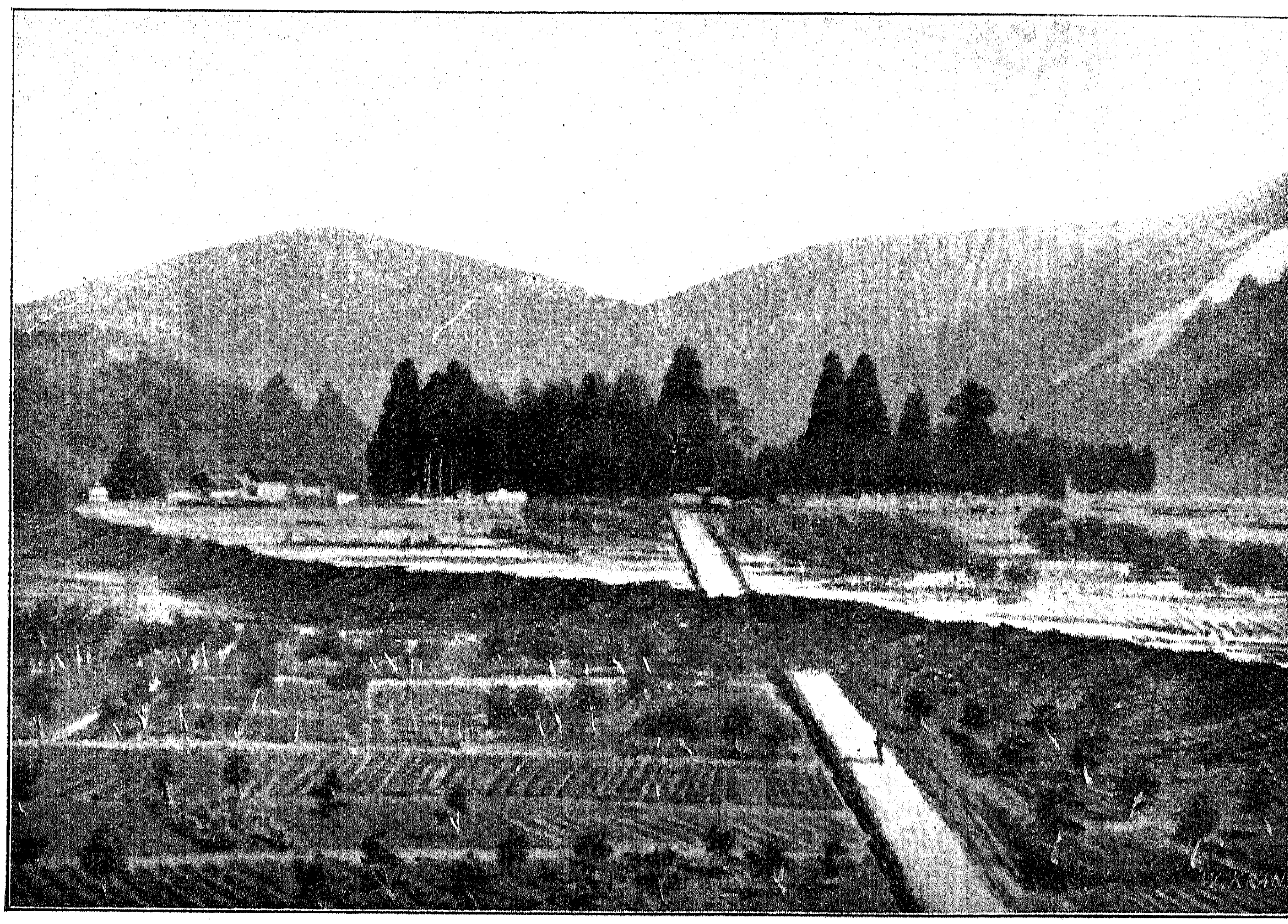
Тѣ шесть движеній почвы, о которыхъ говорилось раньше, могутъ встрѣтиться, не только при микросейсмическихъ движеніяхъ, вызванныхъ отдаленными землетрясеніями, но и при макросейсмическихъ явленіяхъ, наблюдаемыхъ въ эпицентральныхъ областяхъ. Изученіе послѣднихъ можно, принципіально говоря, основать на приборахъ того-же типа, какъ тѣ, которыми пользуются для изслѣдованія микросейсмическихъ движеній, но при условіи меньшей чувствительности и особенно прочной конструкціи. Послѣднія условія практически не трудно осуществить.

Реальное существованіе такихъ шести движеній почвы доказывается непосредственными наблюденіями.

Напр., извѣстный видъ долины рѣки Neo въ центральной Японіи (см. рисунокъ 39) во время землетрясенія въ Mino-Owari 28/X 1891 года ясно изображаетъ намъ вертикальное и горизонтальное смѣщеніе почвы, причемъ послѣднее можетъ, конечно, быть всегда мысленно разложено по двумъ взаимно перпендикулярнымъ осямъ. Въ этомъ и аналогичныхъ случаяхъ мы имѣемъ дѣло съ *остаточными* смѣщеніями почвы; при микросейсмическихъ-же явленіяхъ мы встрѣчаемся съ колебательными движеніями почвы около нѣкотораго опредѣленнаго положенія равновѣсія.

Вращеніе элемента поверхности S около осей Ox и Oy с
нѣкоторому наклону поверхности земли, около опредѣленн
оси вращенія, а потому этимъ типамъ вращеній присво
новъ (Neigungswellen).

Рисунокъ 39.

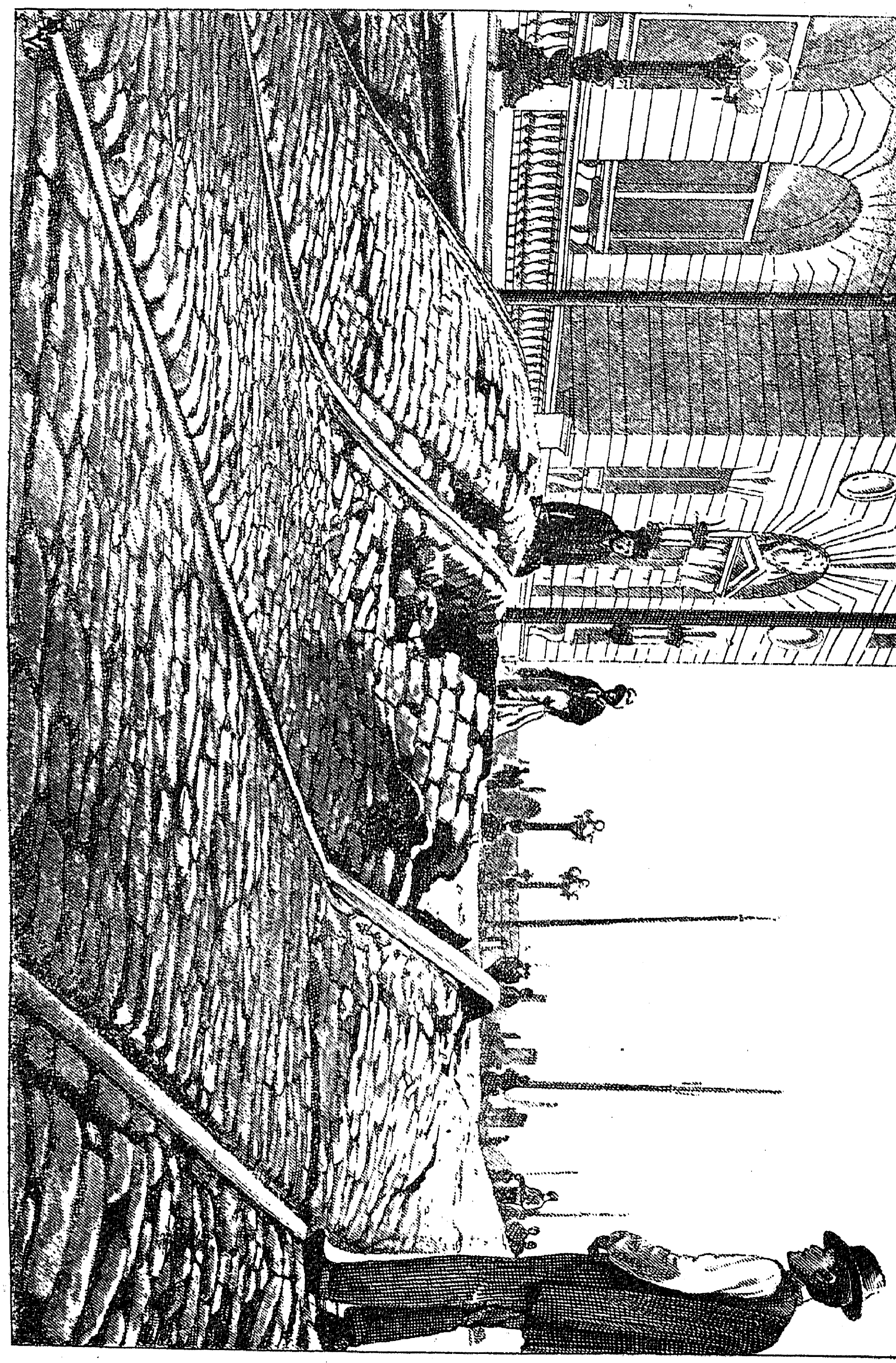


Существованіе очень замѣтныхъ наклоновъ, по крайней мѣрѣ въ эпицентральной области, ясно доказывается фотографіей слѣда сейсмической волны на наносномъ грунтѣ на улицѣ Mission Street въ S.-Francisco около Hotel des Postes во время извѣстнаго землетрясенія 18/IV 1906 года (см. рисунокъ 40).

Существованіе вращеній около вертикальной оси при дальнихъ землетрясеніяхъ не было еще обнаружено, да, по всей вѣроятности, такихъ вращеній вовсе и не бываетъ, но въ эпицентральныхъ областяхъ таковыя несомнѣнно иногда имѣютъ мѣсто.

Оригинальный поворотъ верхней части надгробнаго памятника въ Chhatak'ѣ (см. рисунокъ 41) во время Ассамскаго землетрясенія 12/VI 1897 года указываетъ, какъ-будто, на бывшее сильное вращеніе почвы, увлекшее собою основаніе памятника.

Если противъ убѣдительности этого примѣра и можно возразить, что такое вращеніе могло быть вызвано и горизонтальнымъ смѣщеніемъ почвы, если сейсмическій ударъ пришелся не на проэкцію центра тяжести памят-



Рисунокъ 40.

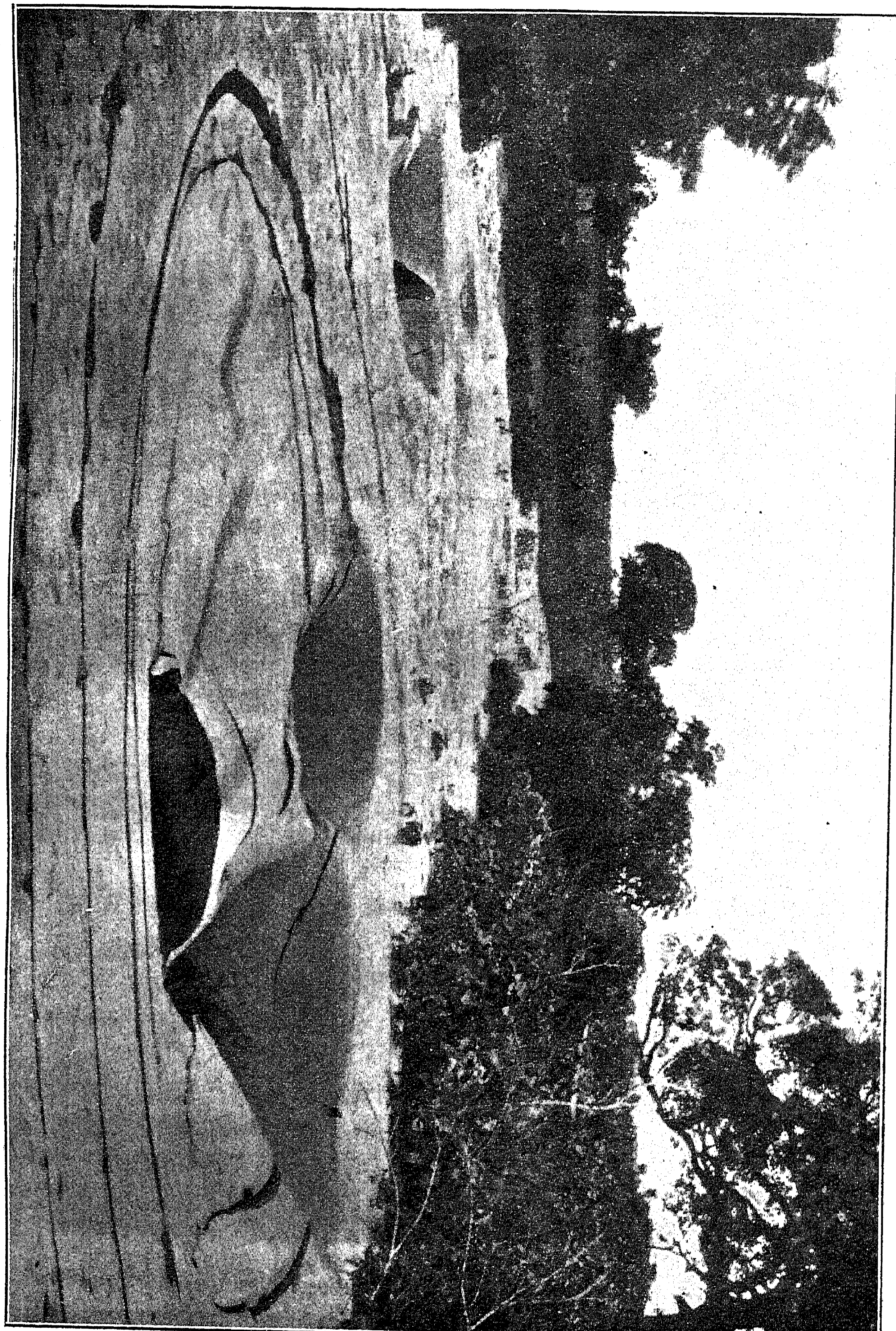
ника на плоскость горизонта, то слѣдующій рисунокъ 42, представляющій собою воронкообразное углубленіе почвы въ Rowmari во время того-же Ассамскаго землетрясенія, не оставляетъ уже никакого сомнѣнія въ томъ,

что вращенія почвы около вертикальной оси, при сильныхъ землетрясеніяхъ, дѣйствительно, иногда имѣютъ мѣсто.

Доказавши, такимъ образомъ, реальное существованіе шести элемен-

Рисунокъ 41.

товъ движенія почвы при землетрясеніяхъ, посмотримъ теперь, какимъ-же образомъ можно опредѣлить изъ наблюденій абсолютную величину такихъ движеній.

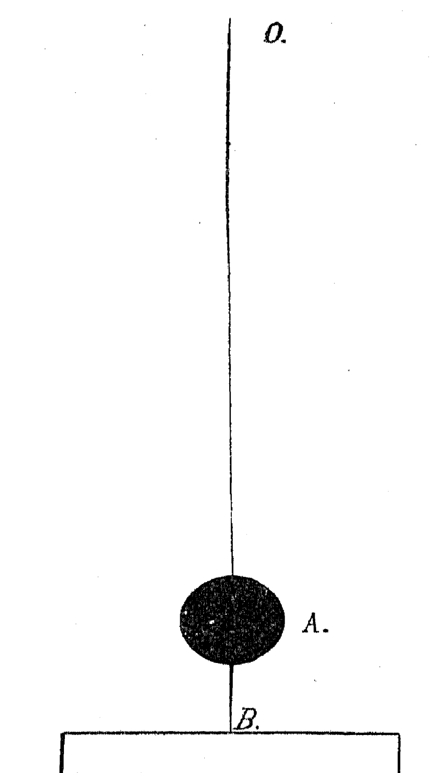


Рисунокъ 42.

Мы возьмемъ для этого конкретный случай горизонтальныхъ смѣщеній почвы.

Представимъ себѣ горизонтальную, стеклянную, закопченную пластинку, непосредственно связанную съ поверхностью земли, и какой-нибудь *неподвижный* штифтъ, могущій чертить на означенной пластинкѣ, но отнюдь не связанный съ землей, а, наоборотъ, неизмѣнно скрѣпленный съ *неподвижной* системой координатныхъ осей x, y, z. При горизонтальныхъ смѣщеніяхъ почвы, штифтъ этотъ будетъ вычерчивать на стеклянной пластинкѣ кривую, которая будетъ въ точности соотвѣтствовать истиннымъ горизонтальнымъ смѣщеніямъ почвы, которыя и требуется опредѣлить, но съ той только разницей, что, когда, напримѣръ, поверхность земли смѣстится вправо, штифтъ на пластинкѣ отойдетъ на такую-же величину влѣво, и наоборотъ.

Черт. 43.



Но такой неподвижный штифтъ внѣ земли и ничѣмъ съ ней не связанный нельзя, конечно, практически осуществить. Спрашивается, такимъ образомъ, какъ-же возможно, при помощи приборовъ, установленныхъ у поверхности земли и неизмѣнно съ ней связанныхъ, получить *истинныя* смѣщенія почвы относительно нашей неподвижной системы координатныхъ осей?

Съ перваго взгляда можетъ показаться, что эта задача совершенно неразрѣшима, такъ какъ мы въ состояніи измѣрять только *относительныя* перемѣщенія прибора по отношенію къ поверхности земли, но на самомъ дѣлѣ, какъ мы увидимъ дальше, аналитическая механика даетъ вполнѣ опредѣленное и строгое рѣшеніе поставленной задачи.

Представимъ себѣ для этого тяжелый, металлическій шаръ A (см. черт. 43), подвѣшенный на нити въ точкѣ O и снабженный снизу особымъ штифтомъ, нижній конецъ котораго B можетъ чертить на закопченной, стеклянной пластинкѣ. Такой приборъ является прообразомъ всѣхъ сейсмографовъ, предназначенныхъ для регистраціи горизонтальныхъ смѣщеній почвы.

На прилагаемомъ чертежѣ представленъ, вмѣсто стеклянной пластинки, вращающійся валъ RR особаго регистрирнаго аппарата. Валъ обтянутъ глянцевитой бумагой, покрытой тонкимъ слоемъ сажи, для нанесенія котораго пользуются или газовымъ рожкомъ, или керосиновой, или же ски-

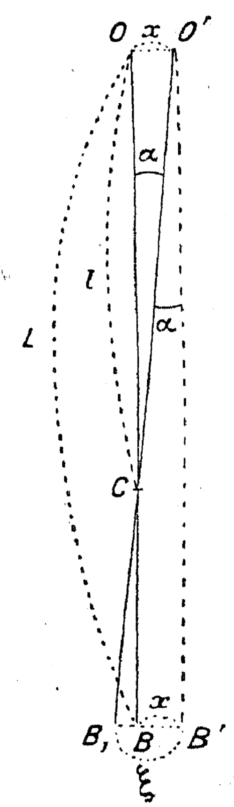
пидарной лампой съ широкимъ фитилемъ, дающимъ обильное количество сажи.

Такой *физическій маятникъ* равноцѣненъ, въ отношеніи собственнаго періода колебаній T, маятнику математическому, имѣющему опредѣленную длину l, причемъ вся масса маятника является какъ-бы сконцентрированной въ одной точкѣ, которая называется *центромъ качаній*, а соотвѣтствующее разстояніе l этой точки до оси вращенія O *приведенной длиной маятника*.

Представимъ себѣ теперь, что поверхность земли, вмѣстѣ съ установленнымъ на ней приборомъ, получитъ *внезапное* смѣщеніе вправо, причемъ величина этого смѣщенія пусть будетъ x. На такую-же величину смѣстится вправо и стеклянная пластинка или регистрирный аппаратъ, а также и верхняя точка подвѣса этого простого вертикальнаго маятника O.

Но, въ силу основного закона инерціи, центръ качанія прибора, въ которой мы мысленно и представляемъ себѣ всю массу сосредоточенной, останется на мѣстѣ, а, вслѣдствіе этого, конецъ B пишущаго штифта перемѣстится, *по отношенію къ стеклянной пластинкѣ*, влѣво, и, если мы обозначимъ разстояніе B до оси вращенія черезъ L, то величина относительнаго смѣщенія штифта на пластинкѣ ξ выразится слѣдующимъ образомъ:

Черт. 44.



$$\xi = \frac{L}{l} x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Отсюда находимъ

$$x = \frac{l}{L} \xi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Дѣйствительно, изъ слѣдующаго чертежа 44 видно, что, когда точка прикрѣпленія маятника O и точка B на пластинкѣ, которая соотвѣтствуетъ положенію равновѣсія маятника, перемѣстятся вправо на величину x соотвѣтственно въ точки O' и B', центръ качанія прибора C останется на мѣстѣ, а конецъ пишущаго пера перемѣстится влѣво въ B_1, такъ что относительное перемѣщеніе штифта на пластинкѣ будетъ $B_1B' = \xi$.

Обозначивъ уголъ $OCO' = B_1 O' B'$ черезъ α, гдѣ α всегда очень малая величина, будемъ имѣть:

$$\xi = L\alpha,$$

и

$$x = l\alpha$$

или

$$\xi = \frac{L}{l} x,$$

что и требовалось доказать.

Итакъ, мы видимъ, что, зная величины l и L, и измѣряя относительное перемѣщеніе прибора ξ, можно опредѣлить *истинную* величину *внезапнаго* смѣщенія почвы x.

Въ этомъ случаѣ мы воспользовались принципомъ инерціи, чтобы осуществить ту неподвижную точку, не связанную какъ-бы съ землей, которая намъ была нужна, чтобы записать истинное движеніе почвы. Въ англійской терминологіи такая точка называется the steady point.

Но точка C можетъ считаться неподвижной только въ первый моментъ движенія почвы.

Если x продолжаетъ мѣняться съ теченіемъ времени, переходя, напримѣръ, изъ положительныхъ значеній въ отрицательныя и наоборотъ, то точка C не остается болѣе неподвижной, а маятникъ постепенно раскачается и самъ придетъ въ движеніе.

Такимъ образомъ, движеніе конца штифта B представляетъ собою уже результатъ совокупнаго вліянія двухъ движеній, а именно, истиннаго движенія земли, которое требуется опредѣлить, и собственнаго движенія прибора.

Чтобы получить ξ, какъ функцію времени t, нельзя уже пользоваться неподвижной пластинкой, а надо послѣдней придать равномѣрное поступательное движеніе въ направленіи перпендикулярномъ плоскости колебанія маятника.

Проще всего это достигается при помощи регистрирнаго, цилиндрическаго барабана, обернутаго закопченной бумагой и равномѣрно вращающагося, при помощи особаго часового механизма, вокругъ своей оси. При этомъ конецъ штифта B долженъ перемѣщаться параллельно производящимъ цилиндра, а, для отмѣтки времени и нулевого положенія прибора (при равновѣсіи), можно, напримѣръ, воспользоваться отдѣльной нулевой линіей, вычерчиваемой неподвижнымъ штифтомъ, на каковой линіи и можно дѣлать отмѣтки времени черезъ опредѣленные промежутки времени, напримѣръ, черезъ каждую минуту.

Для этого можно воспользоваться небольшимъ электромагнитомъ, въ которомъ токъ замыкается черезъ опредѣленные промежутки времени, при посредствѣ особыхъ контактныхъ часовъ, и который оттягиваетъ, на одну или двѣ секунды, неподвижный штифтъ въ сторону. Этимъ способомъ очень легко получить требуемыя отмѣтки времени.

Такимъ образомъ, кривую $\xi = F(t)$ легко можно получить изъ наблюденій.

Задача, съ математической точки зрѣнія, состоитъ въ томъ, чтобы въ выраженіи функціи $F(t)$ выдѣлить тѣ члены, которые зависятъ отъ собственнаго движенія прибора и оставить только тѣ, которые обуславливаются истиннымъ движеніемъ почвы.

Какъ это практически осуществить мы увидимъ въ слѣдующей главѣ.

Особенно интересенъ случай, когда движенiе почвы имѣетъ правильный синусоидальный характеръ, напримѣръ,

$$x = x_m \sin(pt + \delta), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

гдѣ x_m есть истинная амплитуда смѣщенiя почвы, а δ — начальная фаза, причемъ полный перiодъ колебанiй почвы T_p связанъ съ количествомъ p соотношенiемъ

$$T_p = \frac{2\pi}{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Собственное движенiе маятника, при малыхъ углахъ отклоненiя, имѣетъ также синусоидальный характеръ, причемъ *полный* перiодъ его колебанiй T выразится, какъ извѣстно изъ механики, слѣдующей формулой:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

При наличiи гармоническаго движенiя почвы, опредѣляемаго уравненiемъ (5), данный вертикальный маятникъ, благодаря влiянiю собственнаго движенiя, не опишетъ болѣе на регистрирномъ барабанѣ простую синусоиду, но болѣе сложную кривую, размахи которой зависятъ, не только отъ конструктивныхъ особенностей прибора (величины l и L), но и отъ величинъ x_m и T_p или, точнѣе говоря, отъ отношенiя $\frac{T_p}{T} = u$.

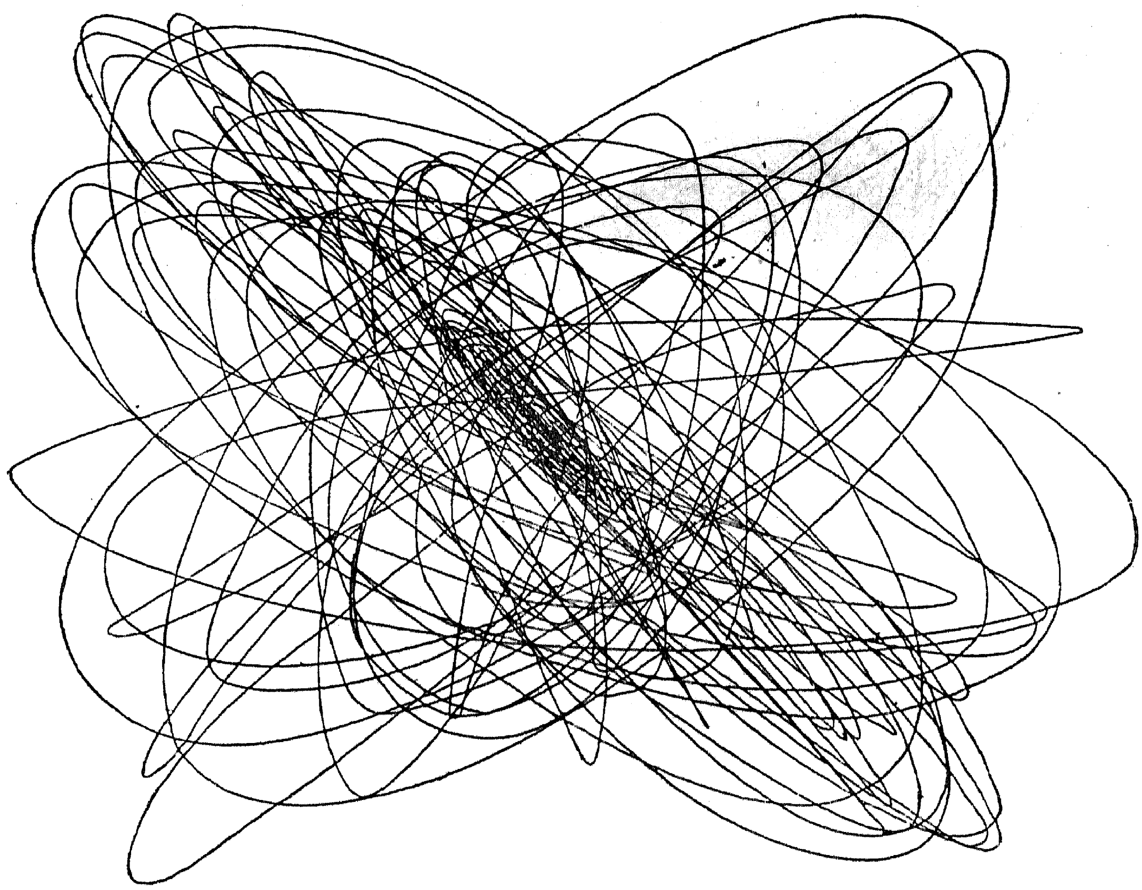
Было-бы совершенно ошибочно судить о величинѣ амплитуды истиннаго движенiя почвы x_m прямо по величинамъ размаховъ вертикальнаго маятника на регистрирномъ барабанѣ, такъ какъ могутъ быть случаи, гдѣ, при очень малыхъ величинахъ x_m, размахи прибора будутъ громадны и, наоборотъ, гдѣ, при значительныхъ величинахъ x_m, размахи будутъ очень маленькими. На величину размаха прибора, кромѣ x_m, влiяетъ въ высокой мѣрѣ и величина отношенiя $u = \frac{T_p}{T}$.

Если u близко къ 1, т.-е перiодъ движенiя почвы близокъ къ *резонансу* съ перiодомъ собственнаго движенiя прибора, и маятникъ не имѣетъ затуханiя, то, при малыхъ величинахъ x_m, могутъ получиться громадные размахи, и, наоборотъ, при значительныхъ величинахъ x_m и значительныхъ величинахъ u, т.-е при медленныхъ движенiяхъ почвы, размахи прибора могутъ быть очень малыми.

Это очень легко показать при помощи небольшой подвижной платформы, на которой установленъ простой, маленькій, вертикальный маятникъ.

Давая рукой движеніе платформѣ въ ритмъ съ собственнымъ періодомъ маятника, для чего можно воспользоваться метрономомъ, установленнымъ на собственный періодъ маятника, можно, при очень маленькихъ амплитудахъ движенія платформы, раскачать маятникъ до очень большихъ угловъ отлоненія, и, наоборотъ, двигая платформу взадъ и впередъ на значительныя величины, но только въ очень медленномъ темпѣ, легко убѣдиться, что маятникъ останется почти въ покоѣ.

Рисунокъ 45.

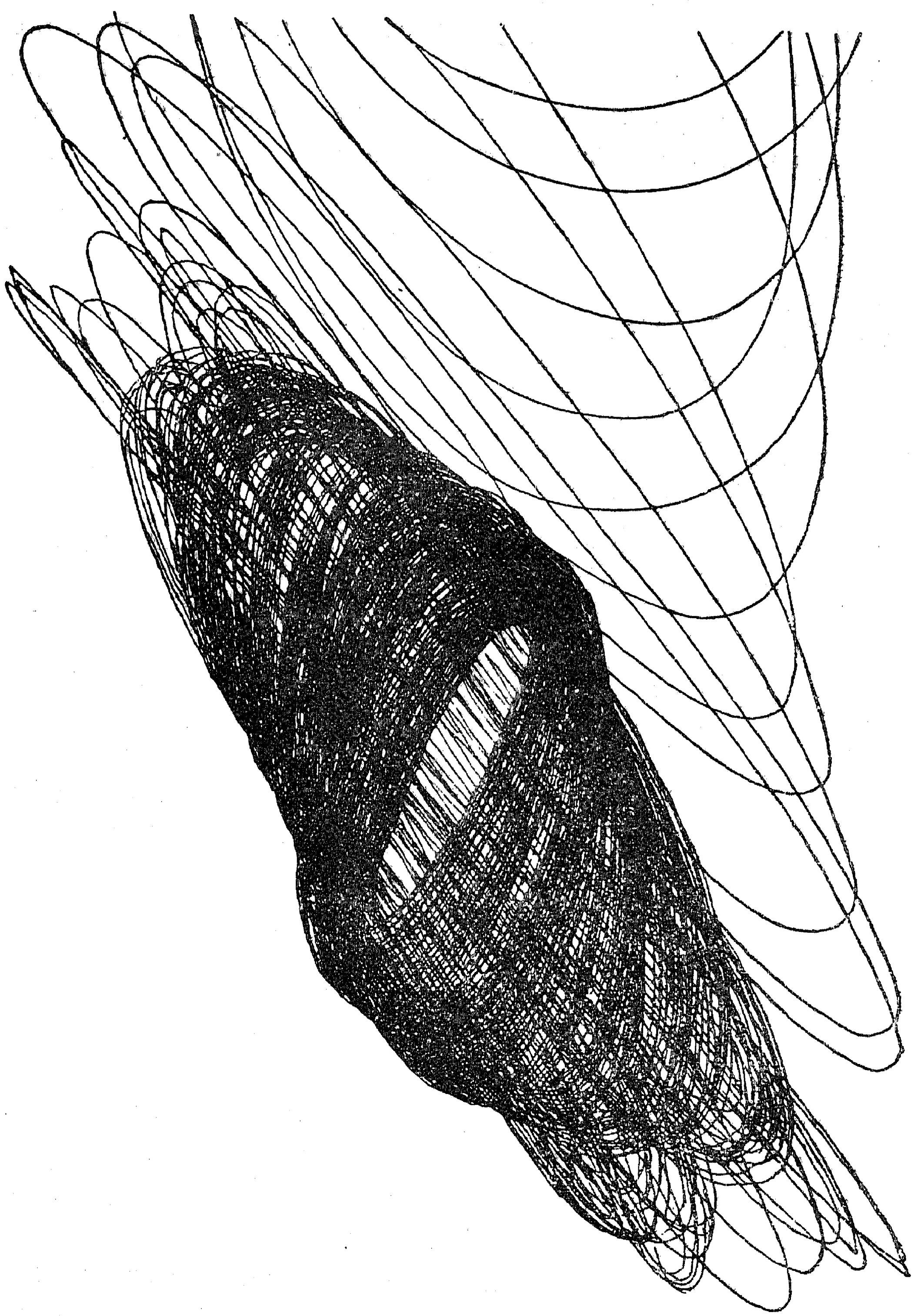


На это обстоятельство, а именно на вліяніе резонанса, въ прежнее время, и даже отчасти и до сихъ поръ, было обращаемо слишкомъ мало вниманія, а вмѣстѣ съ тѣмъ оно является капитальнымъ факторомъ для правильной оцѣнки истинной амплитуды смѣщенія почвы.

Вертикальный маятникъ вышеописаннаго простого устройства представляетъ, однако, собою еще очень несовершенный сейсмическій аппаратъ. Во-первыхъ, благодаря своему сравнительно короткому періоду колебаній, онъ является весьма мало чувствительнымъ приборомъ для регистраціи длинныхъ волнъ въ главной фазѣ землетрясенія, но главный его недоста-

токъ заключается въ томъ, что онъ можетъ колебаться во всевозможныхъ азимутахъ, а потому онъ не въ состоянiи регистрировать одну какую-нибудь опредѣленную составляющую горизонтальнаго смѣщенiя почвы.

Рисунокъ 46.



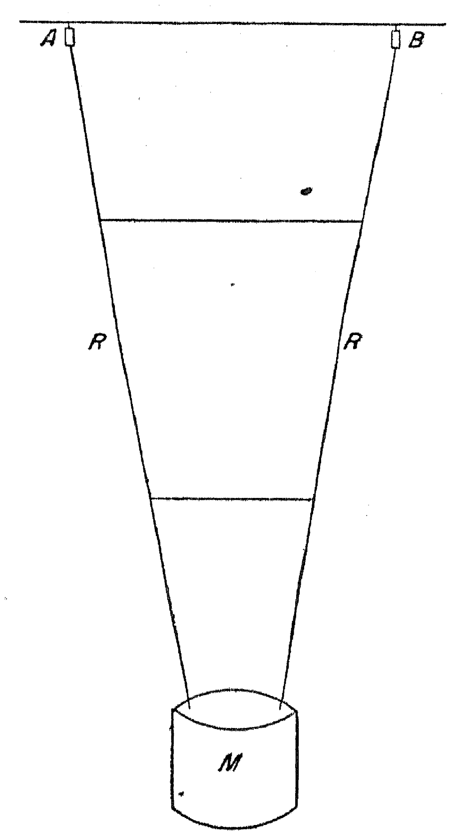
Насколько запись такого простого вертикальнаго маятника можетъ, при землетрясенiяхъ, быть сложной, видно изъ слѣдующихъ двухъ рисунковъ 45 и 46, представляющихъ собою запись такого прибора на

неподвижной пластинкѣ, во время двухъ землетрясеній на Филиппинскихъ островахъ.

На этихъ рисункахъ весьма трудно что-либо разобрать.

Въ первомъ случаѣ видно, что движеніе маятника совершалось преимущественно въ двухъ опредѣленныхъ направленіяхъ, во второмъ-же случаѣ получается очень оригинальная и красивая фигура, указывающая на то, что конецъ пишущаго штифта двигался по какимъ-то эллипсовиднымъ кривымъ, изъ которыхъ чрезвычайно трудно вывести какое-либо опредѣленное заключеніе объ истинномъ характерѣ соотвѣтствующаго движенія почвы.

Черт. 47.



Если-бы современная сейсмометрія была вынуждена основываться въ своихъ выводахъ и заключеніяхъ на такого рода наблюдательномъ матеріалѣ, то она не далеко бы ушла впередъ. Въ настоящее время такіе простые маятники, именуемые иногда тромометрами, почти совершенно уже вывелись изъ употребленія.

Однако, можно, при помощи чрезвычайно простого приспособленія, передѣлать обыкновенный вертикальный маятникъ такъ, что онъ будетъ колебаться только въ одной опредѣленной плоскости, за которую можно, взять или плоскость меридіана, или же плоскость перваго вертикала.

Для этого надо только, такъ то показано на прилагаемомъ чертежѣ 47, подвѣсить тяжелый грузъ маятника M не просто къ вертикальной нити, а къ особой твердой рамѣ RR, расширяющейся кверху, и верхняя часть которой подвѣшена къ штативу прибора на двухъ тонкихъ, плоскихъ, стальныхъ пластинкахъ A и B.

При этомъ способѣ подвѣшиванія, такой маятникъ можетъ имѣть только одну опредѣленную плоскость колебаній. Установивъ два такихъ прибора, одинъ въ меридіанѣ, а другой въ первомъ вертикалѣ, можно регистрировать отдѣльно каждую изъ двухъ составляющихъ горизонтальнаго смѣщенія почвы.

Мы видѣли, что основной задачей сейсмометріи является опредѣленіе абсолютныхъ элементовъ движенія почвы.

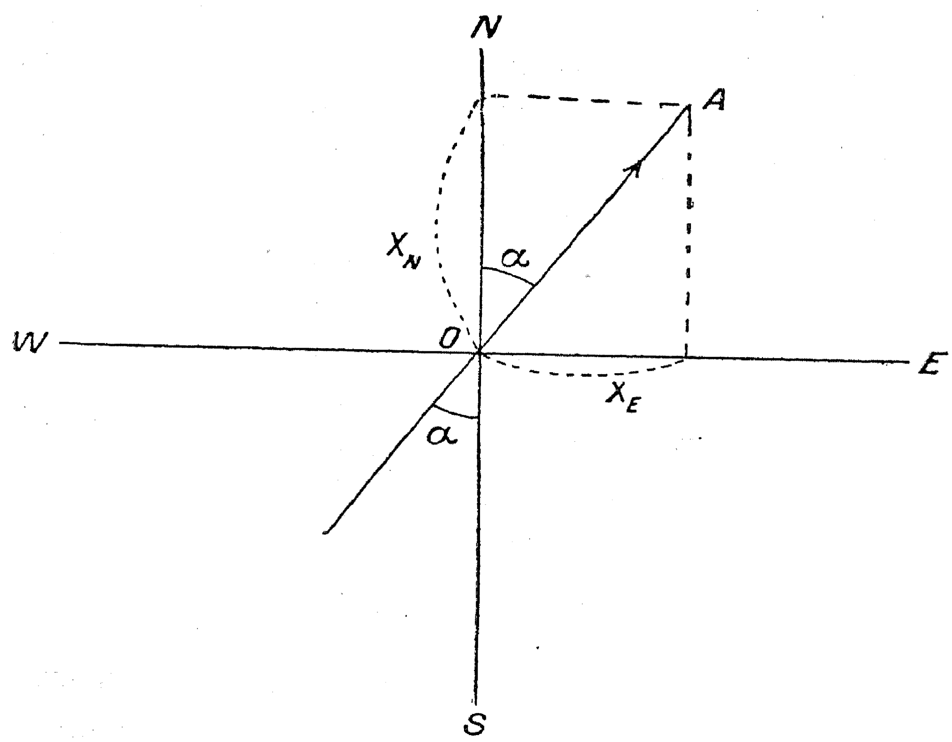
Если мы будемъ въ состояніи опредѣлить истинныя, максимальныя

смѣщенія почвы въ меридіанѣ и въ первомъ вертикалѣ, которыя мы обозначимъ соотвѣтственно черезъ x_N и x_E, при первомъ вступленіи продольныхъ сейсмическихъ волнъ первой фазы (P), то отсюда легко можно вывести и истинный азимутъ эпицентра α. Условившись приписывать смѣщеніямъ къ N'у и E'у знакъ (+), а къ S'у и W'у знакъ (—), и учитывая, при опредѣленіи по сейсмограммамъ отклоненій приборовъ, направленіе или знакъ соотвѣтствующаго отклоненія, легко всегда разобраться въ вопросѣ, въ которомъ изъ четырехъ квадрантовъ произошло первое горизонтальное смѣщеніе почвы.

Такъ, напр., если смѣщеніе x_N было къ N'у, а смѣщеніе x_E къ E'у, то смѣщеніе почвы при первомъ толчкѣ будетъ на NE, причемъ уголъ α, составляемый направленіемъ смѣщенія съ меридіаномъ, опредѣлится, какъ то видно изъ черт. 48, по формулѣ

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_E}{x_N} \qquad (8)$$

Черт. 48.



Если первая волна была волной сжатія, на что, какъ мы видѣли раньше, указываетъ направленіе перваго уклоненія вертикальнаго сейсмографа (первое движеніе почвы кверху), то азимутъ эпицентра будетъ $SW—\alpha$; въ случаѣ-же волны разрѣженія $NE—\alpha$.

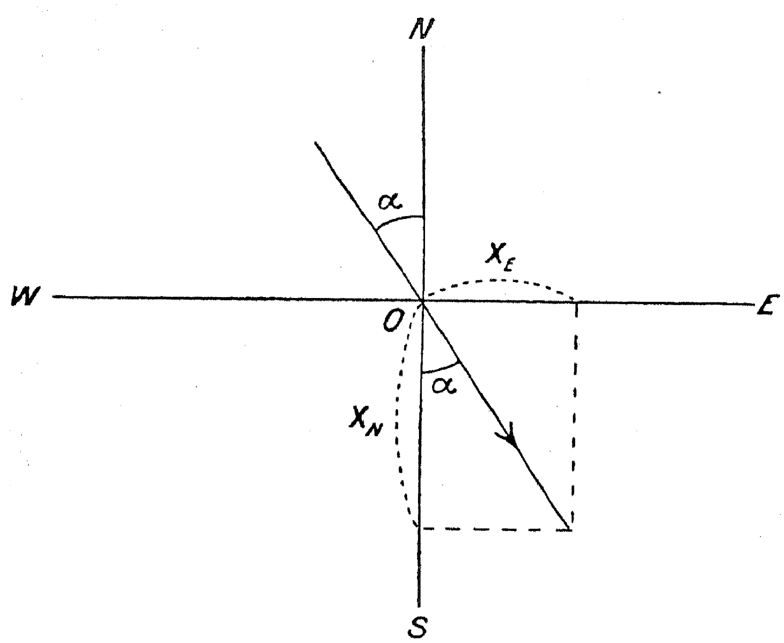
Если-же, напримѣръ, x_N отрицательно, а x_E положительно, то, какъ

видно изъ чертежа 49, мы будемъ опять имѣть

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x_E}{x_N},$$

и направленіе смѣщенія почвы будетъ $SE-\alpha$ или $NE-(180^\circ-\alpha)$.

Черт. 49.



Для азимута-же эпицентра получимъ, соотвѣтственно волнѣ сжатія или разрѣженія, или $NW-\alpha$, или-же $SE-\alpha$.

Абсолютная величина максимальнаго горизонтальнаго смѣщенія почвы h_m получится просто по формулѣ

$$h_m = \sqrt{x_E^2 + x_N^2} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (9)$$

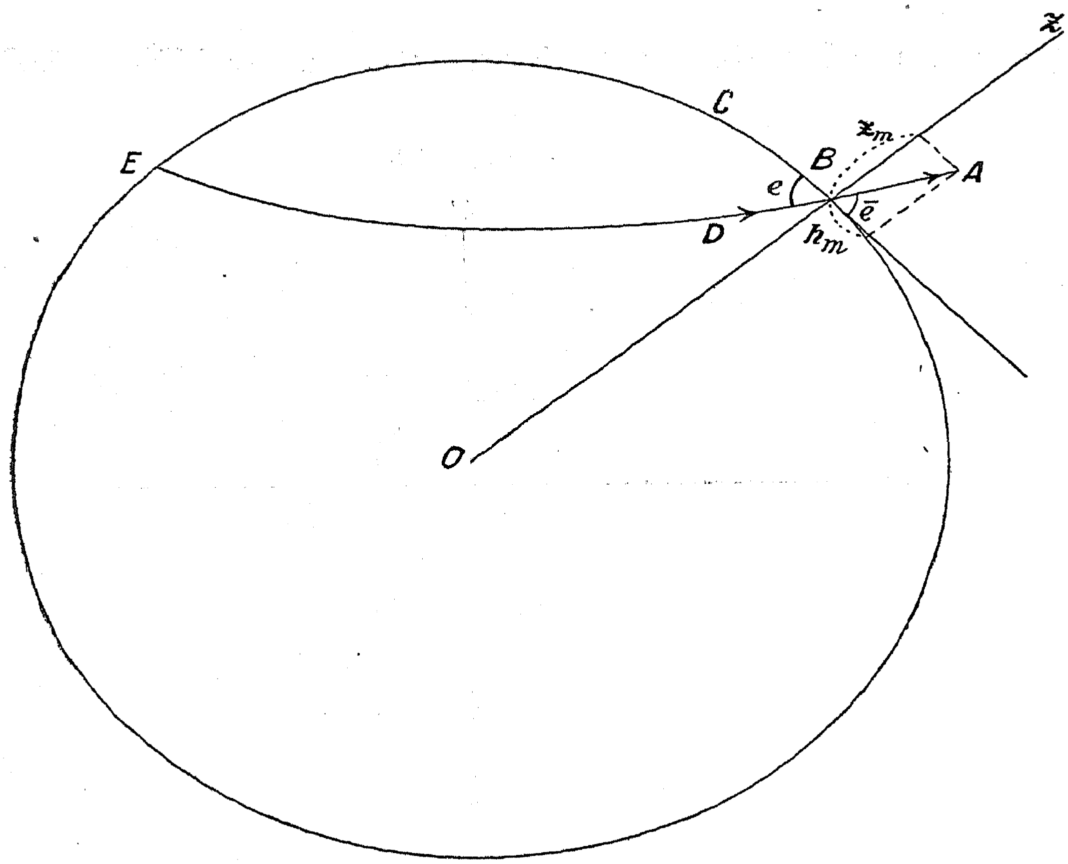
Если мы, при первомъ толчкѣ (P), съумѣемъ опредѣлить еще и абсолютную величину максимальной вертикальной составляющей смѣщенія почвы z_m, то легко получить, какъ то видно изъ чертежа 50, и *кажущійся* уголъ выхода сейсмической радіаціи $\bar{e}$, по формулѣ

$$\operatorname{tg}\bar{e} = \frac{z_m}{h_m} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (10)$$

Уголъ $\bar{e}$ можетъ быть, такимъ образомъ, непосредственно опредѣленъ изъ наблюденій. Мы отмѣчаемъ этотъ уголъ штрихомъ, поставленнымъ надъ буквой e, и называемъ его *кажущимся* угломъ выхода сейсмической радіаціи, въ отличіе отъ истиннаго угла $CBD = e$, подъ которымъ соотвѣт-

ствующій сейсмическій лучъ, идущій отъ эпицентра E, дѣйствительно встрѣчаетъ поверхность земли въ мѣстѣ наблюденій B.

Черт. 50.



Углы e и $\bar{e}$, вообще говоря, нѣсколько отличаются одинъ отъ другого, вслѣдствіе того, что часть падающей сейсмической энергіи, несомой лучемъ EDB, отражается въ точкѣ B внутрь земли. Тѣмъ не менѣе, между этими двумя углами должна существовать вполнѣ опредѣленная зависимость, которая, однако, въ настоящее время, еще не вполнѣ строго установлена.

Къ обоимъ этимъ вопросамъ, а именно къ опредѣленію азимута эпицентра и угла выхода сейсмической радіаціи, мы вернемся еще впослѣдствіи въ главѣ X.

Зная величину каждаго изъ трехъ смѣщеній, двухъ горизонтальныхъ и одного вертикальнаго, какъ функцію отъ времени t, найдемъ легко и величины соотвѣтствующихъ вторыхъ производныхъ по t или ускореній, которыя будутъ характеризовать намъ величины тѣхъ силъ, которыя дѣйствуютъ въ данныхъ направленіяхъ. Зная три составляющія, найдемъ и равнодѣйствующую.

Вмѣсто того, чтобы опредѣлять ускоренія, мы могли-бы опредѣлить проэкціи скорости движенія, а по этимъ проэкціямъ найти и абсолютную величину полной скорости v.

Тогда, отвлекаясь отъ вліянія вращеній, которыя, повидимому, большею частью малы въ сравненіи со смѣщеніями, мы можемъ принять интенсивность сейсмической энергіи, проявляемой въ мѣстѣ наблюденія B, пропорціональной квадрату скорости v.

Въ случаѣ синусоидальнаго характера движенія почвы, вычисленіе скоростей и ускореній не представляетъ никакихъ затрудненій.

Если

$$x = x_m \sin (pt + \delta),$$

гдѣ

$$p = \frac{2\pi}{T_p},$$

то соотвѣтствующая проэкція скорости будетъ

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2\pi}{T_p} x_m \cdot \cos (pt + \delta),$$

а проэкція ускоренія

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T_p^2} x_m \sin (pt + \delta).$$

Максимальныя-же, абсолютныя величины скорости и ускоренія будутъ

$$\frac{2\pi}{T_p} x_m$$

и

$$\frac{4\pi^2}{T_p^2} x_m.$$

Представимъ себѣ теперь, что мы, тѣмъ или инымъ способомъ, опредѣлили величину сейсмической энергіи въ различныхъ точкахъ, отстоящихъ недалеко или даже непосредственно прилегающихъ къ эпицентру какого-нибудь землетрясенія.

Эту энергію обозначимъ черезъ I. Чѣмъ больше разстояніе Δ данной точки отъ эпицентра, тѣмъ меньше будетъ I.

Располагая рядомъ соотвѣтственныхъ значеній I и Δ, можно опредѣлить приближенную глубину h залеганія очага землетрясенія по чрезвычайно простому и изящному способу, на который впервые указалъ Dutton.

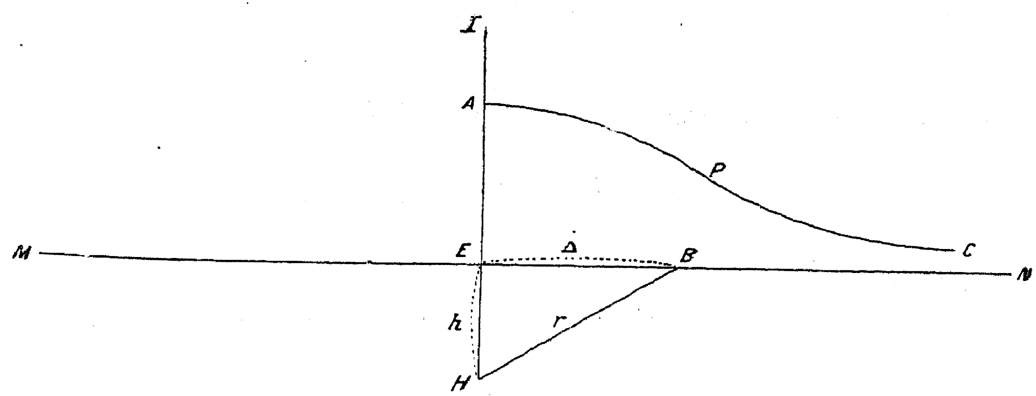
Такъ какъ мы ограничиваемся точками, лежащими не очень далеко отъ эпицентра, то мы можемъ, въ первомъ приближеніи, принять поверхность земли за плоскость.

Съ другой стороны, такъ какъ очагъ землетрясенія никогда не лежитъ очень глубоко, то мы пренебрежемъ и поглощеніемъ сейсмической энергіи въ верхнихъ слояхъ земли, хотя, конечно, при желаніи вывести болѣе стро-

гую формулу, обѣ поправки, — на кривизну и на поглощеніе, — легко принять во вниманіе. Мы примемъ, такимъ образомъ, что сейсмическая энергія I обратно пропорціональна квадрату разстоянія r мѣста наблюденія отъ очага землетрясенія.

Пусть на слѣдующемъ чертежѣ 51 MN представляетъ собою поверхность земли, H очагъ землетрясенія, E эпицентръ, а B какое-нибудь мѣсто наблюденій, находящееся въ разстояніи Δ отъ E.

Черт. 51.



Тогда

$$r^2 = \Delta^2 + h^2$$

и

$$I = \frac{A}{\Delta^2 + h^2}, \qquad (11)$$

гдѣ A есть нѣкоторая постоянная.

Зависимость I отъ эпицентральнаго разстоянія Δ можно представить графически, принявъ линію EI за ось ординатъ, по которой откладываются величины I, а линію EN за ось абсциссъ, по которой откладываются величины Δ. Такимъ образомъ получится кривая APC, дающая наглядное представленіе зависимости I отъ Δ.

Имѣя наблюденія съ нѣсколькихъ станцій, въ различныхъ разстояніяхъ Δ отъ эпицентра, можно построить, съ бо̀льшимъ или меньшимъ приближеніемъ, кривую

$$I = f(\Delta).$$

Имѣя двѣ пары соотвѣтственныхъ величинъ I и Δ, можно легко опредѣлить двѣ неизвѣстныя A и h, т.-е. опредѣлить, между прочимъ, и искомую глубину залеганія очага H.

Способъ Dutton'а заключается, однако, не въ этомъ.

Изслѣдуемъ свойства кривой $I = f(\Delta)$, опредѣляемой уравненіемъ (11).

Для этого опредѣлимъ сначала величины $\frac{dI}{d\Delta}$ и $\frac{d^2I}{d\Delta^2}$.

$$\frac{dI}{d\Delta} = -2A \cdot \frac{\Delta}{(\Delta^2 + h^2)^2}$$

и

$$\frac{d^2I}{d\Delta^2} = -2A \cdot \frac{(\Delta^2 + h^2)^2 - \Delta . 2(\Delta^2 + h^2) . 2\Delta}{(\Delta^2 + h^2)^4} = 2A \frac{3\Delta^2 - h^2}{(\Delta^2 + h^2)^3}.$$

Первая изъ этихъ формулъ показываетъ, что $\frac{dI}{d\Delta}$ всегда отрицательно, а вторая, что, пока

$$\Delta < \frac{h}{\sqrt{3}},$$

$\frac{d^2I}{d\Delta^2} < 0$, т. е. кривая обращена вогнутостью къ оси абсциссъ, а, при $\Delta > \frac{h}{\sqrt{3}}$, вогнутость кривой обращена въ противоположную сторону.

Значитъ въ точкѣ P, гдѣ

$$\Delta = \frac{h}{\sqrt{3}}, \qquad (12)$$

кривая имѣетъ точку перегиба или максимальный наклонъ къ оси абсциссъ, иначе говоря, около этой точки интенсивность сейсмической энергіи *быстрѣе всего* измѣняется съ разстояніемъ Δ, т. е. изосейсты наиболѣе сближены.

Положеніе этой точки перегиба совершенно не зависитъ отъ абсолютной величины сейсмической энергіи, т. е. совершенно не зависитъ отъ величины постоянной A; поэтому, если, располагая достаточнымъ наблюдательнымъ матеріаломъ, намъ удастся построить кривую $I = f(\Delta)$ и найти ея точку перегиба, то, зная соотвѣтствующую величину Δ, тотчасъ-же, по формулѣ (12), опредѣлимъ и искомую глубину залеганія очага h.

---

§ 3.

Главнѣйшіе типы сейсмографовъ.

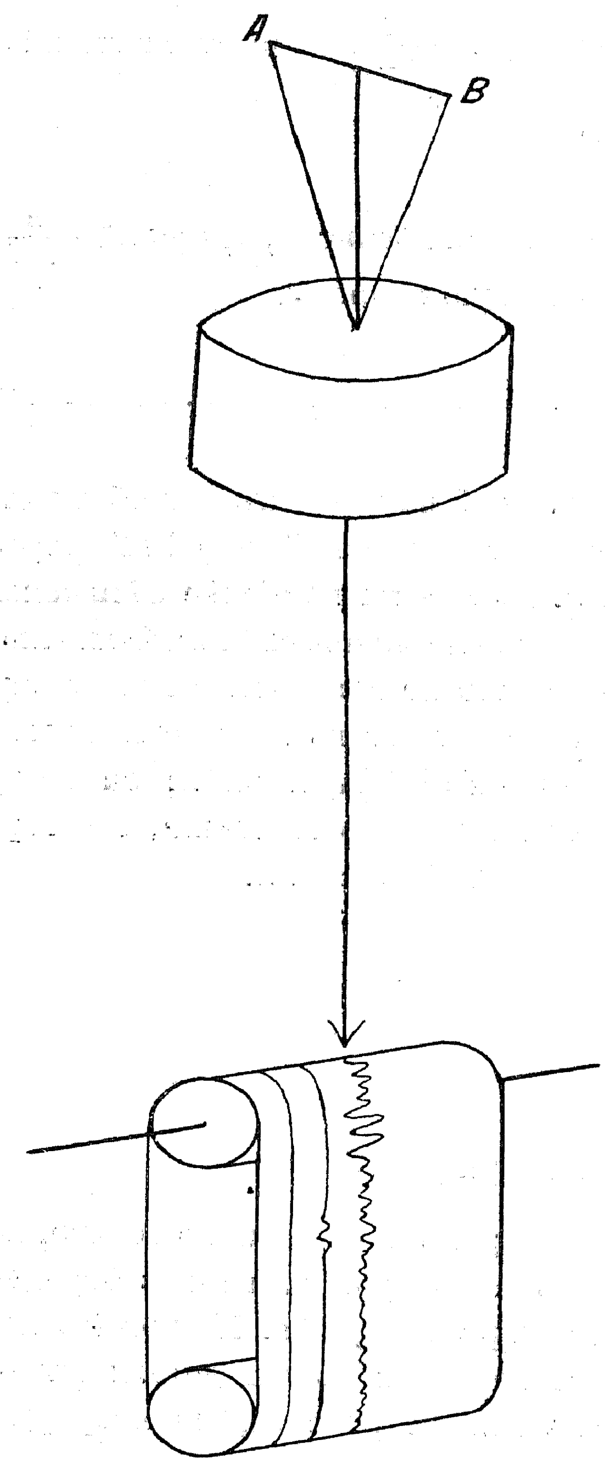
Число различныхъ сейсмическихъ приборовъ чрезвычайно велико, но почти всѣ они могутъ быть приведены къ нѣкоторымъ, вполнѣ опредѣленнымъ типамъ, которые мы здѣсь вкратцѣ и разсмотримъ. При этомъ мы вообще не будемъ вдаваться въ разныя конструктивныя детали аппаратовъ, а ограничимся только принципомъ ихъ устройства, иллюстрируя послѣдніе соотвѣтственными схематическими чертежами.

Разсмотримъ сначала тѣ сейсмографы, которые служатъ для регистраціи *горизонтальныхъ* смѣщеній почвы.

Простой вертикальный маятникъ.

Этотъ типъ прибора, въ простѣйшемъ его видѣ, мы разсмотрѣли уже въ предыдущемъ параграфѣ.

Черт. 52.



Чтобы ограничить колебанія прибора одной только опредѣленной плоскостью качаній, можно, какъ мы видѣли, прибѣгнуть къ способу подвѣшиванія маятника на двухъ упругихъ пластинкахъ (см. черт. 47).

Образчикъ регистраціи такого прибора представленъ на слѣдующемъ чертежѣ 52.

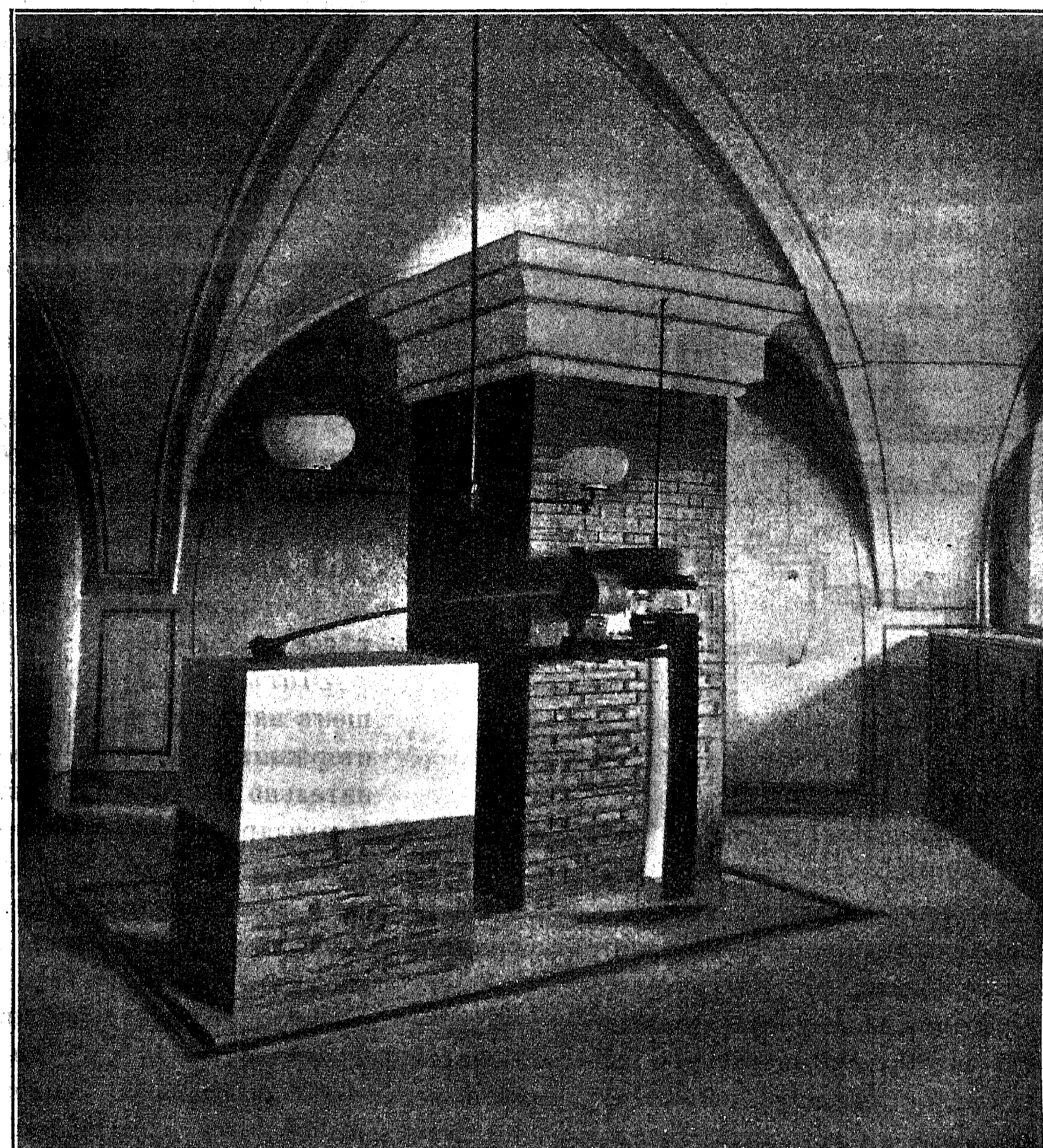
Здѣсь закопченная, склеенная бумажная лента перекидывается черезъ два валика. Нижній валикъ служитъ оттяжкой, а верхній соединенъ съ часовымъ механизмомъ, который протягиваетъ бумажную ленту подъ пишущимъ штифтомъ сейсмографа. Такое устройство регистрирной части очень распространено въ Германіи при астатическихъ маятникахъ Wiechert'а, съ которыми мы познакомимся впослѣдствіи.

Ось вращенія AB такого вертикальнаго маятника *горизонтальна*, и, такъ какъ такой вертикальный маятникъ можетъ колебаться только въ одной опредѣленной плоскости, то, для регистраціи двухъ горизонтальныхъ составляющихъ смѣщенія почвы, надо имѣть два такихъ прибора.

Въ нѣкоторыхъ типахъ вертикальныхъ маятниковъ, напр., въ вертикальномъ маятникѣ Vicentini, представленномъ на слѣдующемъ рис 53, въ цѣляхъ избѣжанія необходимости имѣть два прибора, маятникъ подвѣшенъ такъ, что онъ можетъ колебаться во всевозможныхъ азимутахъ, но расчлененіе движенія на двѣ состав-

ляющія, напр., по направленію меридіана и перваго вертикала, достигается чисто механическимъ путемъ.

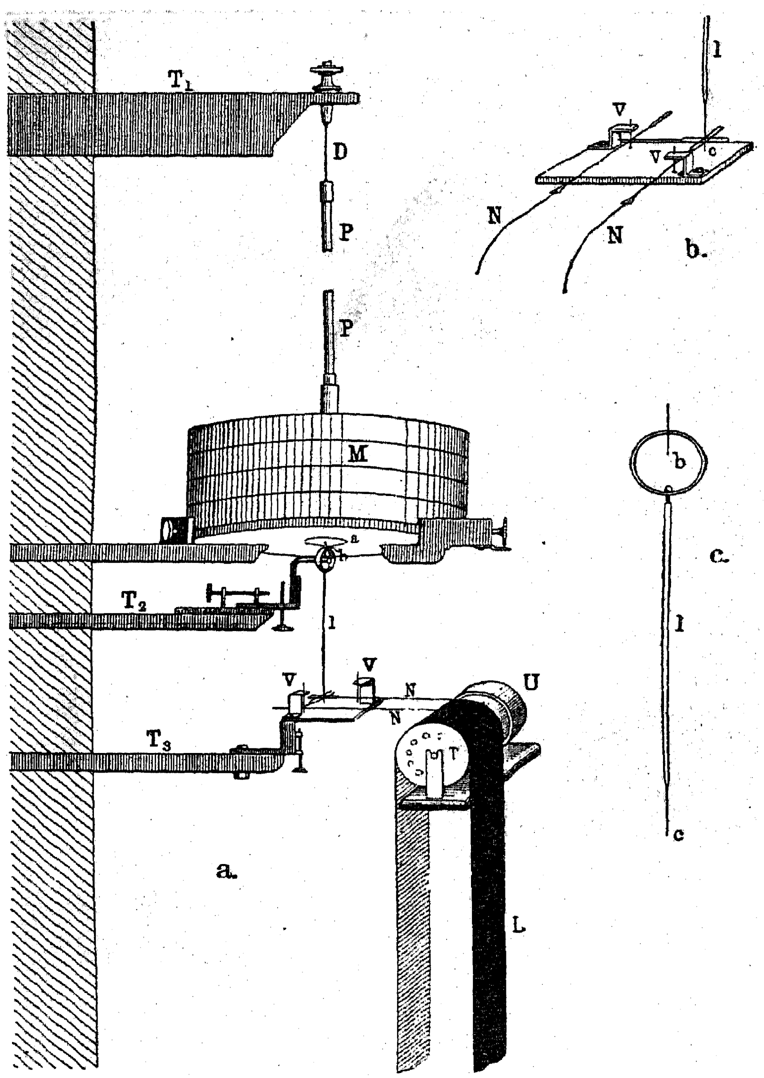
Рисунокъ 53.



Регистрирный штифтъ входитъ для этого въ особую вилку, причемъ, при помощи особыхъ рычаговъ, изъ которыхъ одинъ колѣнчатый, дѣйствительное движеніе штифта, разлагается на двѣ взаимно перпендикулярныя составляющія.

Въ подробности устройства такого приспособленія мы входить не будемъ. Оно достаточно ясно видно изъ прилагаемаго рисунка 54.

Черт. 54.



Тотъ-же принципъ механическаго разложенія движенія на двѣ составляющія примѣняется и въ тяжеломъ вертикальномъ маятникѣ Wiechert'а, установленномъ на сейсмической станціи въ Gottingen'ѣ.

Этотъ вертикальный маятникъ отличается своимъ колоссальнымъ вѣсомъ, а именно онъ вѣситъ 17 тоннъ или 17000 килограммъ. Осуществлена эта громадная масса слѣдующимъ образомъ. Взятъ большой желѣзный цилиндръ, въ который наложены особые тяжелые камни съ удѣльнымъ вѣсомъ около 4.

Этотъ цилиндръ подвѣшенъ на трехъ желѣзныхъ стержняхъ, которые сравнительно довольно коротки. Благодаря этому, собственный періодъ колебанія маятника очень невеликъ, а именно около $1\frac{1}{2}$ секунды; этотъ маятникъ предназначенъ преимущественно для регистраціи сейсмическихъ волнъ съ короткими періодами.

Нормальное увеличеніе этого прибора чрезвычайно велико, а именно около 2000, что достигнуто сложной системой послѣдовательныхъ увеличительныхъ рычаговъ. Такое громадное увеличеніе потребовало именно примѣненіе столь значительной массы, такъ какъ способъ регистраціи у этого прибора механическій,—пишущимъ штифтомъ по закопченной бумагѣ.

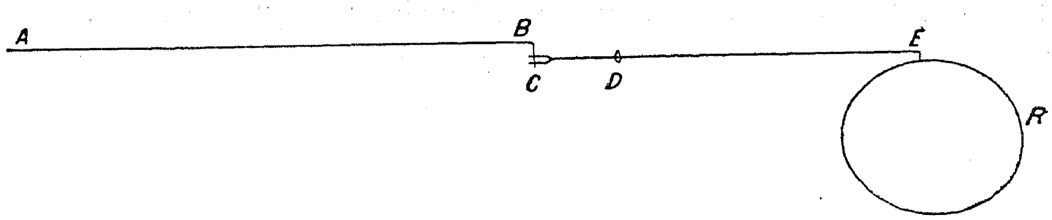
Дѣйствительно, пишущее перо всякаго сейсмическаго аппарата, при своемъ движеніи по закопченной бумажной поверхности, встрѣчаетъ извѣстное сопротивленіе своему движенію отъ тренія. Треніе это является величиной очень перемѣнчивой и, хотя оно по своей абсолютной величинѣ

и незначительно, но, такъ какъ сейсмографы представляютъ собою очень удобоподвижные приборы, то это треніе невольно реагируетъ на движеніе маятника, измѣняя нѣсколько характеръ его собственнаго движенія, и тѣмъ самымъ значительно усложняя раціональную обработку сейсмограммъ. Къ этому вопросу мы вернемся еще впослѣдствіи въ главѣ XII.

Для уменьшенія этого вреднаго вліянія тренія на правильность записи приборовъ и приходится прибѣгать къ большимъ массамъ, причемъ, чѣмъ больше увеличеніе, тѣмъ больше должна быть и масса. Въ этомъ отношеніи механическій способъ регистраціи, требующій, при значительномъ увеличеніи, употребленіе большихъ массъ, чрезвычайно неудобенъ, такъ какъ соотвѣтствующіе сейсмографы становятся очень неуклюжими и громоздкими.

Примѣненіе сложныхъ увеличительныхъ рычаговъ, особенно при соединеніи плечей рычаговъ при помощи вилокъ, какъ то, напримѣръ, представлено на слѣдующемъ чертежѣ 55, гдѣ пишущее перо горизонтально

Черт. 55.



AB — стержень прибора, соединенный съ массой маятника.
C — вилка.
CD — короткое плечо увеличительнаго прибора.
DE — длинное » » »
D — ось вращенія увеличительнаго прибора.
R — барабанъ регистрирнаго аппарата.

(регистрирная часть горизонтальнаго маятника), представляетъ собою еще и то неудобство, что, при такихъ рычагахъ, увеличивается вліяніе тренія, и, кромѣ того, весьма трудно избѣгнуть мертваго хода въ увеличительномъ приборѣ. Къ тому-же штифтъ, входящій въ вилку, иногда заклинивается и теряетъ свою удобоподвижность.

Расчлененіе движенія простого вертикальнаго маятника, могущаго колебаться во всевозможныхъ плоскостяхъ, при помощи различныхъ механическихъ приспособленій, представляетъ собою еще и то неудобство, что никогда нельзя быть вполнѣ увѣреннымъ въ томъ, что запись каждой отдѣльной составляющей вполнѣ независима отъ другой. Вслѣдствіе неизбѣжнаго тренія въ разныхъ сочлененіяхъ всякихъ механическихъ приспособленій, вполнѣ возможно, что движеніе одной составляющей нѣсколько реагируетъ на движеніе другой, что вызоветъ искаженіе самой записи прибора.

Теорія этихъ сейсмографовъ показываетъ намъ, какъ мы въ томъ

убѣдимся впослѣдствіи, что, вообще, при наличіи затуханія и отвлекаясь пока отъ вліянія резонанса, чѣмъ длиннѣе собственный періодъ колебаній маятника T, тѣмъ чувствительнѣе онъ реагируетъ на ритмическія, горизонтальныя смѣщенія почвы.

Но для того, чтобы увеличить T, въ цѣляхъ увеличенія чувствительности прибора, надо увеличить длину маятника.

Такой типъ очень длиннаго, простого вертикальнаго маятника былъ построенъ итальянскимъ сейсмологомъ Cancani; одинъ экземпляръ такого маятника находится и въ Россіи, на сейсмической станціи въ Тифлисѣ.

Но такіе приборы очень громоздки и неудобны въ обращеніи.

Гораздо проще достигнуть увеличенія собственнаго періода колебаній прибора, измѣнивъ положеніе оси вращенія инструмента изъ горизонтальнаго въ почти вертикальное, такимъ образомъ, чтобы грузъ маятника, вмѣсто того, чтобы колебаться въ вертикальной плоскости, колебался-бы въ плоскости, составляющей весьма малый уголъ съ плоскостью горизонта.

Мы осуществимъ, такимъ образомъ, такъ называемый *горизонтальный* маятникъ, къ разсмотрѣнію котораго мы сейчасъ и перейдемъ.

Горизонтальные маятники, благодаря своему длинному собственному періоду колебаній, представляютъ собою очень чувствительные сейсмическіе аппараты. Этими маятниками широко пользуются на разныхъ сейсмическихъ станціяхъ.

Для станцій, находящихся въ значительномъ удаленіи отъ сейсмическихъ областей, простые вертикальные маятники не обладаютъ вообще достаточной чувствительностью, но въ плейстосейстовыхъ и эпицентральныхъ областяхъ они могли-бы оказать весьма цѣнныя услуги.

Горизонтальный маятникъ.

Схема устройства такого маятника представлена на чертежѣ 56.

Металлическій стержень, оканчивающійся двумя остріями A и B, входящими въ неподвижныя гнѣзда, соединенъ, при помощи твердой рамы RR, съ тяжелой массой M.

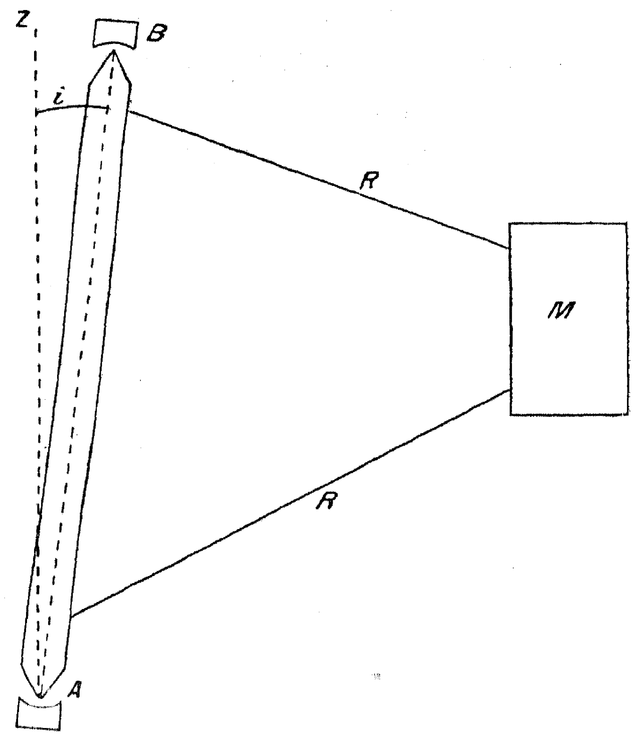
Ось вращенія прибора AB наклонена подъ малымъ угломъ i къ вертикальной линіи AZ. Положеніе равновѣсія прибора соотвѣтствуетъ самому низкому положенію центра тяжести подвижной части инструмента.

Если отвести массу M въ сторону и предоставить ее затѣмъ самой себѣ, то она будетъ колебаться по законамъ гармоническихъ колебаній около оси AB почти въ горизонтальной плоскости, причемъ собственный періодъ колебаній маятника будетъ тѣмъ больше, чѣмъ меньше уголъ наклона оси прибора i. Взявъ малый уголъ наклона i, можно, такимъ образомъ, чрезвы-

чайно просто осуществить длинный періодъ колебаній. Если уголъ $i = 90°$, то горизонтальный маятникъ превращается въ простой вертикальный, который, такимъ образомъ, можно разсматривать, до извѣстной степени, какъ частный случай горизонтальнаго маятника.

Смѣщенія почвы, перпендикулярныя къ плоскости чертежа, будутъ дѣйствовать на такой горизонтальный маятникъ совершенно такъ-же, какъ и на соотвѣтствующій вертикальный маятникъ, съ тою только разницею, что горизонтальный маятникъ, по крайней мѣрѣ по отношенію къ длиннымъ сейсмическимъ волнамъ, окажется значительно чувствительнѣе.

Черт. 56.



Если придѣлать къ массѣ *M* пишущій штифтъ, то можно регистрировать движеніе прибора на вращающемся барабанѣ, покрытомъ листомъ закопченной бумаги (механическая регистрація). Но можно регистрировать движеніе прибора и оптическимъ способомъ, укрѣпивъ вблизи оси вращенія инструмента плоское зеркало, на которое и направить пучекъ свѣтовыхъ лучей отъ неподвижнаго источника свѣта, сконцентрировавъ затѣмъ всѣ лучи, при помощи особыхъ чечевицъ, въ одной точкѣ на поверхности регистрирнаго барабана, который въ этомъ случаѣ обтягивается свѣточувствительной бумагой (оптическая регистрація).

При движеніи прибора, свѣтовая точка будетъ перемѣщаться по поверхности регистрирнаго цилиндра, параллельно производящимъ послѣдняго, и, при вращеніи барабана, получится, послѣ проявленія, на бумагѣ нѣкоторая кривая, характеризующая собою движеніе горизонтальнаго маятника.

Такой горизонтальный маятникъ *на двухъ шпицахъ* былъ осуществленъ Rebeur-Paschwitz'омъ и потомъ нѣсколько видоизмѣненъ Hecker'омъ.

Эти маятники дѣлаются обыкновенно очень легкими; напр., общій вѣсъ подвижной части такого маятника, принадлежащаго нашей Сейсмической Комиссіи, вѣситъ всего только около 64 граммовъ, а потому при нихъ примѣняется уже не механическій, а оптическій методъ регистраціи.

Недостатокъ такихъ маятниковъ на двухъ шпицахъ заключается въ томъ, что, съ теченіемъ времени, шпицы тупятся, отчего маятникъ стано-

вится менѣе чувствительнымъ, т.-е. онъ менѣе свободно реагируетъ на малыя смѣщенія почвы; кромѣ того, при ступившихся шпицахъ, маятникъ можетъ нѣсколько измѣнить и свое нормальное положеніе равновѣсія.

Другой и весьма существенный недостатокъ маятниковъ этого типа заключается въ томъ, что собственный ихъ періодъ колебаній T зависитъ въ очень сильной мѣрѣ отъ амплитуды размаховъ прибора. Такъ, напримѣръ, обозначивъ *уголъ* отклоненія маятника отъ положенія равновѣсія черезъ θ, получилась, на основаніи наблюденій съ экземпляромъ Сейсмической Комиссіи, слѣдующая зависимость T отъ θ.

θ	T
0° 8′	15^s,6
1 50	16,8
5 9	20,5
6 15	21,6

Такое непостоянство собственнаго періода колебаній является весьма крупнымъ недостаткомъ этого прибора, значительно осложняющимъ обработку сейсмограммъ.

Слѣдующій типъ горизонтальнаго маятника представляетъ собою маятникъ съ *однимъ* упорнымъ штифтомъ внизу.

Схематическій рисунокъ такого маятника представленъ на слѣдующемъ чертежѣ 57.

На стержень AF, имѣющій почти горизонтальное положеніе, надѣта тяжелая масса M.

Внутренній конецъ стержня маятника оканчивается стальнымъ остріемъ A, упирающимся въ неподвижную чашечку.

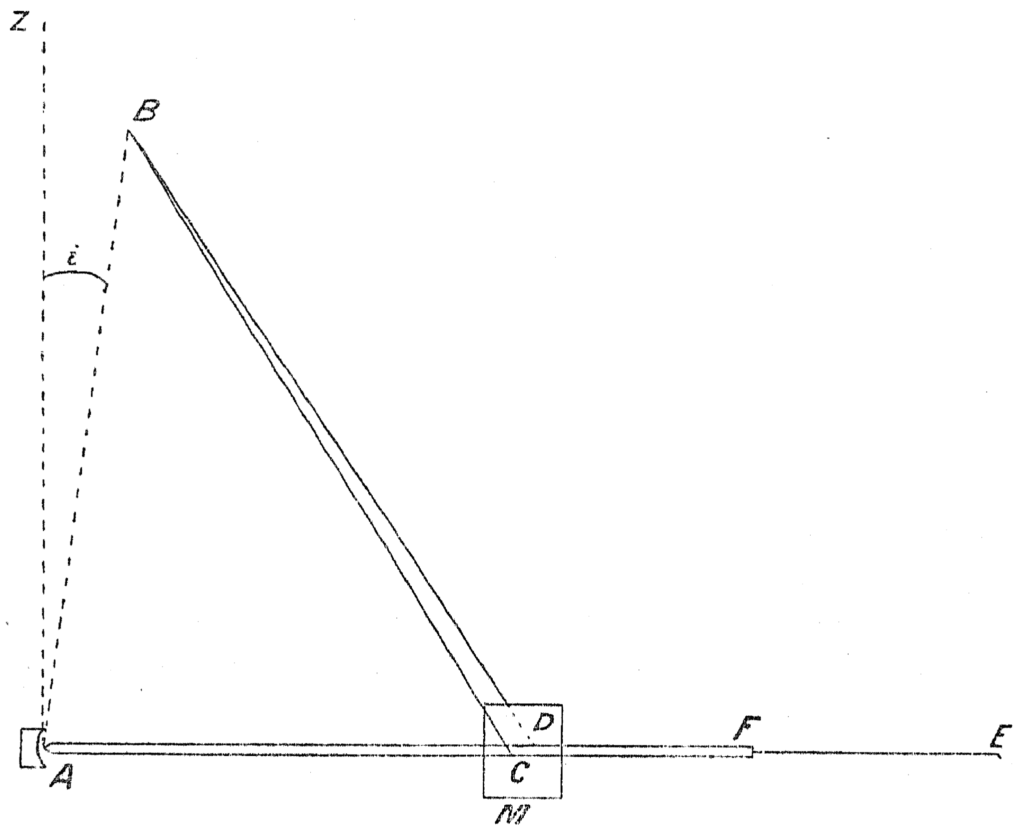
Отъ груза маятника идутъ кверху, съ двухъ сторонъ, двѣ проволоки CB и DB, которыя закрѣпляются вмѣстѣ въ B и поддерживаютъ массу M.

Точки A и B неподвижны и неизмѣннымъ образомъ соединены со штативомъ прибора.

Ось вращенія прибора будетъ линія, соединяющая точки A и B, а уголъ наклона оси будетъ i.

Маятники такого типа были предложены японскимъ сейсмологомъ Omori; у насъ они болѣе извѣстны подъ названіемъ маятниковъ Боша, по имени механика Боша въ Страсбургѣ, который ихъ изготовлялъ.

Черт. 57.



Слѣдующій рисунокъ 58 представляетъ собою чертежъ маятника Боша съ увеличительнымъ рычагомъ, а рисунокъ 59 общій видъ прибора.

При маятникахъ Боша масса берется настолько значительной, что можно уже примѣнять механическій способъ регистраціи.

Собственный періодъ колебаній маятниковъ Боша почти совершенно не зависитъ отъ амплитуды размаховъ.

Въ этихъ типахъ маятниковъ, какъ и въ маятникахъ на двухъ шпицахъ, существуютъ особые регулирующіе винты, при помощи которыхъ можно измѣнять уголъ наклона i, и, регулируя тѣмъ самымъ собственный періодъ колебаній T, устанавливать маятникъ на бо̀льшую или меньшую чувствительность. Нельзя, однако, чрезмѣрно увеличивать T, иначе маятникъ дѣлается очень неустойчивымъ и легко перекидывается.

Маятники Milne'a, очень распространенные на разныхъ англійскихъ сейсмическихъ станціяхъ, принципіально почти ничѣмъ не отличаются отъ приборовъ только что описаннаго типа съ однимъ упорнымъ штифтомъ. Они дѣлаются только гораздо легче и поэтому при нихъ примѣняется не механическій, а оптическій способъ регистраціи, но въ нѣсколько иномъ видѣ, чѣмъ раньше было указано. А именно, къ концу стержня маятника придѣлывается узкая горизонтальная щель; надъ этой щелью, подъ прямымъ угломъ къ ней, устанавливается другая, неподвижная щель. Такимъ

образомъ, въ мѣстѣ скрещенія этихъ двухъ щелей образуется узкій просвѣтъ, черезъ который проходитъ свѣтовой лучъ, направленный, при помощи соотвѣтственныхъ приспособленій, отъ особой лампы вертикально внизъ. Подъ щелями помѣщается регистрирный валъ, обтянутый фотографической бумагой. Вся эта регистрирная часть прикрывается особымъ ящикомъ для избѣжанія проникновенія посторонняго свѣта.

Такимъ образомъ, на регистрирномъ барабанѣ получается свѣтовая точка, которая, при движеніяхъ маятника, перемѣщается параллельно производящимъ цилиндра регистрирнаго аппарата.

Такой способъ регистраціи никоимъ образомъ нельзя признать цѣлесообразнымъ, такъ какъ, если уже примѣнять дорогой, оптическій методъ регистраціи, то слѣдовало-бы его использовать во всю. Гораздо цѣлесообразнѣе было-бы примѣнить ранѣе описанный способъ регистраціи, а именно, направить лучъ свѣта на плоское зеркальце, прикрѣпленное около оси вращенія прибора. Тогда можно было-бы поставить регистрирный валъ въ значительномъ разстояніи отъ зеркальца, напр. въ разстояніи 4-хъ метровъ, чѣмъ значительно увеличилась-бы длина соотвѣтствующаго *оптическаго рычага*, что значительно повысило-бы чувствительность записи прибора.

Приборы Milne'a, въ настоящемъ ихъ видѣ, обладаютъ очень малой чувствительностью (нормальное увеличеніе около 7).

Маятники Боша съ механической регистраціей безъ увеличительныхъ рычаговъ также обладаютъ малой чувствительностью. Поэтому, для регистраціи дальнихъ землетрясеній, примѣненіе увеличительнаго прибора является вполнѣ цѣлесообразнымъ. Но, давая большое увеличеніе, приходится, при механической регистраціи, значительно увеличивать массу, чтобы уменьшить вредное вліяніе тренія пера о закопченную бумагу.

Однако, примѣненіе большихъ массъ въ маятникахъ типа Боша сопряжено съ однимъ весьма существеннымъ неудобствомъ.

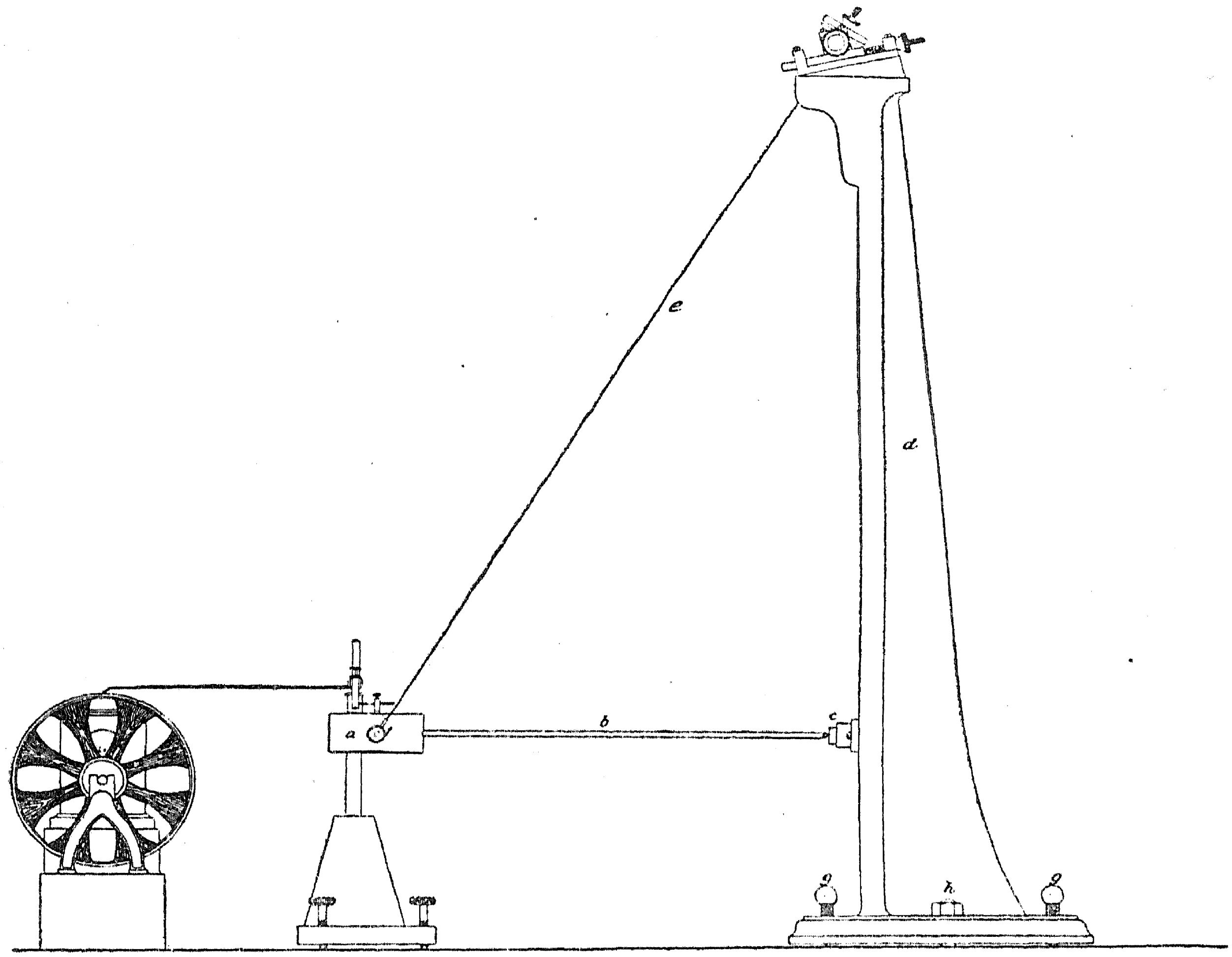
При большихъ массахъ M, давленіе острія A на упорную чашечку (см. черт. 57) будетъ очень велико. Въ этомъ легко убѣдиться изъ слѣдующихъ простыхъ соображеній.

Если-бы мы совершенно отняли нижнюю упорную чашку, то масса M помѣстилась-бы подъ верхней точкой привѣса B. Если-же мы пожелали-бы затѣмъ значительно отодвинуть массу M вправо, какъ показано на чертежѣ, то должны были-бы приложить къ A весьма значительную силу.

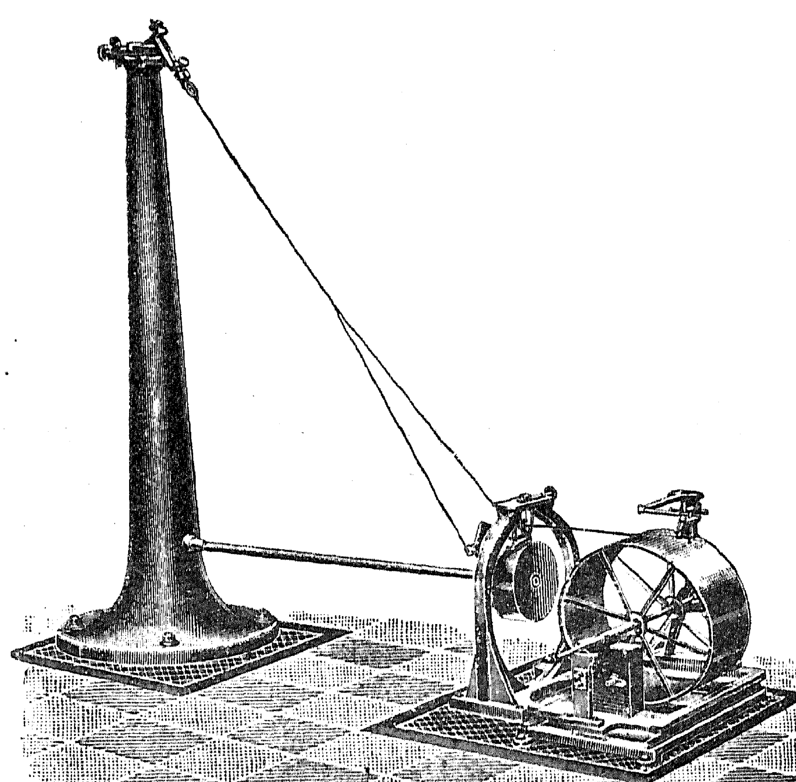
Благодаря этому обстоятельству, упорный штифтъ A маятника испытываетъ очень сильное давленіе и легко можетъ ступиться и деформироваться. Вслѣдствіе этого самъ маятникъ сдѣлается менѣе чувствительнымъ и положеніе его равновѣсія можетъ также нѣсколько измѣниться.

Въ томъ, что въ маятникахъ описаннаго типа упорные шпицы, дѣй-

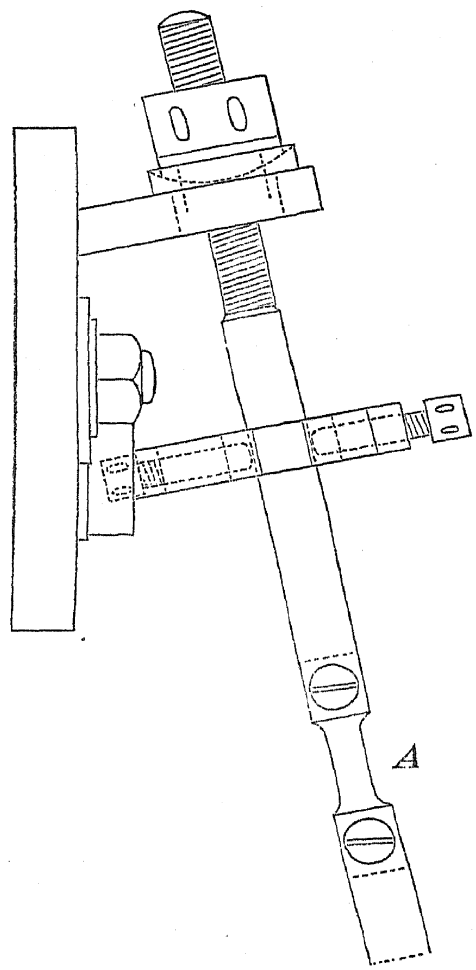
Рисунокъ 58.

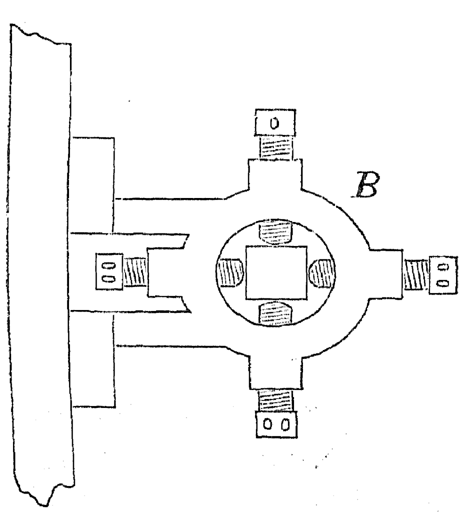


Рисунокъ 59.



Черт. 61.





ствительно, деформируются, можно легко непосредственно убѣдиться, разсматривая такой штифтъ подъ микроскопомъ.

Неудобствъ упорнаго штифта можно, однако, совершенно избѣжать, прибѣгнувъ къ особой системѣ подвѣшиванія маятника, которое примѣнено на тяжелыхъ маятникахъ съ механической регистраціей, предназначенныхъ для различныхъ русскихъ сейсмическихъ станцій второго разряда.

Общій видъ такого тяжелаго горизонтальнаго маятника представленъ на слѣдующемъ рисункѣ 60.

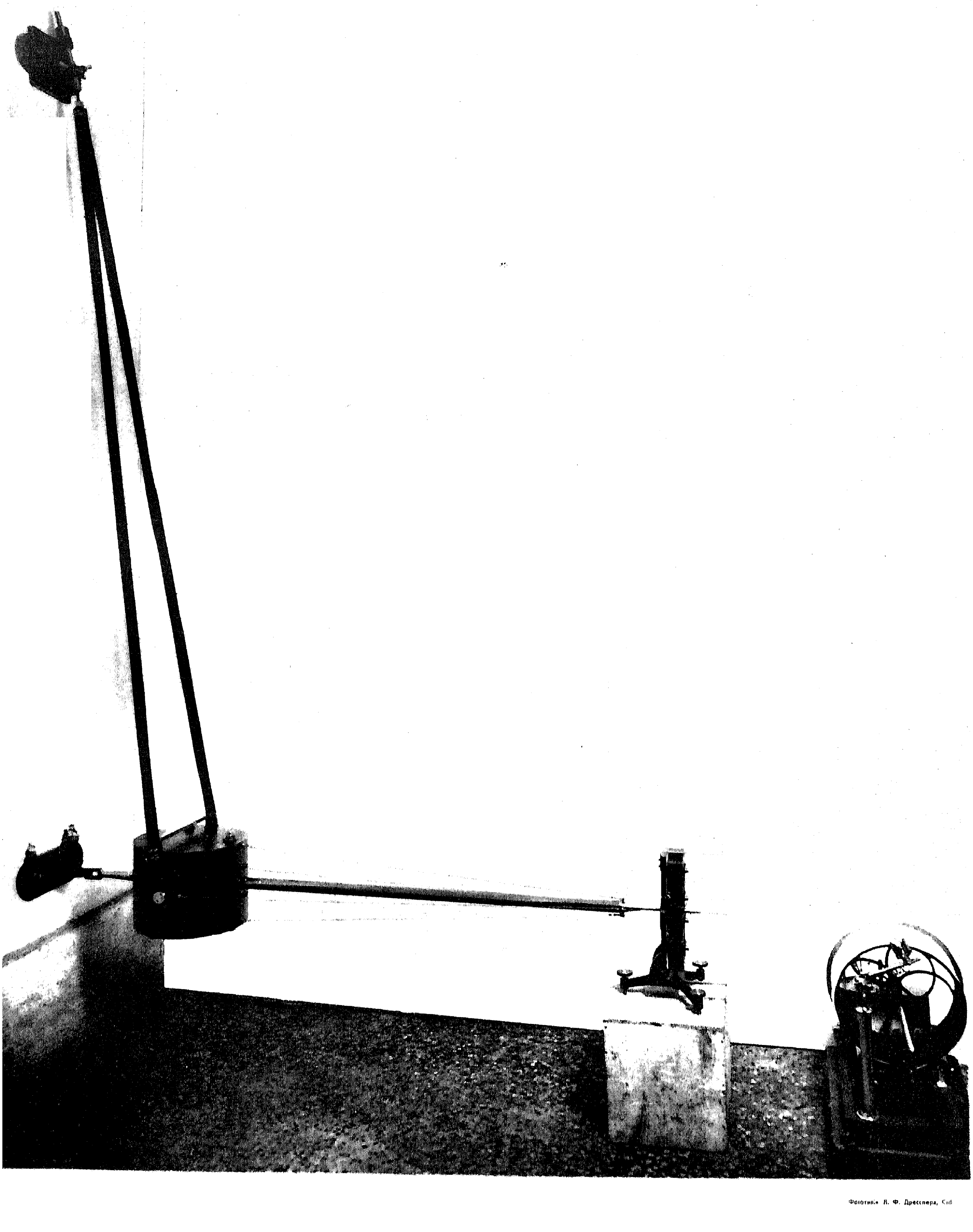
На горизонтальный стержень надѣта тяжелая масса вѣсомъ около 110 килограммъ.

Внутренній конецъ стержня упирается, при помощи особаго приспособленія, которое мы сейчасъ опишемъ, на желѣзную планку, прикрѣпленную непосредственно къ стѣнѣ. Отъ груза маятника идутъ кверху двѣ стальныя ленты, соединенныя вмѣстѣ и съ короткой, плоской, стальной пружиной *A* (см. черт. 61), связанной съ наклоннымъ стержнемъ, скрѣпленнымъ съ другой, верхней планкой, также придѣланной къ стѣнѣ.

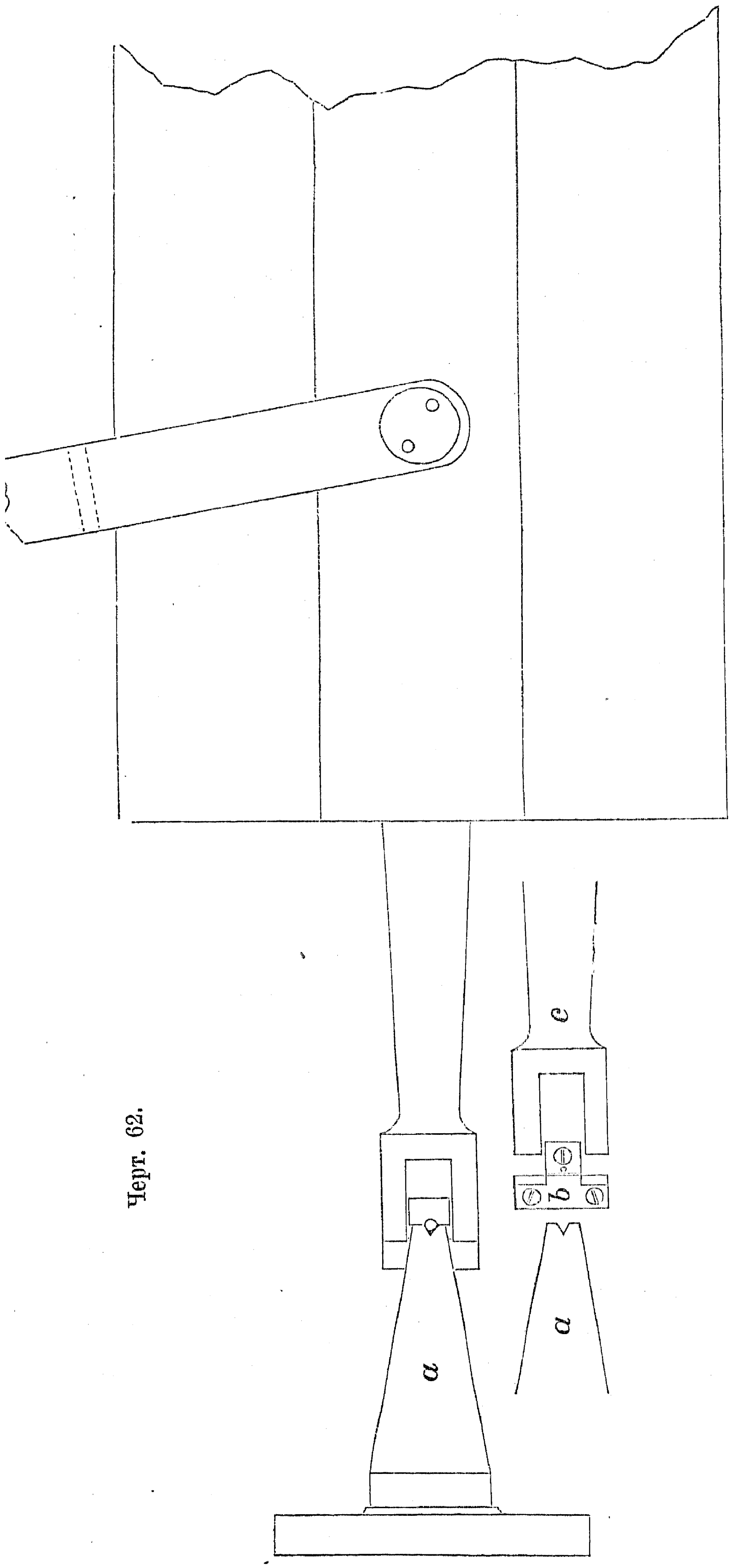
При помощи особаго винта и гайки можно нѣсколько подымать и опускать этотъ стержень; другіе-же 4 боковыхъ винта, удерживающіе стержень въ кольцѣ *B*, позволяютъ давать стержню, упирающемуся въ верхней своей части на шаровую поверхность, небольшія смѣщенія впередъ и назадъ, а также вправо и влѣво. При помощи всѣхъ этихъ винтовъ можно легко измѣнять собственный періодъ колебанія маятника и приводить его въ надлежащее положеніе по отношенію къ валу регистрирнаго аппарата.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что этотъ типъ горизонтальнаго маятника не имѣетъ особаго штатива, а непосредственно прикрѣпляется къ

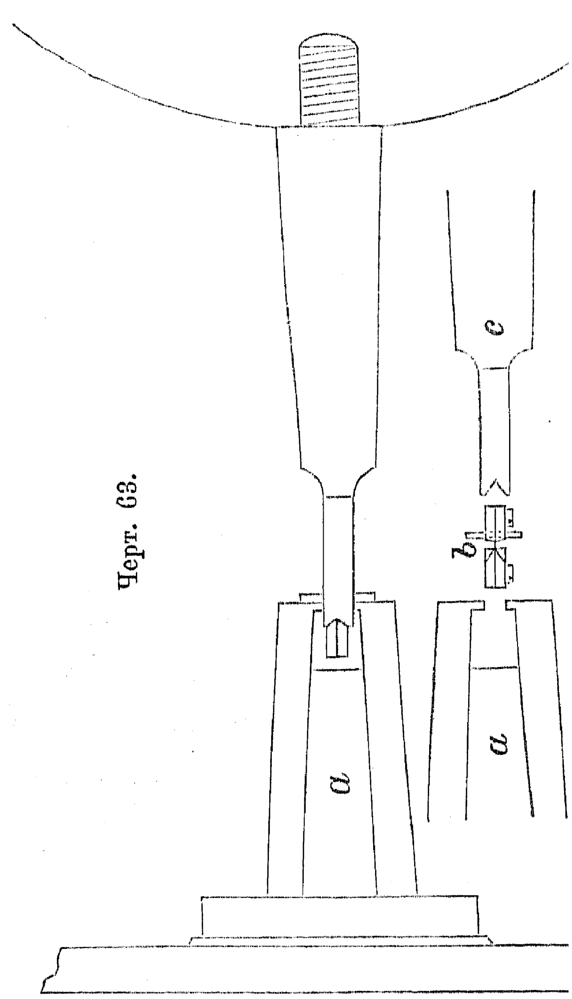
Рис. 60.



Фототипія А. Ф. Дресслера, Спб



Черт. 62.



Черт. 63.

стѣнѣ, которая, однако, не должна быть наружной, во избѣжаніе возможныхъ вліяній измѣненія температуры наружнаго воздуха.

Соединеніе внутренняго конца стержня маятника съ нижней планкой на стѣнѣ осуществляется при помощи особаго приспособленія, показаннаго на чертежахъ 62 и 63.

Первый чертежъ даетъ боковой видъ прибора, а второй—видъ сверху.

Въ верхней части обоихъ чертежей отдѣльныя части показаны соприкасающимися, въ томъ положеніи, въ которомъ они находятся въ дѣйствительности, а въ нижней части они показаны частью раздвинутыми, чтобы лучше можно было разсмотрѣть ихъ устройство.

Часть b, которая въ сущности и служитъ нижней упорной точкой, около которой совершается вращеніе маятника, можетъ по желанію быть вынута и замѣнена новой.

Часть a неизмѣнно связана со стѣной. Спереди она оканчивается вилкой съ горизонтальнымъ желобомъ, въ который упирается, выступающими круглыми штифтами, часть b. Часть b имѣетъ короткую стальную, плоскую пружину, длиной, примѣрно, въ 0,5 мм. Эта пружина закрѣплена винтами между двумя зажимными планками. Съ наружной стороны, въ сторону къ грузу, планки эти срѣзаны на подобіе призмы съ вертикальнымъ ребромъ.

Къ грузу маятника прикрѣпляется часть c, также оканчивающаяся вилкой съ вертикальнымъ желобомъ, имѣющимъ также призматическое сѣченіе. Въ этотъ желобъ, когда маятникъ собранъ, упирается вышеупомянутый призматическій срѣзъ части b.

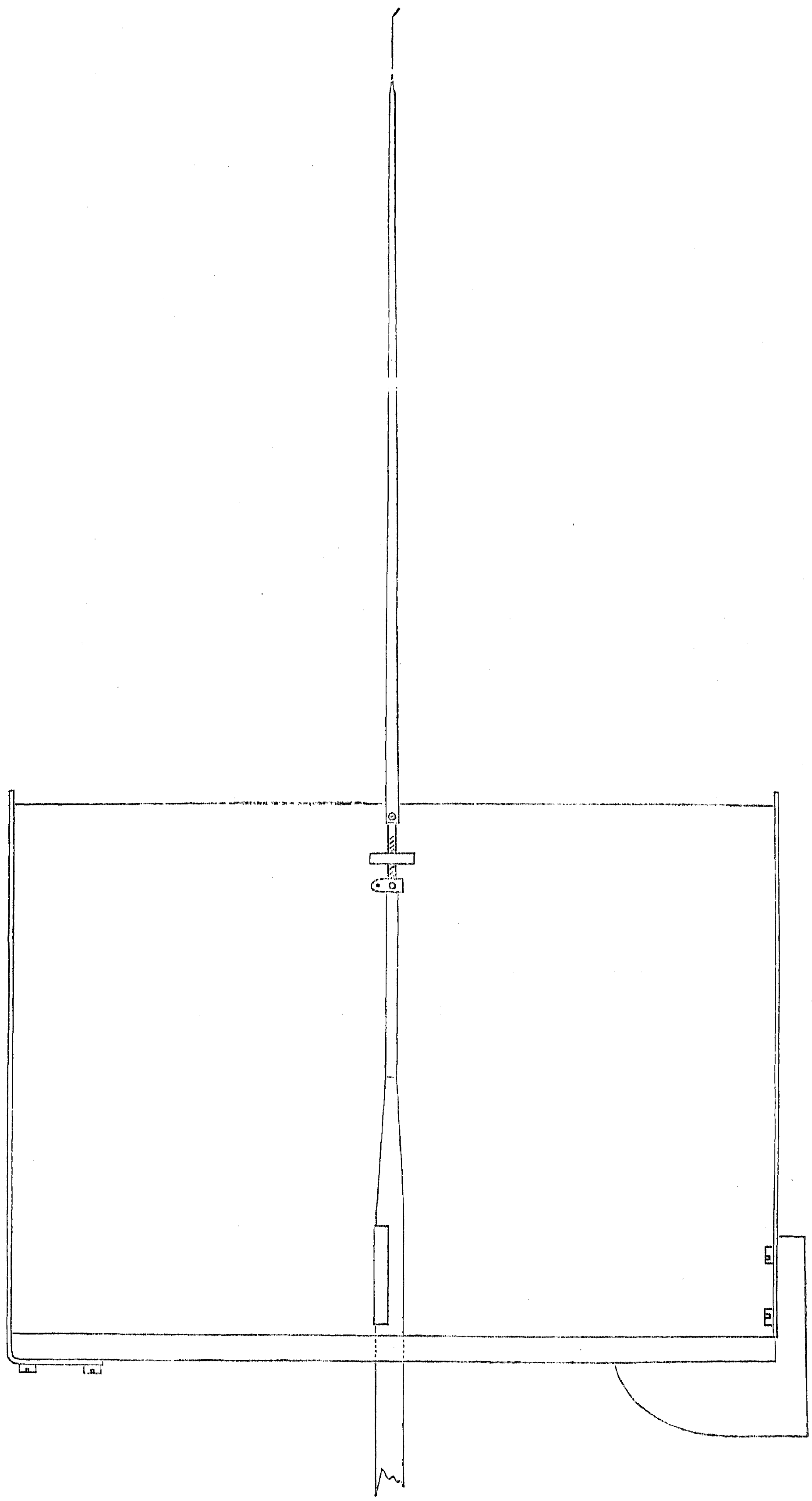
Сборка этихъ частей производится слѣдующимъ образомъ.

Отодвигаютъ грузъ маятника нѣсколько вправо и вставляютъ выступающіе штифты у b въ горизонтальный желобъ у a, а затѣмъ осторожно опускаютъ призматическій желобъ у c на призматическій срѣзъ у b. Этимъ достигается то, что короткая стальная пружина, которая въ сущности и представляетъ собою нижнюю точку вращенія, будетъ вездѣ одинаково натянута, чѣмъ значительно уменьшается опасность ея разрыва. Но, если она даже и разорвется, то ее всегда очень легко замѣнить новой.

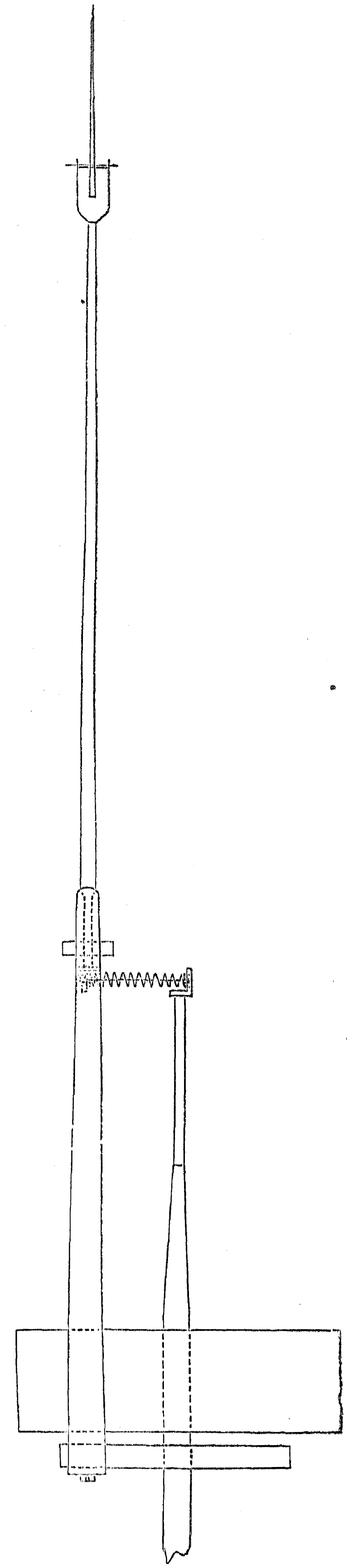
При этомъ приспособленіи совершенно избѣгается нижнее упорное остріе; пружина находится всегда въ натянутомъ состояніи и самъ маятникъ имѣетъ полную возможность свободно колебаться около своей наклонной оси вращенія.

Наблюденія, произведенныя съ этимъ маятникомъ, показали, что вышеописанное скрѣпленіе очень цѣлесообразно и удобно. При этомъ маятникъ, благодаря значительной длинѣ поддерживающихъ грузъ стальныхъ полосъ, чрезвычайно устойчивъ. Его собственный періодъ колебаній можетъ быть

Черт. 64.



Черт. 65.



безъ затрудненія доведенъ до 90 секундъ, хотя такіе длинные періоды, въ практической сейсмометріи, требуются весьма рѣдко.

У праваго конца стержня маятника прикрѣплена горизонтальная мѣдная планка, которая можетъ свободно перемѣщаться между полюсами двухъ неподвижныхъ, постоянныхъ, подковообразныхъ магнитовъ, чѣмъ достигается извѣстное затуханіе собственнаго движенія прибора. Значеніе затуханія въ сейсмическихъ приборахъ выяснится изъ дальнѣйшаго, при разсмотрѣніи теоріи горизонтальнаго маятника (см. главу V).

Если желательно, чтобы маятникъ имѣлъ сравнительно малую чувствительность, то пишущее перо для механической регистраціи прикрѣпляется непосредственно къ концу стержня маятника. Если-же желательно повысить чувствительность, то вводится увеличительный приборъ.

Въ данномъ типѣ маятника увеличительный приборъ отличается большой легкостью и удобоподвижностью; *самъ по себѣ* онъ не вводитъ почти никакого тренія, причемъ соединеніе короткаго плеча рычага со стержнемъ маятника чрезвычайно надежно, такъ какъ здѣсь нѣтъ никакой соединительной вилки, которая такъ часто примѣняется при разныхъ увеличительныхъ рычагахъ.

Чертежъ 64 даетъ боковой видъ этого увеличительнаго прибора, а чертежъ 65 видъ сверху.

Осью вращенія увеличительнаго рычага служитъ тонкая, слегка натянутая, вертикальная проволока. Увеличительный приборъ стоитъ самъ нѣсколько сбоку, причемъ соединеніе короткаго плеча рычага со стержнемъ маятника достигается при помощи тонкой, стальной иглы, свободно входящей въ агатовыя гнѣзда. Весьма тонкая, спиральная пружина, обхватывающая иглу, соединяетъ стержень маятника съ короткимъ плечомъ рычага и предохраняетъ иглу отъ выпаденія.

При употребленіи увеличительныхъ приборовъ, надо всегда заботиться о томъ, чтобы соединеніе съ маятникомъ было по возможности легкое, безъ тренія, такъ какъ всякое увеличительное приспособленіе устанавливаетъ *новую связь* маятника съ землей, которая можетъ оказать извѣстное вліяніе на правильность его записи при землетрясеніяхъ.

На концѣ длиннаго рычага прикрѣпляется пишущее перо, которое само можетъ вращаться около горизонтальной оси въ небольшой вилкѣ. Перо это стараются всегда уравновѣсить такъ, чтобы давленіе конца пера на законченную бумагу было минимальное.

Въ недавнее время начали входить въ употребленіе заграницей горизонтальные маятники *системы Mainka.* Въ принципіальномъ отношеніи эти маятники ничего новаго изъ себя не представляютъ, но они обладаютъ

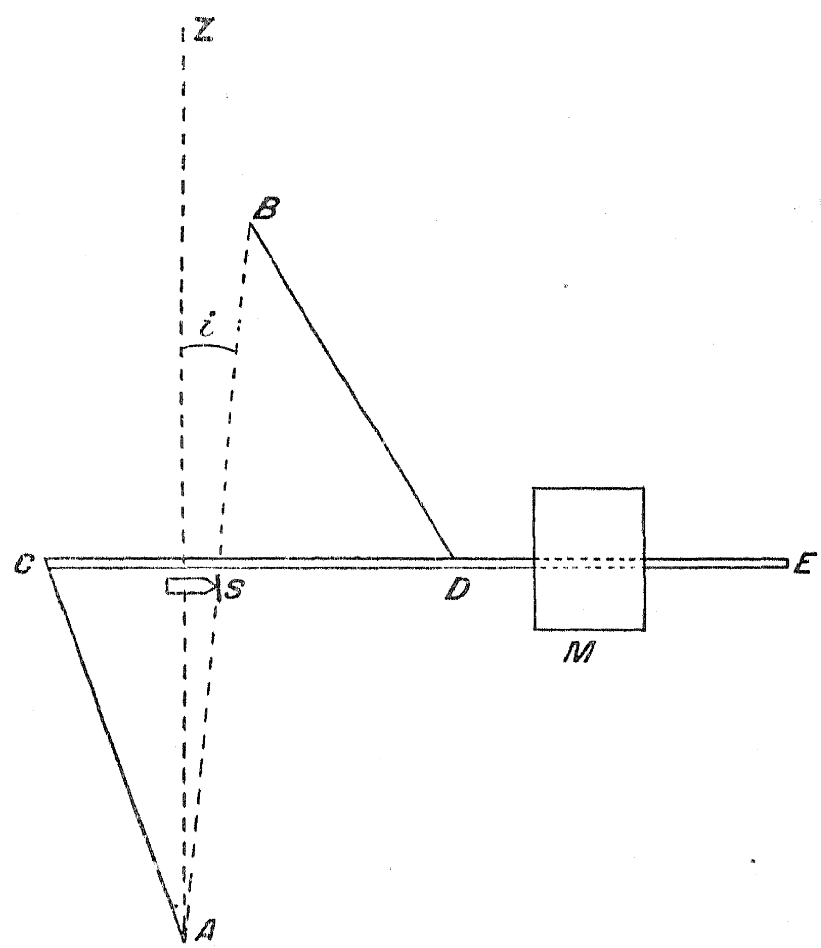
также тѣмъ достоинствомъ, что въ нихъ упорные штифты замѣнены тонкими пружинами, и введено извѣстное затуханіе.

Третій типъ горизонтальныхъ маятниковъ представляютъ собою маятники, подвѣшенные на двухъ проволокахъ, изъ которыхъ одна идетъ кверху, а другая книзу.

Этотъ типъ горизонтальнаго маятника былъ впервые предложенъ Zöllner'омъ.

Схема Zöllner'овскаго подвѣса видна изъ слѣдующаго чертежа 66.

Черт. 66.



Точки A и B неподвижны и неизмѣннымъ образомъ связаны со штативомъ прибора.

Стержень маятника CE, на который насажена тяжелая масса M, поддерживается двумя проволоками BD и AC. Проволока BD какъ-бы поддерживаетъ всю подвижную часть прибора, а проволока AC приводитъ стержень маятника въ болѣе или менѣе горизонтальное положеніе. Очевидно, что бо́льшему натяженію подвержена проволока BD. Линія, соединяющая точки A и B и представляетъ собою дѣйствительную ось вращенія прибора. Эта ось должна быть наклонена подъ небольшимъ угломъ i къ вертикальной линіи AZ.

Благодаря такому способу подвѣшиванія, маятники Zöllner'а обладаютъ чрезвычайной удобоподвижностью, и, такъ какъ треніе въ нихъ сведено до minimum'а, то, при прочихъ равныхъ условіяхъ, они обладаютъ наибольшей чувствительностью.

Маятники Zöllner'а дѣлаются, или тяжелые для механической регистраціи, или же легкіе для оптической регистраціи. Въ послѣднемъ случаѣ слѣдуетъ укрѣплять зеркало на стержнѣ маятника около точки пересѣченія линіи CE съ дѣйствительной осью вращенія прибора AB.

Этотъ типъ маятниковъ, какъ и маятники Боша, въ настоящее время (1911 г.) въ довольно большомъ употребленіи въ Россіи.

Маятники Zöllner'а обладаютъ, однако, однимъ весьма существеннымъ недостаткомъ, дѣлающимъ ихъ почти совершенно безполезными для изслѣдованія *близкихъ* землетрясеній.

А именно, благодаря ихъ значительной удобоподвижности, они могутъ, при землетрясеніяхъ, раскачиваться, не только въ направленіи перпендикулярномъ къ стержню маятника, но также и параллельно самому стержню, т.-е. параллельно линіи CE. Эти продольныя колебанія, налагаясь на первыя, могутъ, конечно, исказить запись прибора.

Однако, можно чрезвычайно легко избавиться отъ этихъ вредныхъ продольныхъ колебаній при помощи слѣдующаго чрезвычайно простого приспособленія.

Около мѣста пересѣченія оси вращенія со стержнемъ маятника придѣлывается небольшая плоская стальная пластинка S; къ штативу-же инструмента прикрѣпляется микрометренный винтъ со стальнымъ наконечникомъ. Наконечникъ этотъ подводится до касанія съ вышеупомянутой пластинкой, а затѣмъ, дальнѣйшимъ поворотомъ винта, смѣщаютъ весь стержень маятника параллельно самому себѣ на небольшую величину, напр. на $\frac{1}{2}$ или $\frac{3}{4}$ миллиметра. Того-же, конечно, можно достигнуть, прикрѣпивъ стальной наконечникъ къ стержню маятника и соединивъ пластинку съ микрометреннымъ винтомъ.

Въ этомъ случаѣ возможность продольныхъ колебаній прибора будетъ совершенно исключена.

Опыты, произведенные съ такой пластинкой, показали, что она вполнѣ достигаетъ своей цѣли, причемъ чувствительность маятника отъ этого почти нисколько не страдаетъ.

Въ маятникахъ Zöllner'а регулируютъ періодъ собственнаго колебанія прибора измѣненіемъ наклона всего штатива, при помощи особыхъ винтовъ у основанія, на которомъ покоится весь приборъ.

При этомъ надо непремѣнно имѣть въ виду слѣдующее обстоятельство.

Если пользоваться вышеупомянутой пластинкой, мѣсто касанія которой съ остріемъ микрометреннаго винта регулируютъ всегда такъ, чтобы оно приходилось на оси вращенія AB, то *нельзя* уже болѣе измѣнять періодъ маятника, измѣняя наклонъ штатива, такъ какъ тогда смѣщеніе пластинки S можетъ оказаться слишкомъ значительнымъ и въ этомъ случаѣ приборъ будетъ уже функціонировать неправильно.

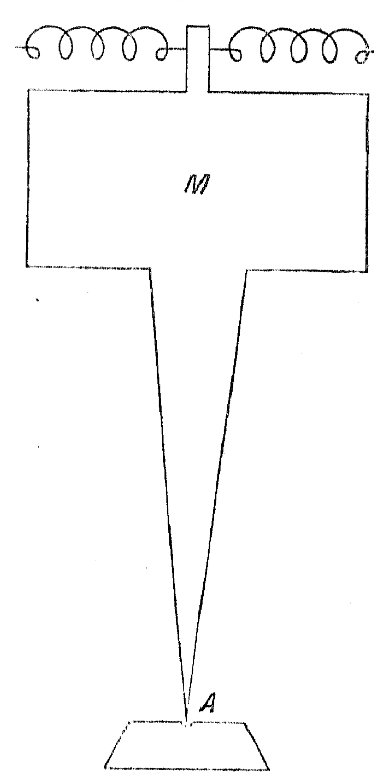
Поэтому надо всегда *сначала*, наклоненіемъ штатива, установить маятникъ на желаемый періодъ, напр., въ 20 или 25 секундъ, затѣмъ по-

ставить пластинку на мѣсто, около точки пересѣченія линій *CE* и *AB*, а потомъ уже вводить упорный штифтъ. Въ этомъ случаѣ введеніе штифта уже чрезвычайно мало вліяетъ на собственный періодъ колебаній маятника.

Такой упорный штифтъ имѣетъ, слѣдовательно, то достоинство, что онъ не даетъ маятнику возможность совершать продольныя колебанія; вмѣстѣ съ тѣмъ такой штифтъ не обладаетъ недостатками упорнаго штифта маятниковъ Боша, такъ какъ въ данномъ случаѣ почти всѣ механическія усилія, развиваемыя въ приборѣ, уравновѣшиваются реакціями нитей и давленіе на упорный штифтъ будетъ самое незначительное.

Однако, наблюденія показали, что для маятниковъ Zöllner'овскаго типа, если они только снабжены сильнымъ затуханіемъ, такой упорный штифтъ, при регистраціи дальнихъ землетрясеній, является совершенно излишнимъ, такъ какъ продольныя колебанія, если они только существуютъ, вовсе не вредятъ записямъ прибора. Поэтому, хотя на Пулковской сейсмической станціи различные маятники съ Zöllner'овскимъ подвѣсомъ и снабжены такими упорными штифтами, но ими при наблюденіяхъ вовсе не пользуются.

Черт. 67.



Третій типъ приборовъ для регистраціи горизонтальныхъ смѣщеній почвы представляетъ собой такъ называемый *астатическій маятникъ Wiechert'а*, представленный въ схематическомъ видѣ на слѣдующемъ чертежѣ 67.

Маятникъ Wiechert'а, по существу своему, есть ничто иное, какъ опрокинутый вертикальный маятникъ.

Тяжелая масса *M*, которая находится сверху, упирается, при помощи особой стойки, на остріе *A*. Въ такомъ положеніи маятникъ находится, очевидно, въ неустойчивомъ положеніи равновѣсія.

Чтобы предохранить его отъ опрокидыванія, къ верхней части прибора придѣланы боковыя пружины, наружные концы которыхъ неизмѣнно связаны съ землей. Такихъ пружинъ двѣ пары; расположены онѣ взаимно перпендикулярно другъ къ другу. Кромѣ того имѣются еще особые упорные штифты, которые вообще предохраняютъ приборъ отъ опрокидыванія.

При расчетѣ дѣйствія этого прибора приходится, конечно, считаться и съ вліяніемъ этихъ упругихъ пружинъ.

Такой маятникъ можетъ, подъ вліяніемъ различныхъ горизонтальныхъ смѣщеній почвы, колебаться во всевозможныхъ азимутахъ; при этомъ упругія свойства пружинъ расчитываются всегда въ соотвѣтствіи съ величиной подвижной массы маятника.

Чтобы получить составляющія движенія почвы по двумъ взаимно перпендикулярнымъ направленіямъ, приходится въ приборѣ Wiechert'а прибѣгать къ *механическому* расчлененію движенія прибора на двѣ составляющія. Слѣдовательно, этотъ типъ прибора страдаетъ тѣмъ-же недостаткомъ, который былъ отмѣченъ раньше, при разсмотрѣніи простого вертикальнаго маятника Vicentini.

Въ виду значительности массы M, нельзя, конечно, упирать ее прямо на остріе A, такъ какъ послѣднее тотчасъ-же ступилось-бы. Вмѣсто острія, Wiechert пользуется двумя системами взаимно перпендикулярныхъ, плоскихъ, стальныхъ пружинъ, на подобіе обыкновеннаго Кардановскаго подвѣса.

Приборы Wiechert'а регистрируютъ механически.

Въ большихъ типахъ этого сейсмографа, при болѣе значительныхъ увеличеніяхъ (около 200), достигаемыхъ при помощи увеличительныхъ рычаговъ, Wiechert доводитъ массу до 1200 килограммъ. Такіе тяжелые маятники довольно чувствительны и работаютъ, повидимому, достаточно удовлетворительно. Они въ большомъ распространеніи въ Германіи.

Существуютъ еще болѣе легкіе типы маятниковъ Wiechert'а, но конструкція ихъ чрезвычайно грубая; работаютъ они не всегда удовлетворительно. Одинъ такой легкій маятникъ Wiechert'а имѣется и на одной русской сейсмической станціи, содержимой на средства Министерства Путей Сообщенія, а именно въ Маритуѣ вблизи Байкальскаго озера.

Вертикальные сейсмографы.

Разсмотрѣвъ главные типы приборовъ, предназначенныхъ для регистраціи горизонтальныхъ смѣщеній почвы, перейдемъ къ приборамъ, дающимъ вертикальную составляющую движенія поверхности земли.

Эти приборы называются *вертикальными сейсмографами*.

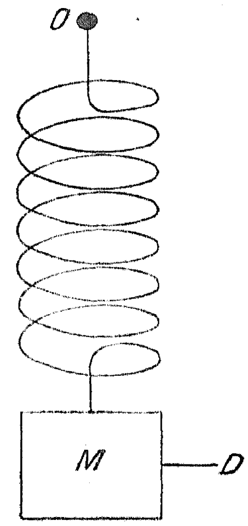
Ихъ нѣсколько типовъ и всѣ они основаны на примѣненіи пружинъ.

Простѣйшій типъ такого вертикальнаго сейсмографа представленъ на черт. 68.

Онъ состоитъ изъ тяжелой массы M, подвѣшенной къ вертикально висящей стальной спиральной пружинѣ, закрѣпленной въ точкѣ O. Гдѣ нибудь сбоку, къ массѣ M, прикрѣпляется пишущій штифтъ D, который мо-

жетъ писать на валѣ регистрирнаго аппарата, ось вращенія котораго поставлена вертикально.

Черт. 68.

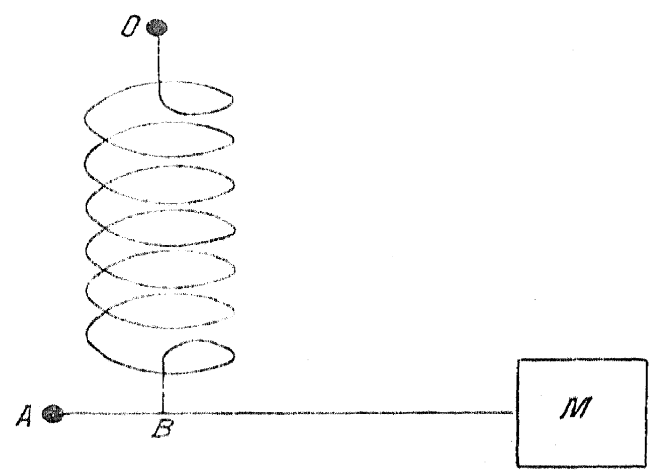


Подъ вліяніемъ вертикальныхъ смѣщеній почвы, грузъ начнетъ перемѣщаться, по отношенію къ штативу прибора, вверхъ и внизъ, и соотвѣтствующая запись на цилиндрѣ дастъ намъ кривую *относительнаго* движенія прибора, съ которой, какъ мы увидимъ дальше, можно уже вывести абсолютныя величины вертикальныхъ смѣщеній почвы (см. главу VIII).

Главный недостатокъ этого прибора заключается въ томъ, что онъ можетъ раскачиваться, подъ вліяніемъ горизонтальныхъ смѣщеній почвы, въ разныя стороны, на подобіе простого вертикальнаго маятника, причемъ штифтъ D будетъ сходить съ регистрирнаго цилиндра. Кромѣ того, *собственный* періодъ колебаній — вверхъ и внизъ — такого пружиннаго сейсмографа будетъ очень короткій, вслѣдствіе чего приборъ этотъ будетъ мало чувствителенъ къ длиннымъ сейсмическимъ волнамъ.

Другой типъ вертикальнаго сейсмографа представленъ на черт. 69.

Черт. 69.



Здѣсь тяжелая масса M прикрѣплена уже къ горизонтальному рычагу, вращающемуся около горизонтальной оси, проходящей черезъ A перпендикулярно къ плоскости чертежа.

Рычагъ этотъ поддерживается въ точкѣ B спиральной пружиной, закрѣпленной наверху въ точкѣ O, связанной неизмѣнно со штативомъ прибора.

Такимъ образомъ, въ этомъ приборѣ моментъ силы тяжести, при равновѣсіи, уравновѣшивается моментомъ натяженія пружины.

Въ этомъ случаѣ тяжелая масса M лишена возможности двигаться въ разныхъ азимутахъ, а можетъ совершать только вертикальныя колебанія вверхъ и внизъ, вращаясь около оси A.

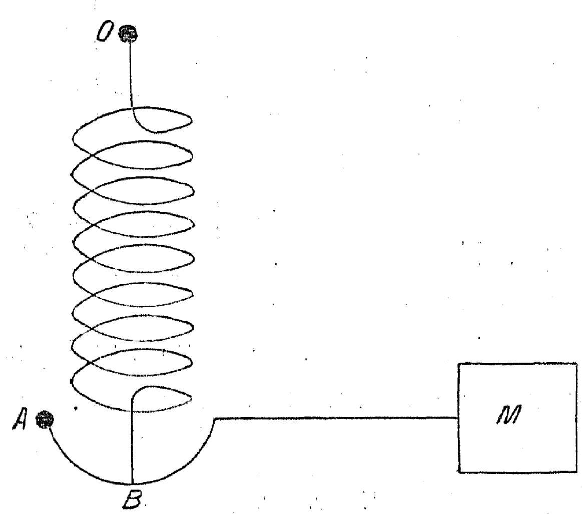
Относительное движеніе этого прибора можно регистрировать или механически, придѣлавъ къ концу горизонтальнаго рычага пишущій штифтъ, или-же оптически, прикрѣпивъ около оси вращенія A небольшое плоское зеркальце.

Собственный періодъ колебаній такого прибора также невеликъ, а потому этотъ инструментъ не обладаетъ вообще той чувствительностью,

которая требуется для изслѣдованія вертикальныхъ смѣщеній почвы при дальнихъ землетрясеніяхъ.

Чтобы удлинить собственный періодъ колебаній такого вертикальнаго сейсмографа и тѣмъ самымъ сдѣлать его болѣе чувствительнымъ, можно прибѣгнуть къ слѣдующему чрезвычайно простому пріему, показанному на слѣдующемъ схематическомъ чертежѣ 70.

Черт. 70.



Для этого надо только перемѣстить нижнюю точку прикрѣпленія пружины B ниже линіи, соединяющей центръ тяжести прибора съ точкой A.

Мѣняя, кромѣ того, горизонтальное разстояніе между точками B и A, можно регулировать собственный періодъ колебаній прибора по желанію и сдѣлать его достаточно длиннымъ для спеціальныхъ сейсмометрическихъ цѣлей (напр. 13—14 сек.). Такое удлиненіе собственнаго періода колебаній называется *астазированіемъ* инструмента.

Теорію этого прибора мы разсмотримъ впослѣдствіи въ главѣ VIII.

Вертикальный тяжелый сейсмографъ Wiechert'а подходитъ ближе къ первому типу этихъ приборовъ, но, такъ какъ въ немъ, для бо̀льшей чувствительности записей, примѣнены увеличительные рычаги и запись производится механически, то Wiechert пользуется опять очень большими массами.

Въ экземплярѣ, стоящемъ на сейсмической станціи въ Göttingen'ѣ, подвижная масса прибора, представляющая собой коробку съ тяжелыми камнями, вѣситъ около 1200 килограммъ. Эта масса подвѣшена на 8 прочныхъ стальныхъ пружинахъ. Астазированіе прибора достигается при помощи особаго, очень остроумнаго, но нѣсколько сложнаго приспособленія, въ подробности устройства котораго мы здѣсь входить не будемъ.

Вертикальные сейсмографы, предназначенные для русскихъ сейсмическихъ станцій, одинъ экземпляръ которыхъ установленъ на Пулковской сейсмической станціи, подходятъ къ третьему типу, представленному на черт. 70.

Вертикальный сейсмографъ Vicentini состоитъ просто изъ прочной, плоской, стальной пружины, закрѣпленной съ одного конца. На другомъ концѣ пружины находится тяжелая масса и пишущій штифтъ (см. рисунокъ 53 на стр. 235).

Собственный періодъ колебаній такого прибора очень короткій, а по-

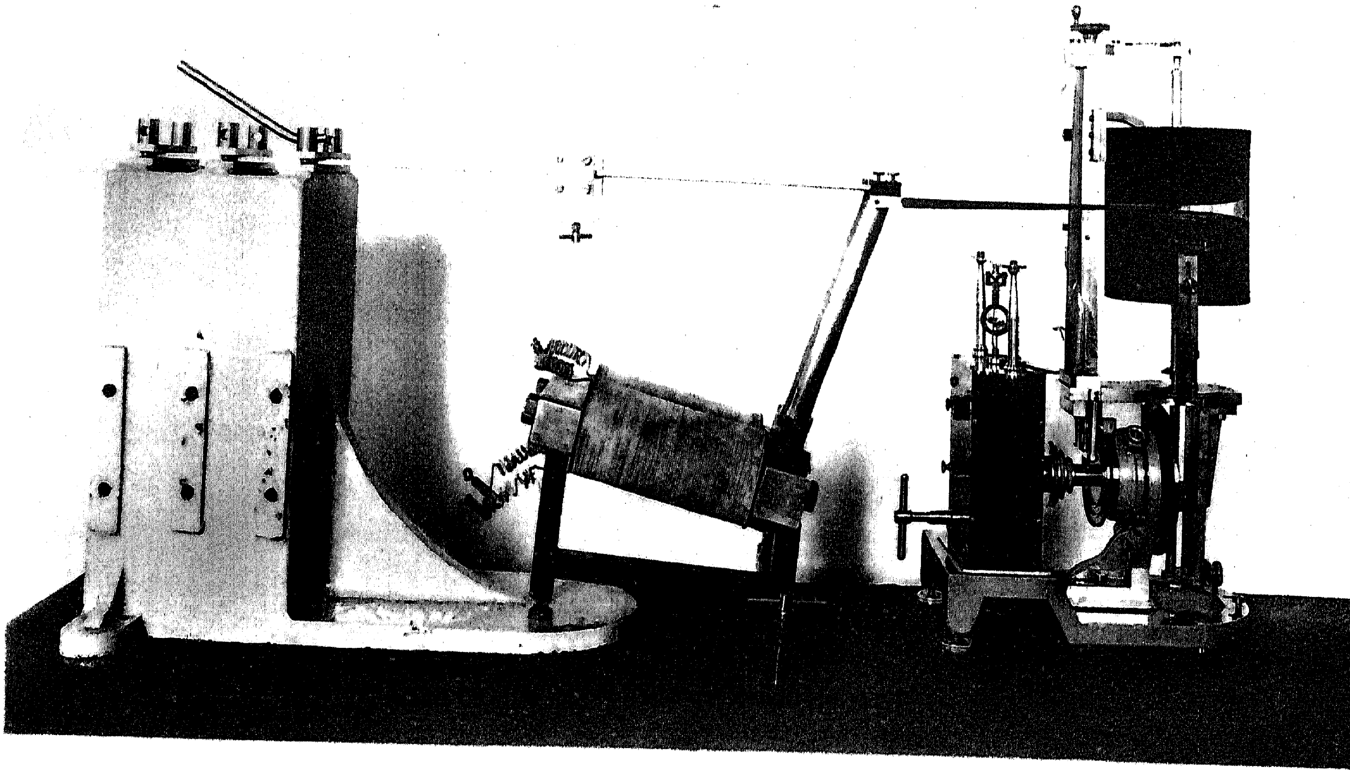
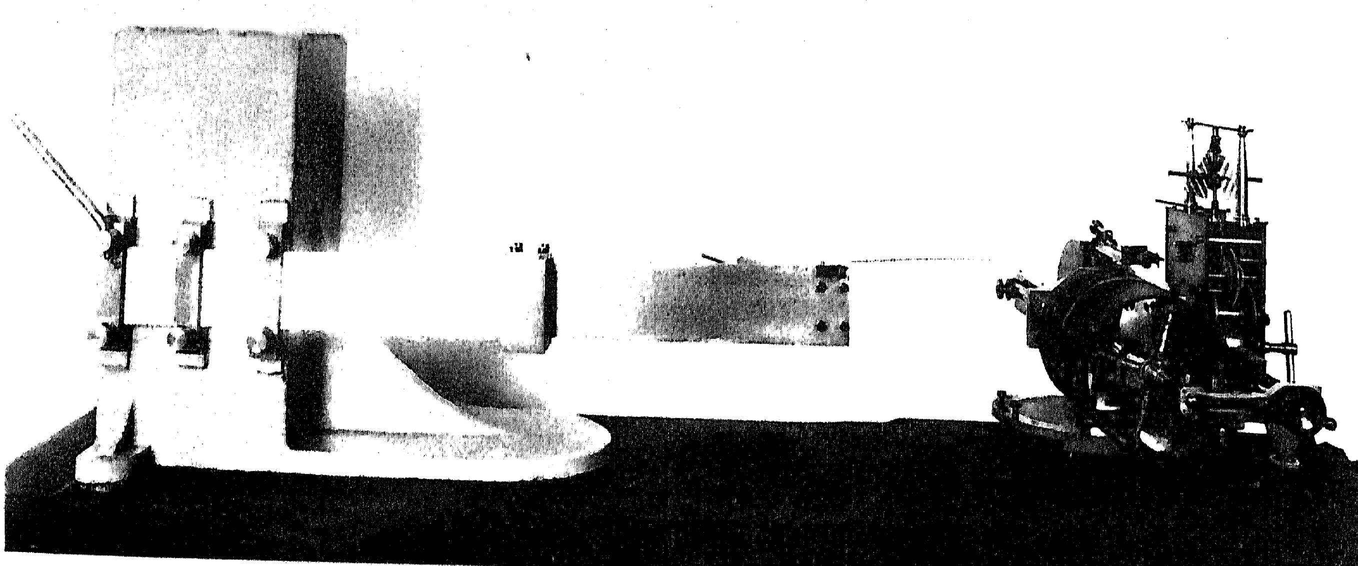


Рис. 72.



тому, для длинныхъ сейсмическихъ волнъ, онъ мало чувствителенъ, но за то для изученія колебаній короткаго періода онъ вполнѣ пригоденъ.

На слѣдующемъ рисункѣ 71 представленъ приборъ, также основанный на примѣненіи плоской стальной пружины, построенный механикомъ Мазингомъ въ механической мастерской физической лабораторіи Академіи Наукъ и служившій для изслѣдованій надъ короткими, ритмическими, вертикальными колебаніями зданій подъ вліяніемъ хода мотора Дизеля.

Пружина прикрѣплена съ одного конца прочными винтами къ массивной чугунной тумбѣ.

На пружину насажена тяжелая масса, которая можетъ перемѣщаться вдоль пружины и закрѣпляться въ любомъ мѣстѣ особымъ зажимнымъ винтомъ.

Этимъ можно регулировать величину періода собственнаго колебанія прибора. Къ наружному концу пружины придѣланъ пишущій штифтъ, чертящій на вертикальномъ вращающемся цилиндрѣ, покрытомъ закопченной бумагой.

Отъ пружины идетъ наклонно книзу латунная трубка, оканчивающаяся мѣдной пластинкой, помѣщенной между полюсами особаго электромагнита.

Назначеніе этой пластинки сообщить прибору нѣкоторое затуханіе. На прилагаемомъ рисункѣ виденъ на регистрирномъ барабанѣ слѣдъ записи собственнаго движенія прибора. Запись эта соотвѣтствуетъ затухающей синусоидѣ.

При желаніи можно, конечно, не вводить затуханіе.

Если мы имѣемъ дѣло съ вполнѣ ритмическими колебаніями почвы или пола, напр., подъ вліяніемъ хода какого-нибудь двигателя, то очень удобно пользоваться настоящимъ приборомъ слѣдующимъ образомъ.

Передвиженіемъ груза вдоль пружины стараются поставить періодъ пружины въ резонансъ съ періодомъ мотора. Тогда отклоненія пишущаго пера на барабанѣ будутъ максимальныя. Зная различныя постоянныя прибора, можно вывести отсюда и абсолютную величину вертикальныхъ смѣщеній почвы. Въ этомъ случаѣ нѣтъ надобности вводить затуханіе.

Благодаря примѣненію принципа резонанса, этотъ чрезвычайно простой и даже грубый приборъ даетъ возможность опредѣлять колебанія почвы, при условіи ихъ полной ритмичности, съ точностью порядка одного микрона.

Когда-же движеніе почвы не вполнѣ ритмично, то цѣлесообразно вводить затуханіе, чтобы уменьшить вліяніе собственнаго движенія прибора на запись.

Если привинтить стальную пружину къ чугунной тумбѣ сбоку, какъ то показано на рисункѣ 72, то такой приборъ можетъ уже служить для изслѣдованій горизонтальныхъ смѣщеній почвы.

Три такихъ прибора, два для горизонтальныхъ и одинъ для вертикальныхъ смѣщеній, могли-бы, вѣроятно, благодаря ихъ малой чувствительности къ болѣе длиннымъ періодамъ, обслуживать съ успѣхомъ сейсмическія станціи, расположенныя въ эпицентральныхъ областяхъ.

На основаніи тѣхъ-же принциповъ можно-бы было построить приборы для изученія колебаній вагоновъ при движеніи поѣзда или колебаній мостовыхъ фермъ при прокатываніи различныхъ грузовъ по мосту и т. п.

Мы разсмотрѣли, такимъ образомъ, *принципы* устройства различныхъ типовъ сейсмографовъ, предназначенныхъ для изслѣдованія горизонтальныхъ и вертикальныхъ *смѣщеній* почвы.

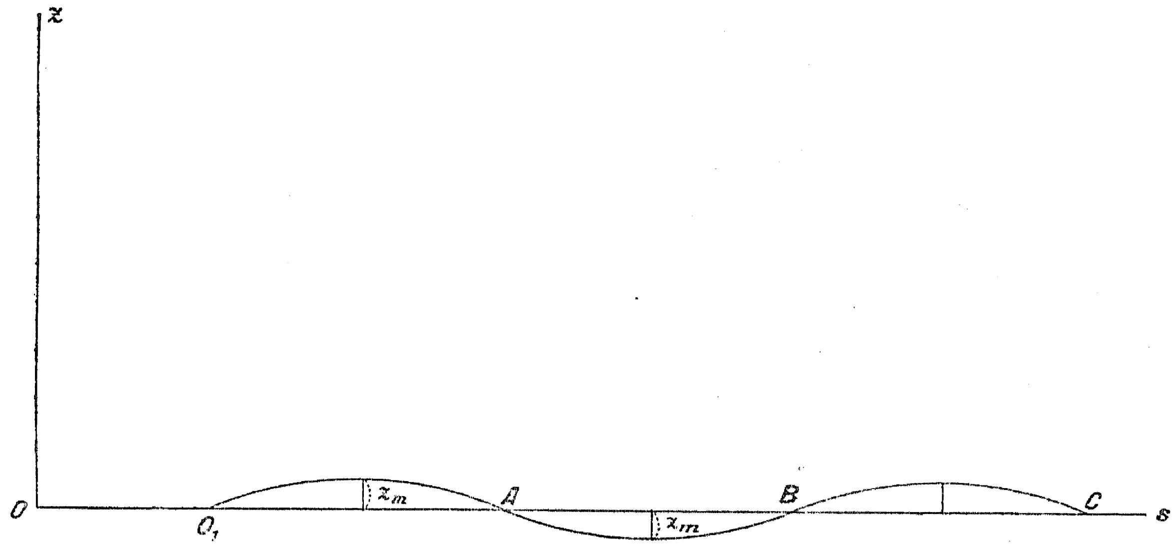
Переходя теперь къ вопросу объ изученіи вращеній, слѣдуетъ, первымъ дѣломъ, указать, что такія наблюденія пока еще нигдѣ не производятся. Въ прежнее время наблюденія надъ наклонами почвы велись Schlüter'омъ въ Göttingen'ѣ при помощи особаго прибора, названнаго имъ *клинографомъ*. Но эти наблюденія были вскорѣ оставлены, потому что выяснилось, что такой клинографъ не даетъ никакихъ указаній о реальномъ существованіи наклоновъ при дальнихъ землетрясеніяхъ. Наблюденія, произведенныя въ Пулковѣ съ особымъ клинографомъ, снабженномъ гальванометрической регистраціей (см. гл. VI), также дали отрицательный результатъ. Однако, такіе наклоны несомнѣнно должны существовать, разъ что доказано, что вдоль поверхности земли распространяются сейсмическія волны, но величина этихъ наклоновъ чрезвычайно мала. Для ихъ изслѣдованія надо имѣть приборы совершенно особой чувствительности. Вопросъ о наклонахъ почвы, во всякомъ случаѣ, очень важный и интересный и оставлять его безъ вниманія никоимъ образомъ нельзя. Какимъ образомъ можно бы было практически осуществить наблюденія надъ наклонами, мы разсмотримъ впослѣдствіи въ главѣ IX, здѣсь-же постараемся только убѣдиться въ томъ, что эти наклоны, при дальнихъ землетрясеніяхъ, дѣйствительно ничтожны.

На слѣдующемъ чертежѣ 73 представлены сейсмическія поверхностныя волны, распространяющіяся вдоль поверхности земли, которую мы на извѣстномъ протяженіи можемъ принять за плоскую. Возьмемъ гдѣ нибудь въ точкѣ O начало координатъ; по оси абсциссъ будемъ откладывать разстоянія s отъ O, а по оси ординатъ соотвѣтствующія вертикальныя смѣщенія почвы z, пріуроченныя всѣ *къ одному и тому-же* моменту t.

Мы получимъ, такимъ образомъ, правильную синусоиду, представляющую собою *одновременное* вертикальное расположеніе точекъ земной поверхности.

Если максимальную амплитуду такой синусоиды мы обозначимъ че-

Черт. 73.



резъ z_m, а длину волны $O_1B = AC$ черезъ λ, то уравненіе этой синусоиды, для опредѣленнаго момента t, представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$z = z_m \sin\left(2\pi \frac{s}{\lambda} + \delta\right),$$

гдѣ δ есть нѣкоторая постоянная величина.

Наибольшая величина наклона ψ_m получится изъ формулы

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{dz}{ds} = \frac{2\pi z_m}{\lambda}\cos\left(2\pi \frac{s}{\lambda} + \delta\right),$$

полагая въ ней

$$\cos\left(2\pi \frac{s}{\lambda} + \delta\right) = 1.$$

Въ виду малости ψ_m, можно положить

$$\psi''_m = \frac{2\pi z_m}{\lambda} \cdot \frac{1}{\sin 1''} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Для вычисленія ψ_m возьмемъ поверхностную сейсмическую волну съ періодомъ T_p въ 20 секундъ.

Тогда

$$\lambda = V.T_p = 3{,}5 \times 20 \text{ кил.} = 70 \text{ кил.} = 7.10^6 \text{ см.}$$

При сильныхъ, отдаленныхъ землетрясеніяхъ z_m рѣдко превышаетъ 1 м/м. Примемъ, такимъ образомъ, $z_m = 0{,}1$ см.

Имѣя еще въ виду, что

$$\sin 1'' = \frac{\pi}{180 \times 60 \times 60} = \frac{1}{206265},$$

будемъ имѣть (съ округленіемъ), на основаніи формулы (13),

$$\psi''_m = \frac{6{,}28 \times 0{,}1}{7.10^6} \cdot 206 \times 10^3 = \frac{1294}{7} \cdot 10^{-4} = 0{,}0185''.$$

Мы видимъ, такимъ образомъ, что наибольшій наклонъ почвы при дальнихъ землетрясеніяхъ достигаетъ, примѣрно, всего только $0{,}02''$. Это чрезвычайно малая величина, которая, тѣмъ не менѣе, какъ мы увидимъ дальше, доступна непосредственнымъ измѣреніямъ.

Для близкихъ землетрясеній, особенно въ эпицентральныхъ областяхъ, наклонъ почвы, при проходѣ поверхностныхъ сейсмическихъ волнъ, можетъ, очевидно, быть гораздо больше, но *точныхъ* измѣреній въ этой области до сихъ поръ почти вовсе не было произведено.

Изслѣдованія надъ вращеніями почвы около вертикальной оси, при помощи соотвѣтствующихъ приборовъ, также до сихъ поръ совсѣмъ не дѣлались. Для отдаленныхъ землетрясеній этого въ сущности и не требуется; такія наблюденія имѣли-бы только смыслъ въ эпицентральной области. Для этой цѣли можно-бы было легко построить соотвѣтствующій приборъ, состоящій, напримѣръ, изъ тяжелаго шара, подвѣшеннаго на вертикальной нити, на подобіе простого вертикальнаго маятника, но оттянутаго книзу еще другой вертикальной нитью, препятствующей шару совершать колебанія при смѣщеніяхъ и наклонахъ почвы. Если къ такому шару придѣлать горизонтальный пишущій штифтъ, могущій чертить по закопченной бумагѣ на регистрирномъ барабанѣ, то, при помощи такого прибора, легко можно бы было обнаружить вращеніе почвы около вертикальной оси.

Мы видѣли раньше, что запись различныхъ сейсмическихъ приборовъ, при колебаніяхъ почвы, слагается всегда изъ двухъ движеній: — во-первыхъ, изъ движенія, обусловливаемаго движеніемъ поверхности земли, и, во-вторыхъ, изъ *собственнаго движенія* прибора. Послѣднее обстоятельство иногда совершенно маскируетъ истинный характеръ движенія почвы и крайне затрудняетъ быстрый разборъ сейсмограммъ.

Въ слѣдующей главѣ мы увидимъ, что теорія указываетъ путь, какимъ образомъ можно уменьшить вредное вліяніе собственнаго движенія прибора. Совершенно его исключить не представляется возможнымъ, но можно сильно его ослабить и во всякомъ случаѣ совершенно *обезвредить*.

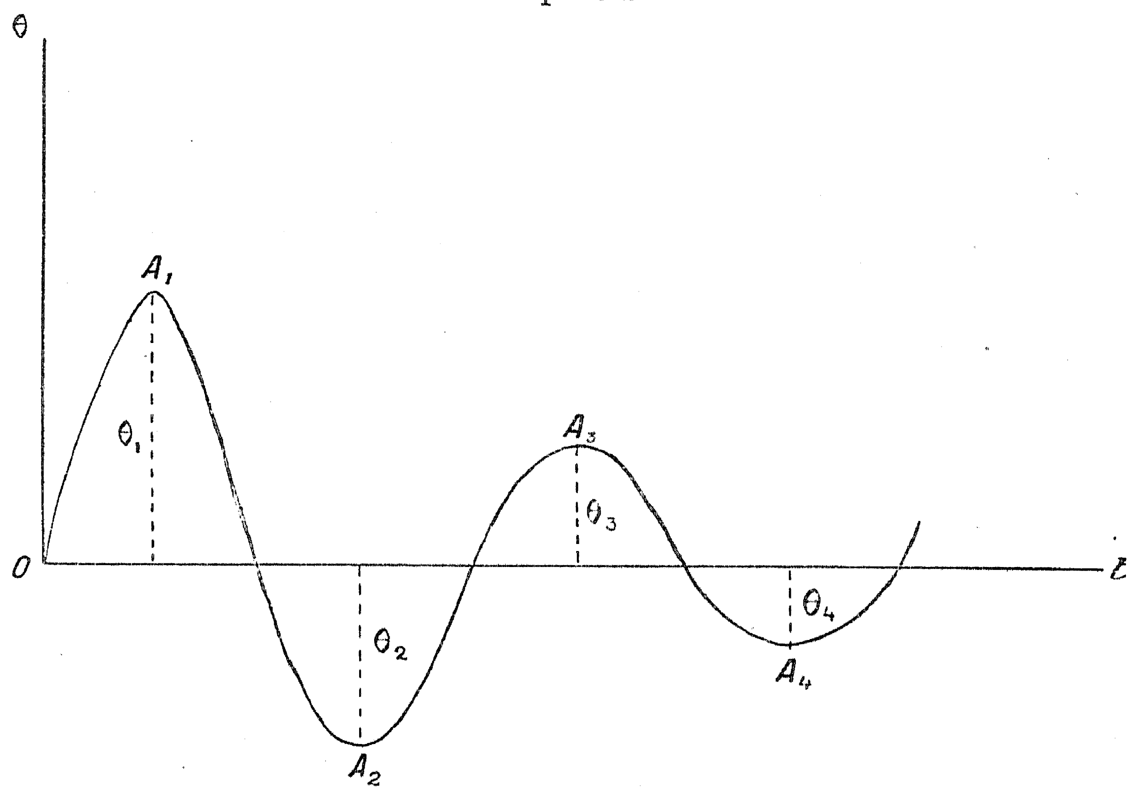
Для этой цѣли надо только снабдить приборъ *затуханіемъ*, т.-е. превратить почти чисто гармоническое собственное движеніе прибора въ движеніе синусоидальное съ постепенно убывающими максимальными амплитудами размаховъ.

Если приборъ встрѣчаетъ извѣстное сопротивленіе своему движенію,

на подобіе тренія, и, если величина этого тренія пропорціональна *первой степени* угловой скорости движенія прибора, то послѣдующія, максимальныя амплитуды размаховъ будутъ уменьшаться въ геометрической прогрессіи, такъ что отношеніе всякихъ двухъ послѣдующихъ максимальныхъ амплитудъ, *независимо отъ знака послѣднихъ*, будетъ всегда величиной постоянной.

Такое затухающее синусоидальное движеніе представлено на слѣдующемъ чертежѣ 74, гдѣ по оси абсциссъ отложены времена t, а по оси ординатъ соотвѣтствующіе углы отклоненія прибора θ отъ его нормальнаго положенія равновѣсія.

Черт. 74.



Обозначивъ максимальныя амплитуды размаховъ прибора, въ послѣдовательномъ порядкѣ ихъ убыванія, черезъ $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ и т. д., будемъ имѣть:

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{\theta_2}{\theta_3} = \frac{\theta_3}{\theta_4} = \ldots . = \text{Const} = v \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Соотвѣтствующая постоянная v называется *коеффиціентомъ затуханія* (въ нѣмецкой терминологіи Dämpfungsverhältnis).

Взявъ Неперовъ и обыкновенный Бригговый логариѳмъ отъ v, получимъ

$$\lambda = \lg v = \lg \frac{\theta_i}{\theta_{i+1}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

и

$$\Lambda = \text{Log}_{10} v = \text{Log}_{10} \frac{\theta_i}{\theta_{i+1}}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

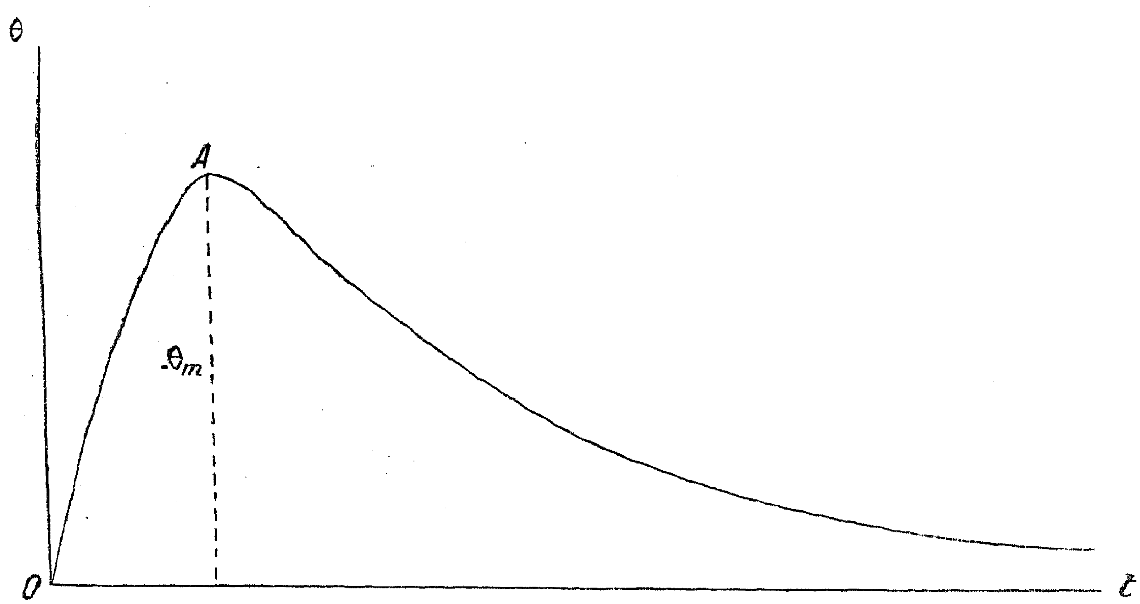
гдѣ i есть нѣкоторый порядковый номеръ. λ называется натуральнымъ, а Λ обыкновеннымъ *логариѳмическимъ декрементомъ*.

Чѣмъ больше логариѳмическій декрементъ, тѣмъ сильнѣе будетъ затуханіе.

Можно усилить затуханіе настолько, что отклоненный отъ своего положенія равновѣсія приборъ, напримѣръ, при сообщеніи ему нѣкотораго начальнаго импульса, дойдетъ до извѣстнаго максимальнаго угла отклоненія θ_m (см. черт. 75), а затѣмъ, при своемъ обратномъ движеніи, *не перейдетъ* уже за ось временъ къ отрицательнымъ значеніямъ θ, а будетъ ассимптотически приближаться къ оси абсциссъ.

Такое движеніе, представленное на чертежѣ 75, называется *апеpіодическимъ*.

Черт. 75.



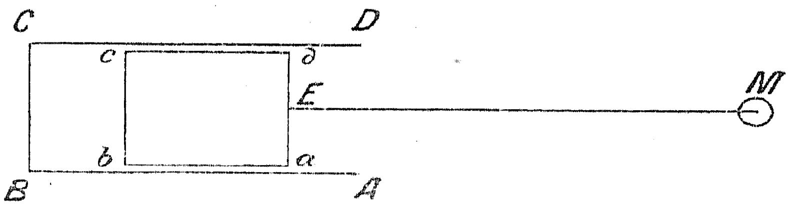
Чтобы исключить, по возможности, вредное вліяніе собственнаго движенія прибора, желательно именно вводить очень сильное затуханіе, доводя послѣднее до апеpіодичности. При этомъ надо, однако, имѣть въ виду, что очень сильное затуханіе, *при прочихъ равныхъ условіяхъ*, уменьшаетъ нѣсколько чувствительность самого прибора, а потому, вводя сильное затуханіе, надо всегда заботиться о томъ, чтобы примѣнить и наиболѣе чувствительный методъ регистраціи. Какъ это на практикѣ осуществить мы вскорѣ увидимъ въ главѣ VI.

Затуханіе сейсмографовъ различныхъ системъ можетъ быть достигнуто разными пріемами.

Воздушное затуханіе, примѣняемое на германскихъ приборахъ, состоитъ большею частью изъ неподвижнаго цилиндра $ABCD$ (см. черт. 76), открытаго, напримѣръ, съ правой стороны, въ которомъ можетъ свободно

перемѣщаться параллельно оси цилиндра внутренній цилиндръ *abcd*, соединенный, посредствомъ штанги *EM*, съ подвижнымъ стержнемъ сейсмографа, напр., со стержнемъ горизонтальнаго маятника (видъ на маятникъ спереди).

Черт. 76.



Между стѣнками обоихъ цилиндровъ остается узкій зазоръ, черезъ который воздухъ можетъ перетекать, при движеніяхъ прибора вправо и влѣво. Треніе воздуха въ этомъ узкомъ зазорѣ и вызываетъ затуханіе.

Недостатки такого затуханія заключаются въ слѣдующемъ.

Если силу тренія въ узкомъ каналѣ, между двумя цилиндрами, и можно считать, при медленныхъ движеніяхъ прибора, пропорціональной первой степени скорости движенія сейсмографа, то сопротивленіе, встрѣчаемое приборомъ при своемъ движеніи, отъ *сопротивленія* воздуха на основанія цилиндра *abcd*, будетъ навѣрное пропорціонально не первой, а высшей, напр. второй, степени скорости. Этимъ нарушается характеръ нормальнаго собственнаго движенія прибора, причемъ наличіе подобныхъ квадратическихъ членовъ скорости приводитъ къ такому дифференціальному уравненію движенія, которое не интегрируется болѣе въ конечномъ видѣ. Въ этомъ случаѣ и коеффиціентъ затуханія, и логариѳмическій декрементъ не будутъ уже болѣе постоянными, а будутъ зависѣть отъ абсолютной величины амплитуды размаха прибора, чѣмъ крайне осложняется обработка сейсмограммъ.

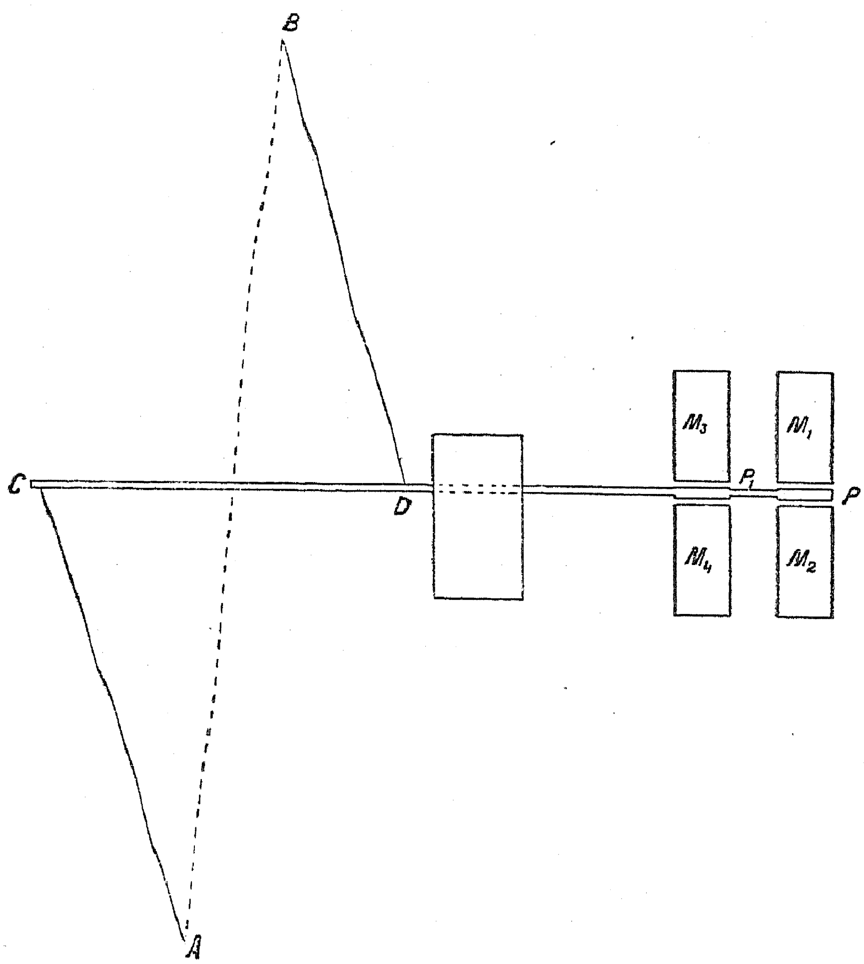
Этотъ недостатокъ устраненъ въ воздушномъ затуханіи, предложенномъ Hecker'омъ. Въ этомъ случаѣ имѣется рядъ параллельныхъ пластинокъ, скрѣпленныхъ со стержнемъ горизонтальнаго маятника, которыя, при движеніяхъ послѣдняго, перемѣщаются *параллельно* другой системѣ неподвижныхъ пластинокъ, расположенныхъ между подвижными; зазоръ между обѣими системами пластинокъ очень маленькій.

Другой недостатокъ воздушнаго затуханія заключается въ томъ, что оно требуетъ очень тщательной регулировки, такъ какъ, при такомъ узкомъ зазорѣ между неподвижными и подвижными частями системы, легко можетъ произойти касаніе этихъ частей, и тогда сейсмографъ уже будетъ работать совершенно неправильно. Кромѣ того и измѣненіе температуры можетъ оказывать довольно существенное вліяніе на величину коеффиціента затуханія.

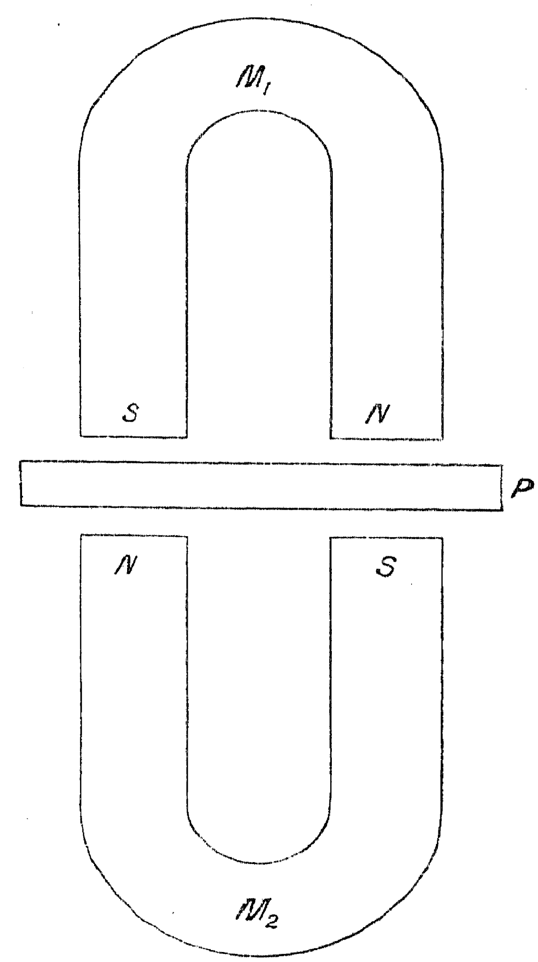
Жидкое затуханіе основано на тѣхъ-же самыхъ принципахъ, что и воздушное. Чтобы оно функціонировало правильно, необходимо, чтобы движеніе подвижныхъ поверхностей, у которыхъ и вызывается реакція отъ

тренія, совершалось не въ направленіи нормали къ поверхности, а въ направленіи перпендикулярномъ къ послѣдней, иначе говоря, чтобы каждая такая поверхность перемѣщалась въ жидкости всегда *параллельно самой себѣ*, такъ какъ въ противномъ случаѣ моментъ силы реакціи жидкости будетъ содержать члены, зависящіе отъ квадрата угловой скорости движенія маятника, что весьма нежелательно. Этотъ методъ затуханія страдаетъ и другимъ вышеупомянутымъ недостаткомъ, присущимъ воздушному затуханію (зависимость отъ температуры).

Черт. 77.



Черт. 78.



Третій методъ затуханія *магнитный* или *электро-магнитный*.

Это затуханіе осуществляется при помощи мѣдной пластинки, прикрѣпленной къ подвижной части сейсмографа, напр., къ стержню горизонтальнаго маятника, какъ то представлено на чертежахъ 77 и 78.

Чертежъ 77 представляетъ видъ прибора сбоку, а чертежъ 78 видъ спереди.

Мѣдная пластинка P можетъ перемѣщаться между полюсами двухъ неподвижныхъ, подковообразныхъ магнитовъ M_1 и M_2, обращенныхъ противоположными полюсами другъ къ другу.

При движеніяхъ пластинки, въ толщѣ послѣдней, индуцируются токи Фуко, которые, на основаніи основныхъ законовъ электромагнитной индукціи, дѣйствуютъ всегда *задерживающимъ образомъ* на движеніе прибора (законъ Ленца), вызывая какъ-бы магнитное треніе. Чѣмъ сильнѣе индуцированные токи, тѣмъ сильнѣе будетъ и это магнитное треніе.

Съ другой стороны, въ силу тѣхъ-же законовъ электромагнитной индукціи (законъ Neumann'а), электродвижущая сила индукціи, а, слѣдовательно, и соотвѣтствующая ей сила тока, прямо пропорціональна *первой степени* скорости перемѣщенія пластинки, иначе говоря, прямо пропорціональна угловой скорости движенія прибора. Такимъ образомъ, при магнитномъ затуханіи, чрезвычайно просто осуществляется требованіе теоріи, а именно, чтобы моментъ задерживающихъ силъ былъ-бы строго пропорціоналенъ угловой скорости движенія сейсмографа. При магнитномъ затуханіи мы имѣемъ дѣло съ вполнѣ опредѣленными заданіями, съ вполнѣ опредѣленнымъ физическимъ явленіемъ, тогда какъ въ воздушномъ и жидкомъ затуханіи приходится считаться съ весьма измѣнчивымъ и недостаточно хорошо еще изученнымъ явленіемъ реакціи воздушной или жидкой средины на движущіяся въ ней поверхности. Въ этомъ отношеніи магнитное затуханіе имѣетъ неоспоримыя и весьма существенныя теоретическія преимущества.

Чтобы усилить дѣйствіе магнитнаго затуханія, надо помѣщать мѣдную пластинку по возможности далеко отъ оси вращенія прибора; этимъ увеличивается моментъ задерживающихъ силъ.

Опытъ показалъ, что, для огромнаго большинства случаевъ, можно пользоваться, для данной цѣли, постоянными магнитами, которые въ настоящее время изготовляются изъ вольфрамовой стали и отличаются большой силой и постоянствомъ. Только въ исключительныхъ случаяхъ, напр., въ ранѣе описанномъ приборѣ для изслѣдованія колебаній зданій, гдѣ собственный періодъ колебаній плоской стальной пластинки очень короткій, приходится уже прибѣгать къ электро-магнитамъ.

Магнитное затуханіе отличается чрезвычайной простотой и можетъ легко быть приспособлено къ любому типу сейсмографа.

Другое, весьма существенное преимущество магнитнаго затуханія заключается въ томъ, что силу затуханія можно чрезвычайно легко измѣнять въ очень широкихъ предѣлахъ простымъ сближеніемъ или раздвиганіемъ полюсовъ постоянныхъ магнитовъ. Сближая достаточно магниты, можно даже, если собственный періодъ колебаній сейсмографа не слишкомъ короткій, сдѣлать приборъ вполнѣ апеbecause періодическимъ, что въ теоретическомъ отношеніи, въ цѣляхъ исключенія вліянія собственнаго движенія прибора, представляетъ громадныя преимущества.

При этомъ надо имѣть въ виду слѣдующее, весьма существенное обстоятельство, а именно, что, даже при наличіи весьма сильнаго затуханія, между поверхностями мѣдной пластинки и ближайшими полюсами постоянныхъ магнитовъ, остается обыкновенно довольно широкій, свободный просвѣтъ, такъ что не можетъ уже быть никакихъ опасеній о томъ, что пластинка, при своихъ движеніяхъ, можетъ коснуться полюсовъ магнитовъ. Магнитное затуханіе, кромѣ того, совершенно открыто, такъ что всегда легко удостовѣриться въ томъ, что все находится въ исправности, чего никоимъ образомъ нельзя сказать про другіе способы затуханія.

Кромѣ того, измѣненіе температуры, если оно только происходитъ не въ слишкомъ широкихъ предѣлахъ, оказываетъ совершенно ничтожное вліяніе на силу магнитнаго затуханія.

Всѣ выгоды магнитнаго затуханія, въ томъ числѣ простота и легкій уходъ за приборами, давно уже подтвердились на наблюденіяхъ Пулковской сейсмической станціи, а потому наша Сейсмическая Комиссія и постановила снабдить всѣ новые сейсмографы на русскихъ сейсмическихъ станціяхъ 1-го и 2-го разряда магнитнымъ затуханіемъ.

Разсмотримъ теперь вкратцѣ различные методы регистраціи.

Для этой цѣли возьмемъ, какъ прототипъ сейсмографа, горизонтальный маятникъ.

Механическая регистрація.

Для осуществленія механической регистраціи, къ концу стержня маятника прикрѣпляется легкій штифтъ, который записываетъ относительное движеніе маятника на регистрирномъ валѣ, обтянутомъ глянцевитой, закопченной бумагой.

Для увеличенія чувствительности записи, можно воспользоваться увеличительнымъ приборомъ, какъ то было раньше пояснено на примѣрѣ тяжелаго горизонтальнаго маятника.

Механическій способъ регистраціи отличается своей дешевизной, а потому его можно и слѣдуетъ примѣнять на сейсмическихъ станціяхъ 2-го разряда, для которыхъ важно, не столько абсолютная точность въ выводѣ элементовъ движенія почвы, сколько число отдѣльныхъ наблюденій, опредѣляющихъ собой общій характеръ движенія почвы въ той или иной сейсмической области.

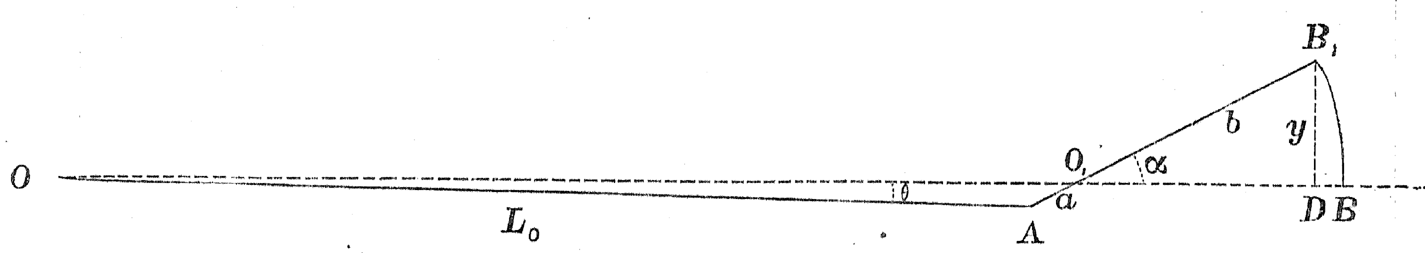
Главный недостатокъ механической регистраціи заключается въ томъ, что она вводитъ въ наблюденія очень непостоянный и плохо изученный элементъ, какъ треніе пера о закопченную бумагу. Вліяніе этого тренія становится особенно ощутительнымъ, если пользоваться еще увеличительнымъ

приборомъ. Въ этомъ случаѣ, для уменьшенія вреднаго вліянія тренія, приходится, какъ мы раньше видѣли, прибѣгать къ очень тяжелымъ массамъ. Но и при большихъ массахъ треніе всетаки сказывается и требуетъ введенія въ основное дифференціальное уравненіе движенія прибора нѣкоторыхъ поправочныхъ членовъ.

При механической регистраціи, какъ коеффиціентъ затуханія, такъ и соотвѣтствующій логариѳмическій декрементъ, не суть болѣе величины постоянныя, а они измѣняются нѣсколько въ зависимости отъ величины амплитуды размаховъ прибора, что крайне затрудняетъ обработку сейсмограммъ. Какъ учесть всѣ эти побочныя обстоятельства и какимъ образомъ возможно изъ записей такого прибора вывести абсолютные элементы движенія почвы, мы разсмотримъ впослѣдствіи въ главѣ XII, посвященной спеціально теоріи механическаго способа регистраціи.

Кромѣ вышеуказаннаго весьма существеннаго недостатка, механическій способъ регистраціи, при наличіи увеличительнаго прибора, представляетъ собою еще слѣдующее неудобство.

Черт. 79.



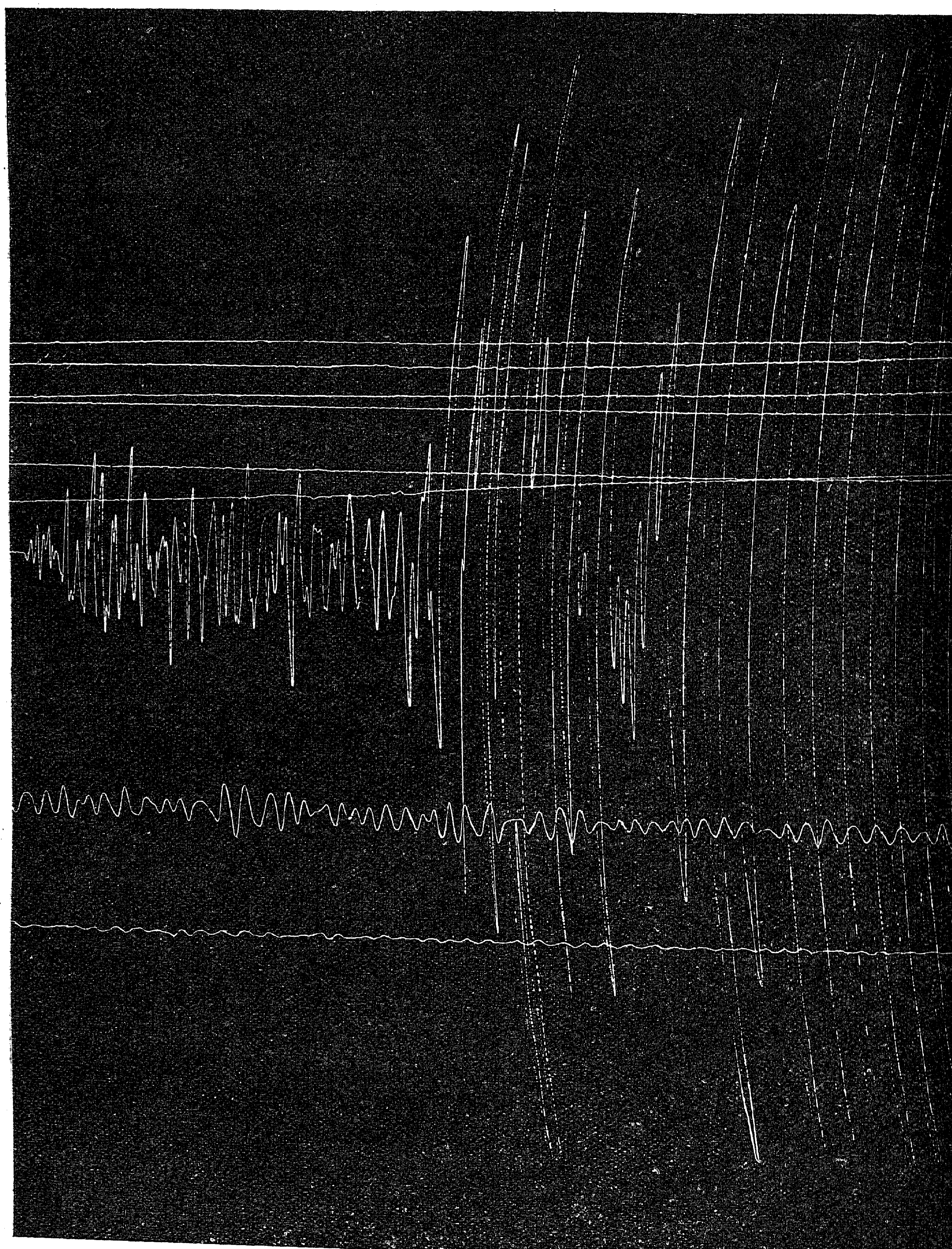
Пусть на слѣдующемъ чертежѣ 79 O представляетъ собою ось вращенія горизонтальнаго маятника, A конецъ стержня маятника, AB_1 увеличительный приборъ, а именно неравноплечный рычагъ, имѣющій свою ось вращенія въ O_1.

Длину короткаго плеча AO_1 обозначимъ черезъ a, длиннаго O_1B черезъ b, а длину стержня маятника OA черезъ L_0.

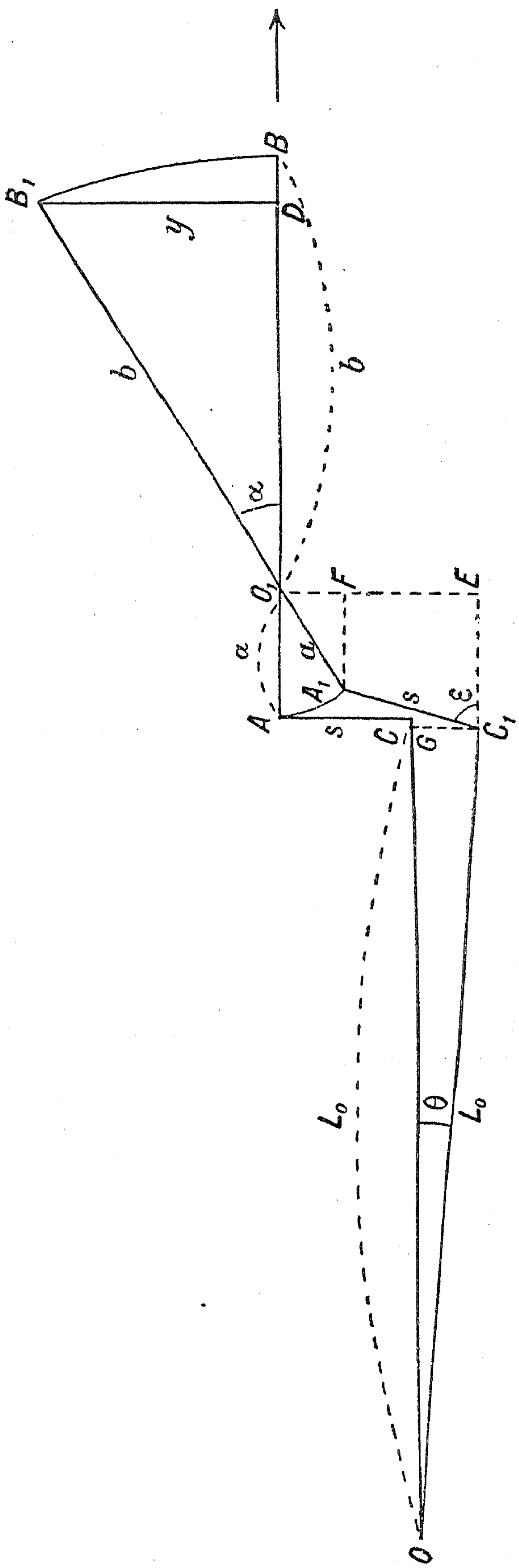
Пусть маятникъ отклоненъ отъ своего положенія равновѣсія на уголъ θ.

Тогда увеличительный приборъ повернется *въ противоположную сторону* на уголъ α, а удаленіе пишущаго штифта у конца длиннаго рычага B отъ оси временъ будетъ равно B_1D. Обозначимъ эту величину черезъ y. Это та величина, которая непосредственно снимается съ сейсмограммы. Бумага подъ пишущимъ штифтомъ перемѣщается вправо, въ направленіи показанномъ стрѣлкой. Пусть скорость вращенія барабана такова, что длина одной секунды на поверхности регистрирнаго вала соотвѣтствуетъ λ миллиметрамъ. λ есть всегда очень малая величина, напр. $^1/_2$ миллиметра.

Черт. 80.



Если-бы не было увеличительнаго прибора и пишущее перо было прикрѣплено въ A, непосредственно къ концу стержня маятника, то, при значительной величинѣ L_0 и при малыхъ углахъ θ, точка A перемѣщалась-бы почти перпендикулярно къ оси временъ. При увеличительномъ-же рычагѣ, благодаря сравнительной малости b, пишущій штифтъ B будетъ перемѣщаться (при малыхъ величинахъ λ), приблизительно, по дугѣ круга и вся сейсмограмма представится въ нѣсколько искаженномъ видѣ, что, при значительныхъ амплитудахъ размаховъ, становится весьма ощутительнымъ и требуетъ введенія добавочной поправки на время.



Черт. 81.

Общій видъ такой *искаженной* сейсмограммы представленъ на предыдущемъ чертежѣ 80. Запись эта была получена съ астатическимъ маятникомъ Wiechert'а.

Разсмотримъ теперь какое вліяніе имѣетъ круговое движеніе конца пишущаго штифта B на запись прибора.

Возьмемъ тотъ увеличительный приборъ, который былъ раньше описанъ при тяжеломъ горизонтальномъ маятникѣ.

На слѣдующемъ черт. 81 $OC = L_0$ представляетъ собою стержень горизонтальнаго маятника, O — ось вращенія маятника, O_1 — ось вращенія увеличительнаго прибора, $AO_1 = a$ — короткое его плечо, $O_1B = b$ — длинное плечо, а $AC = s$ соединительная игла.

При повоpотѣ маятника на малый уголъ θ, увеличительный рычагъ повернется на уголъ α, причемъ точка C перейдетъ въ C_1, A въ A_1, а B въ B_1; кромѣ того

$$O C_1 = O C = L_0$$

$$O_1 A_1 = O_1 A = a$$

$$O_1 B_1 = O_1 B = b$$

$$A_1 C_1 = A C = s,$$

а уголъ $A_1 C_1 E = \varepsilon$.

Найдемъ зависимость между ординатой $y = B_1 D$ и угломъ поворота маятника θ.

Изъ чертежа 81 имѣемъ

$$O_1 F + F E = A C + G C_1$$

или

$$a \sin \alpha + s \sin \varepsilon = s + L_0 \sin \theta.$$

Съ другой стороны,

$$O_1 A = C_1 E - C G$$

или

$$a = a \cos \alpha + s \cos \varepsilon - L_0 (1 - \cos \theta).$$

Такъ какъ θ очень малая величина, то мы можемъ пренебречь ея высшими степенями.

Положивши еще

$$\varepsilon = 90 - \beta,$$

будемъ имѣть

и

$$\left.\begin{aligned} a \sin \alpha + s \cos \beta &= s + L_0 \theta \\ a \cos \alpha + s \sin \beta &= a \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Если α мало, то и β также мало.

Разлагая $\cos \alpha$ по степенямъ α въ рядъ, будемъ имѣть

$$a \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) + s \sin \beta = a$$

или

$$\sin \beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{s} \alpha^2,$$

или, съ точностью до членовъ высшаго порядка,

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{s} \alpha^2.$$

Такимъ образомъ, $\cos\beta$ можно положить равнымъ 1.

Тогда первая изъ формулъ (17) дастъ намъ

$$a \sin\alpha = L_0 \theta.$$

Съ другой стороны,

$$b \sin\alpha = y; \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (18)$$

слѣдовательно,

$$y = \frac{b}{a} L_0 \theta \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (19)$$

Мы видимъ, такимъ образомъ, что ордината кривой на сейсмограммѣ оказывается, дѣйствительно, пропорціональной углу поворота маятника θ и не требуетъ никакой поправки, но соотвѣтствующій моментъ t', снятый съ сейсмограммы и соотвѣтствующій точкѣ D или абсциссѣ точки B_1, будетъ слишкомъ великъ и требуетъ присоединенія отрицательной поправки $\Delta t'$ для полученія истиннаго момента t:

$$t = t' - \Delta t' \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (20)$$

Величина этой поправки обусловливается длиной отрѣзка BD:

$$\Delta t' = \frac{BD}{\lambda}.$$

Но

$$BD = b(1 - \cos\alpha) = \frac{1}{2} b\alpha^2.$$

Изъ формумы (18) имѣемъ, съ точностью до членовъ высшаго порядка,

$$\alpha^2 = \frac{y^2}{b^2};$$

слѣдовательно,

$$\Delta t' = \frac{1}{2} \frac{y^2}{b\lambda} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (21)$$

При болѣе значительныхъ амплитудахъ размаховъ прибора эту поправку необходимо принимать во вниманіе.

Вмѣсто того, чтобы регистрировать штифтомъ на закопченной бумагѣ, можно регистрировать особыми чернилами и перомъ на бѣлой, глянцевитой бумагѣ, но для этого, требуются совершенно особыя перья.

Такой способъ регистраціи примѣняется Zeissig'омъ для регистраціи движенія тяжелаго астатическаго маятника Wiechert'а на сейсмической станціи въ Jugenheim'ѣ около Darmstadt'а.

Перо представляетъ собою у своего конца узкую капиллярную трубку, у конца которой образуется капля чернилъ, устанавливающая связь между концомъ пера и бумагой. Такимъ образомъ, перо не касается непосредственно самой бумаги, но, при движенiи прибора, жидкость какъ-бы вытягивается изъ капилляра. Этотъ способъ регистрацiи очень удобный, хотя тренiе, повидимому, ничуть не меньше, чѣмъ при черченiи по закопченной бумагѣ. Запись получается очень чистая и отчетливая, причемъ здѣсь не требуется больше предварительнаго зачерненiя бумаги и послѣдующаго фиксажа записи. Но главное достоинство этого прiема заключается въ томъ, что можно регистрировать движенiе прибора на непрерывной, постепенно сматывающейся, узкой бумажной лентѣ, которая сматывается съ одного ролика и наматывается на другой, на подобiе телеграфной ленты прибора Морзе. При этомъ здѣсь не можетъ быть того случая, какъ при обыкновенныхъ регистрирныхъ приборахъ съ вращающимся валомъ, что, при длительныхъ землетрясенiяхъ, одна запись налагается частью на другую. Здѣсь всякая запись получается раздѣльно на длинной лентѣ, изъ которой можно вырѣзать затѣмъ ту часть, которая соотвѣтствуетъ тому или иному сейсмическому явленiю и представляетъ интересъ.

Препятствiемъ къ широкому распространенiю этого способа регистрацiи служитъ чрезвычайная трудность изготовленiя подходящихъ перьевъ. Чтобы перо правильно функцiонировало и не было бы перерывовъ въ кривой, надо чрезвычайно тщательно отшлифовать его конецъ. Проф. Zeissig самъ иногда нѣсколько дней подрядъ шлифуетъ одно такое перо; бываютъ случаи, когда приходится испортить нѣсколько перьевъ, прежде чѣмъ получить одно годное. Въ настоящее время такiя перья изготовляются механикомъ Karl Sting при политехникумѣ въ Darmstadt'ѣ.

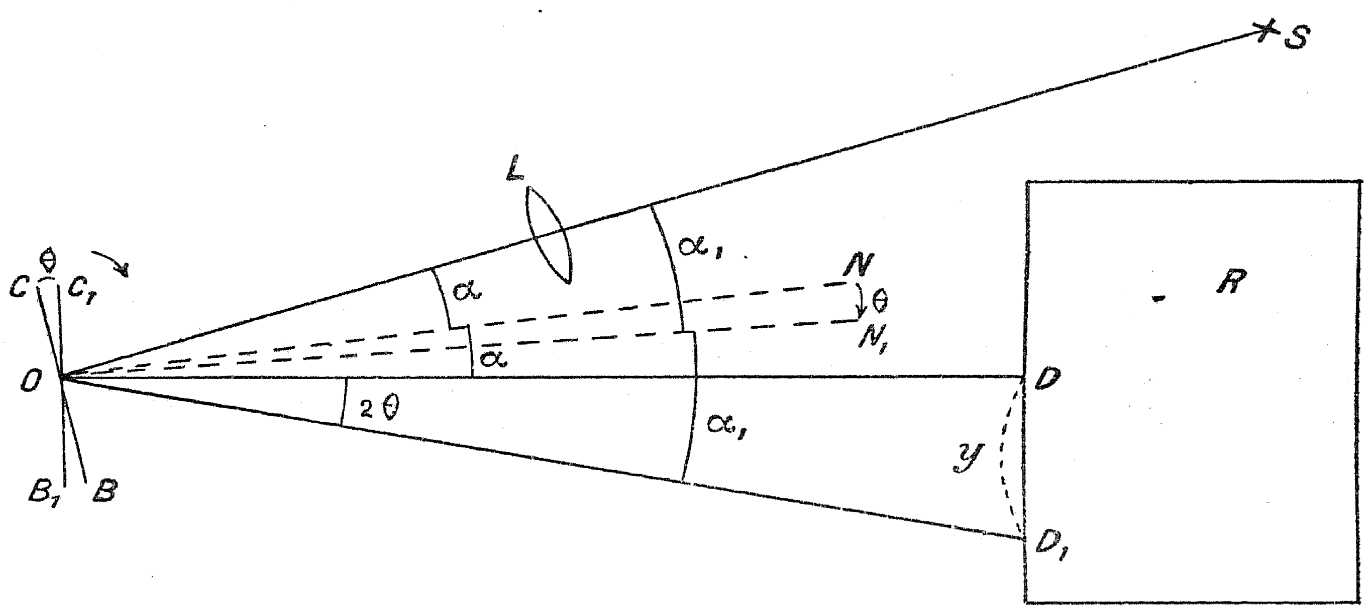
Оптическая регистрацiя.

Оптическiй способъ регистрацiи представляетъ громадное преимущество передъ механическимъ въ томъ отношенiи, что онъ не вводитъ самъ по себѣ никакого добавочнаго тренiя, такъ какъ рычагомъ, записывающимъ движенiе прибора, является уже свѣтовой лучъ. Кромѣ того, движенiе свѣтовой точки на барабанѣ происходитъ почти строго *перпендикулярно къ оси временъ*, а потому сейсмограммы, даже при значительныхъ амплитудахъ размаховъ прибора, не представляются болѣе въ искаженномъ видѣ, какъ при механической регистрацiи съ увеличительнымъ приборомъ. При очень большихъ размахахъ, слѣдовало бы, всетаки, вводить небольшую поправку на поступательное движенiе регистрирнаго вала параллельно его оси, но это уже несущественная деталь.

Способъ этотъ требуетъ, однако, примѣненія свѣточувствительной, фотографической бумаги, а потому этотъ методъ регистраціи, при значительныхъ скоростяхъ вращенія вала, сравнительно дорогой, и можетъ, вообще говоря, примѣняться только на сейсмическихъ станціяхъ перваго разряда.

На слѣдующемъ чертежѣ 82 S представляетъ собою свѣтящуюся точку, для которой лучше всего взять ярко освѣщенную, узкую вертикальную щель.

Черт. 82.



Свѣтовой пучекъ падаетъ на плоское зеркальце BC, прикрѣпленное вблизи оси вращенія прибора. ON есть направленіе нормали къ зеркалу. Послѣ отраженія лучъ пойдетъ по OD и упадетъ на регистрирный валъ R въ точкѣ D, причемъ

$$< SON = < NOD = \alpha.$$

Надо поставить зеркальце и регистрирный приборъ такъ, чтобы лучъ OD, соотвѣтствующій положенію равновѣсія сейсмографа, падалъ-бы нормально на поверхность регистрирнаго цилиндра.

Предположимъ теперь, что сейсмографъ, вмѣстѣ съ зеркальцемъ, повернулся на малый уголъ θ въ направленіи движенія часовой стрѣлки.

Тогда BC перейдетъ въ B_1C_1, ON въ ON_1 и уголъ паденія будетъ уже

$$\alpha_1 = \alpha + \theta.$$

Уголъ отраженія будетъ также α_1 и свѣтовая точка перейдетъ изъ D въ D_1, причемъ уголъ

$$DOD_1 = \alpha_1 - (\alpha - \theta) = 2\theta.$$

Обозначивъ амплитуду размаха свѣтовой точки на барабанѣ черезъ y, а разстояніе точки D до середины зеркала черезъ A, будемъ имѣть

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{y}{A} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

При малыхъ углахъ θ, можно положить

$$\theta = \frac{y}{2A}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

при большихъ-же амплитудахъ размаховъ, надо, для опредѣленія θ, присоединить къ y небольшую поправку, которую мы выведемъ впослѣдствіи (см. § 2 главы VI).

Чечевица L служитъ для концентрированія изображенія вертикальной щели на поверхности барабана.

Другая длинная, цилиндрическая, горизонтально стоящая чечевица, съ очень короткимъ фокуснымъ разстояніемъ, ставится передъ самымъ барабаномъ и собираетъ всѣ лучи въ одну свѣтовую точку D. Чтобы получить, по возможности, рѣзко очерченную свѣтовую точку, полезно нѣсколько діафрагмировать чечевицы.

Чечевица L берется съ такимъ фокуснымъ разстояніемъ, чтобы ее можно было-бы поставить *между зеркаломъ и свѣтящейся щелью* S. Въ этомъ только случаѣ формула (22) имѣетъ мѣсто. Если-бы L стояло между зеркаломъ и барабаномъ, то пришлось-бы уже считаться съ разстояніемъ оптическаго центра чечевицы до регистрирнаго аппарата.

Практически можно брать A равнымъ 4 метрамъ. При бо̀льшихъ разстояніяхъ, свѣтовая точка получается, вообще говоря, слишкомъ слабой и не достаточно отчетливой.

Принимая предѣльную точность въ измѣреніи y въ 0,1 $^м/_м$, и $A = 4000$ $^м/_м$, мы получимъ, для предѣльной точности измѣренія угла θ,

$$\theta'' = \frac{0{,}1}{8000} \cdot \frac{1}{\sin 1''} = \frac{20600}{8000} = \text{около } 2^1/_2{}''.$$

Когда требуется значительно увеличить чувствительность прибора, то слѣдуетъ примѣнять уже такъ называемую *гальванометрическую регистрацію*.

Гальванометрическая регистрація.

Теорію этого способа регистраціи мы разсмотримъ подробно потомъ (см. главу VI), теперь-же укажемъ только, въ самыхъ общихъ чертахъ, въ чемъ этотъ способъ заключается.

Для этой цѣли къ стержню горизонтальнаго маятника прикрѣпляютъ 4 плоскія индукціонныя катушки изъ тонкой изолированной проволоки, которыя заключаютъ въ одну общую раму или оправу P_1 (см. предыдущій черт. 77).

Эту раму помѣщаютъ между полюсами двухъ постоянныхъ магнитовъ M_3 и M_4, обращенныхъ разноименными полюсами другъ къ другу. Такимъ образомъ, при движеніяхъ маятника, катушки будутъ перемѣщаться въ магнитномъ полѣ, и, слѣдовательно, въ нихъ будутъ индуцироваться электрическіе токи, сила которыхъ будетъ пропорціональна *угловой скорости* движенія маятника. Отъ крайнихъ наружныхъ катушекъ идутъ, вдоль стержня маятника, двѣ проволоки къ двумъ зажимамъ, находящимся около оси вращенія маятника. Соединеніе этихъ зажимовъ съ двумя неподвижными зажимами, прикрѣпленными къ штативу прибора, достигается при помощи двухъ тонкихъ, серебрянныхъ листочковъ, нисколько не нарушающихъ правильность собственнаго движенія маятника. Отсюда провода идутъ уже къ высоко-чувствительному гальванометру съ подвѣсной катушкой системы Deprez—D'Arsonval'а. Индукціонныя катушки соединяются между собою такъ, чтобы всѣ 4 индукціонныхъ тока взаимно усиливались-бы въ наружной цѣпи, идущей къ гальванометру.

Такимъ образомъ, при движеніяхъ маятника, индукціонные токи приведутъ въ движеніе гальванометръ, а, такъ какъ такіе гальванометры съ подвѣсной катушкой въ состояніи отмѣчать самые слабые токи, то, благодаря такой гальванометрической передачѣ, регистрація движенія прибора будетъ обладать высокой степенью чувствительности.

При этомъ методѣ регистраціи, регистрируется непосредственно не движеніе самого маятника, а вызванное имъ движеніе гальванометра, т.-е. величины, зависящія непосредственно отъ *скорости* движенія маятника. Для гармоническихъ колебаній, очевидно, совершенно безразлично, будемъ-ли мы непосредственно регистрировать углы отклоненія прибора или соотвѣтствующія угловыя скорости. Для регистраціи движенія гальванометра примѣняется только что описанный способъ прямой оптической регистраціи на свѣточувствительной бумагѣ, для каковой цѣли къ подвижной катушкѣ гальванометра прикрѣпляется небольшое плоское зеркальце.

Для брадисейсмическихъ явленій такой способъ регистраціи, очевидно, не примѣнимъ; но, для изученія сейсмическихъ явленій во время дальнихъ землетрясеній или микросейсмическихъ колебаній, способъ этотъ, благодаря его громадной чувствительности, представляется чрезвычайно цѣлесообразнымъ и удобнымъ. Многолѣтнія наблюденія, произведенныя на Пулковской сейсмической станціи, вполнѣ подтвердили различныя преимущества этого способа регистраціи.

Преимущества эти заключаются въ большой его простотѣ, причемъ, при посредствѣ самыхъ несложныхъ пріемовъ, можно достигнуть громадныхъ увеличеній, не прибѣгая вовсе къ содѣйствію разныхъ увеличительныхъ рычаговъ, представляющихъ много различныхъ неудобствъ. Чувствительность сейсмографа можно, при этомъ, легко регулировать въ широкихъ предѣлахъ, сближая и раздвигая магниты при индукціонныхъ катушкахъ.

Кромѣ того, благодаря примѣненію чувствительнаго гальванометра, можно уже ставить регистрирный валъ въ сравнительно близкомъ разстояніи отъ зеркальца гальванометра, напр., въ разстояніи 1 метра, благодаря чему получаются очень отчетливыя и ясныя записи.

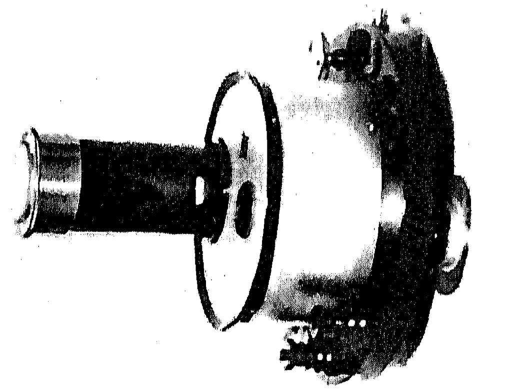
Далѣе этотъ способъ допускаетъ *регистрацію на разстояніи*. Можно, дѣйствительно, совершенно изолировать регистрирную часть отъ самихъ сейсмографовъ, напр., поставить гальванометры въ совершенно другомъ зданіи, въ сухомъ и удобномъ помѣщеніи. Въ этомъ случаѣ, при смѣнѣ бумаги, вовсе не приходится входить въ то помѣщеніе, гдѣ стоятъ сейсмографы, что чрезвычайно желательно, такъ какъ всякій приходъ наблюдателя неизбѣжнымъ образомъ вызываетъ извѣстное возмущеніе чувствительныхъ приборовъ, которые, и послѣ ухода наблюдателя, не сразу успокаиваются.

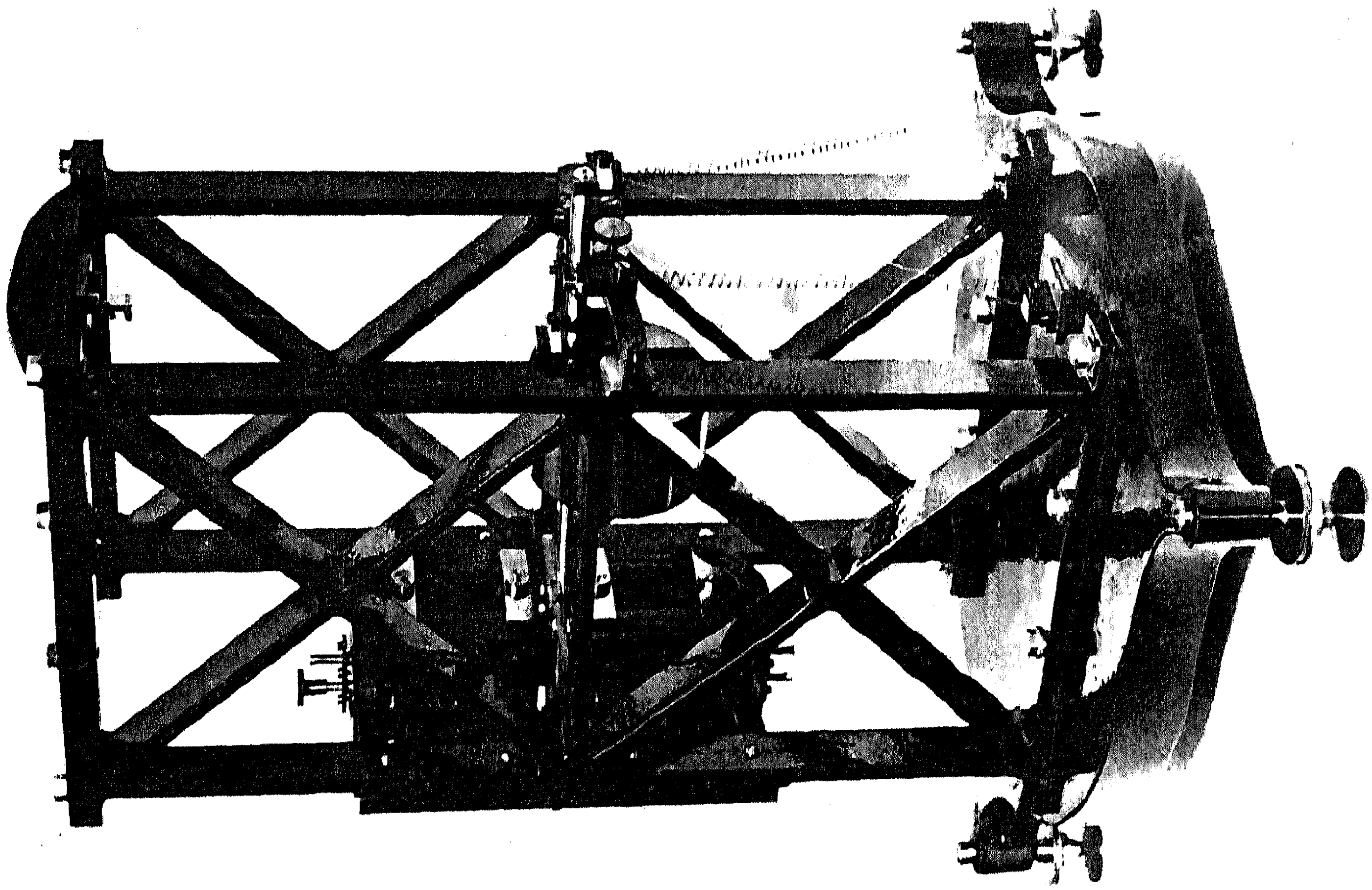
При такой гальванометрической регистраціи на разстояніи необходимо, однако, для избѣжанія всякихъ постороннихъ индукціонныхъ вліяній, тщательно перекрутить обѣ проволоки, идущія отъ маятника къ гальванометру.

Другое удобство гальванометрической регистраціи заключается въ томъ, что запись гальванометра, до извѣстной степени, не зависитъ отъ нулевого положенія самого сейсмографа. Самъ сейсмографъ можетъ, подъ вліяніемъ температурныхъ или какихъ-либо иныхъ вліяній, нѣсколько измѣнить свое нормальное положеніе равновѣсія, но на записи гальванометра это обстоятельство не отразится, такъ какъ непосредственно регистрируются не отклоненія сейсмографа, а лишь угловыя скорости его движенія, а въ этомъ случаѣ совершенно безразлично какое было начальное, исходное его положеніе.

Примѣненіе гальванометрическаго способа регистраціи позволяетъ изучать такія детали движенія почвы (напр., при опредѣленіи азимута эпицентра), которыя почти совершенно недоступны другимъ способамъ регистраціи.

Одно, чего можно было-бы опасаться при примѣненіи гальванометрическаго способа регистраціи, это то, что движеніе рамы гальванометра могло-бы оказать извѣстную реакцію на движеніе самого сейсмографа, но непосредственные опыты, предпринятые съ цѣлью выясненія этого вопроса, показали, что, при достаточной массѣ подвижной части сейсмографа,





реакція эта совершенно ничтожна, чего впрочемъ и слѣдовало, благодаря чрезвычайной слабости индуцированныхъ токовъ, a priori ожидать.

Сильное магнитное затуханіе до апеdo періодичности и гальванометрическій способъ регистраціи примѣнены на горизонтальныхъ маятникахъ съ Zöllner'овскимъ подвѣсомъ и на вертикальномъ сейсмографѣ, установленныхъ на Пулковской сейсмической станціи. Такіе-же приборы предназначены и для всѣхъ первоклассныхъ русскихъ сейсмическихъ станцій.

Слѣдующій рисунокъ 83 даетъ общій видъ такого апеpіодическаго горизонтальнаго сейсмографа въ соединеніи съ гальванометромъ.

Этотъ сейсмографъ отличается своей большой компактностью и, при незначительной массѣ маятника (около 7 килограммъ), даетъ увеличенія, которыя, для нѣкоторыхъ типовъ сейсмическихъ волнъ, превышаютъ 800 или даже 1000.

Введеніе затуханія до апеpіодичности имѣетъ, какъ мы увидимъ дальше, ту выгоду, что этимъ быстрѣе и надежнѣе всего уменьшается вліяніе собственнаго движенія прибора на его запись при землетрясеніяхъ, а то уменьшеніе чувствительности, которое вызывается введеніемъ сильнаго затуханія, съ лихвой компенсируется примѣненіемъ гальванометрическаго метода регистраціи.

Обѣ системы магнитовъ, какъ для затуханія, такъ и для гальванометрической регистраціи, могутъ перемѣщаться въ особыхъ салазкахъ при помощи микрометренныхъ винтовъ. Особыя шкалы съ ноніусами позволяютъ установить полюсы магнитовъ на желаемое разстояніе съ точностью до 0,1 м/м.

Наиболѣе подходящій собственный періодъ колебаній (при отсутствіи затуханія) для этихъ приборовъ 24 — 25 секундъ. Въ этомъ случаѣ, при полной апеpіодичности прибора, зазоръ между поверхностями мѣдной пластинки для затуханія и ближайшими полюсами магнитовъ около 5 м/м., такъ что о возможности какого-либо касанія пластинки и магнитовъ не можетъ, конечно, быть и рѣчи.

Сейсмографъ этотъ снабженъ ранѣе описаннымъ упорнымъ штифтомъ, для исключенія продольныхъ колебаній прибора, но этимъ штифтомъ, при регистраціи *дальнихъ* землетрясеній, пользоваться не приходится.

Къ штативу прибора, сбоку, прикрѣпленъ небольшой ударникъ съ электромагнитомъ, который можетъ ударять по грузу маятника и сообщать ему начальный толчекъ. Этимъ ударникомъ пользуются при опредѣленіи постоянныхъ прибора. Горизонтальный маятникъ прикрывается сверху особымъ жестянымъ, цилиндрическимъ колпакомъ съ ручками и съ окошкомъ; нижній срѣзъ колпака входитъ въ желобъ, прикрѣпленный къ столбу, на

которомъ стоитъ маятникъ. Въ этотъ желобъ, для предохраненія маятника отъ потоковъ воздуха, насыпается иногда сухой песокъ.

Чтобы показать высокую степень чувствительности вышеописаннаго апеpiодическаго горизонтальнаго сейсмографа, достаточно привести слѣдующіе два примѣра.

Во время Мессинскаго землетрясенія 28/XII 1908 полный (двойной) размахъ свѣтовой точки на регистрирномъ барабанѣ въ Пулковѣ, въ разстояніи 2600 килом. отъ эпицентра, долженъ былъ-бы быть около 0,9 метра, а во время послѣдняго Вѣрненскаго землетрясенія 3 — 4/I 1911 г., въ разстояніи 3700 кил. отъ эпицентра, цѣлыхъ 3,4 метра! Такіе громадные размахи, конечно, нельзя было непосредственно зарегистрировать.

Слѣдующій рисунокъ 84 даетъ общій видъ Пулковскаго апеpiодическаго вертикальнаго сейсмографа.

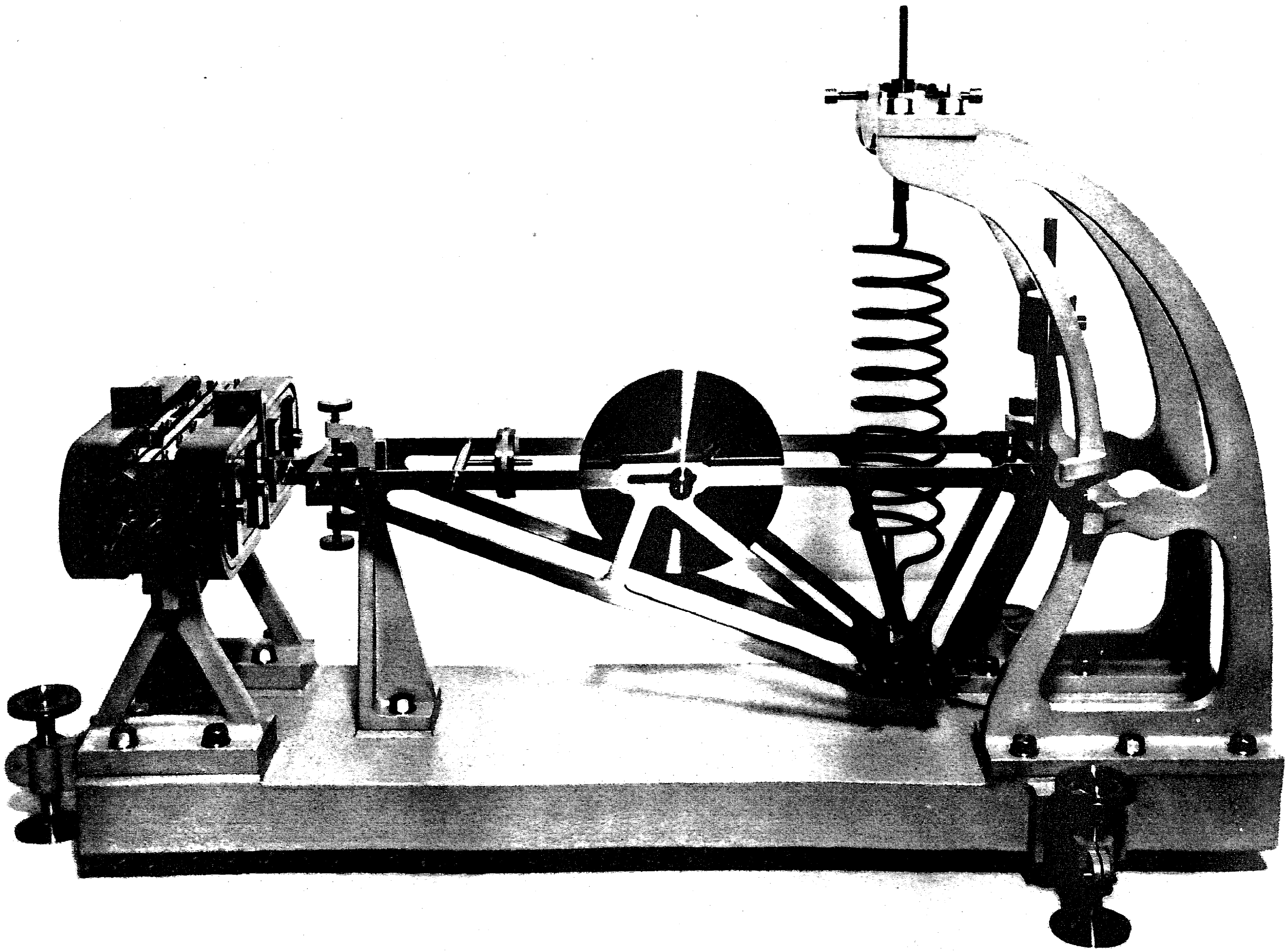
Двойная, латунная, подвижная рама, посреди которой находится тяжелая масса, можетъ свободно вращаться около нѣкоторой горизонтальной оси, каковое вращеніе достигается при помощи двухъ паръ тонкихъ, взаимно перпендикулярныхъ, плоскихъ, стальныхъ пластинокъ.

Рама поддерживается прочной, стальной, спиральной пружиной, нижній конецъ которой находится значительно ниже центра тяжести всей подвижной части прибора. При помощи особыхъ винтовъ, верхняя и нижняя точки прикрѣпленія пружины могутъ нѣсколько перемѣщаться вверхъ и внизъ, а также вправо и влѣво. Это необходимо для того, чтобы привести приборъ въ надлежащее положеніе и регулировать его собственный періодъ колебаній.

У внѣшняго конца рамы придѣлана мѣдная пластинка для затуханія и рама съ катушками для гальванометрической регистраціи. Какъ пластинка, такъ и рама могутъ свободно перемѣщаться между полюсами двухъ паръ подковообразныхъ постоянныхъ магнитовъ. На рисункѣ 84 представлена только одна пара магнитовъ для затуханія, но, при желаніи довести затуханіе до апеpiодичности, приходится, благодаря сравнительно короткому собственному періоду колебаній прибора (13 — 14 сек.), пользоваться двумя пластинками и двумя парами постоянныхъ магнитовъ.

На наружномъ краѣ внѣшней мѣдной пластинки нанесена миллиметровая шкала, а на одномъ изъ магнитовъ имѣется индексъ. Эта шкала служитъ для того, чтобы приводить верхній срѣзъ подвижной рамы прибора въ горизонтальное положеніе, для чего пользуются маленькой подвижной гирей, могущей перемѣщаться вдоль горизонтальной винтовой нарѣзки.

Проволоки отъ индукціонныхъ катушекъ идутъ, вдоль верхняго края рамы, къ двумъ зажимамъ около оси вращенія прибора. Эти зажимы



ФОТОТИПИЯ П. Е. ДРЕССЛЕРА СПБ.

соединяются съ неподвижными зажимами на штативѣ прибора двумя тонкими серебрянными листочками. Отсюда проволоки уже идутъ къ гальванометру.

Около оси вращенія прибора поставленъ вертикальный стержень съ подвижнымъ грузомъ.

Назначеніе этого груза приводить центръ тяжести всей подвижной части этого прибора на одну высоту съ осью вращенія. Въ этомъ случаѣ вертикальный сейсмографъ не будетъ реагировать на горизонтальныя смѣщенія почвы.

Такъ какъ стальныя пружины вообще сильно подвержены разнымъ температурнымъ вліяніямъ, то обыкновенно, при такихъ чувствительныхъ пружинныхъ сейсмографахъ, примѣняютъ особую температурную компенсацію, которая, однако, очень усложняетъ конструкцію прибора. При данномъ типѣ вертикальнаго сейсмографа, такая температурная компенсація является, однако, совершенно излишней, такъ какъ, благодаря примѣненію гальванометрическаго метода регистраціи, нулевое положеніе прибора не имѣетъ уже большого значенія, такъ какъ въ этомъ случаѣ регистрируются не самые углы отклоненія прибора, а лишь соотвѣтствующія угловыя скорости. Тѣмъ не менѣе, слѣдуетъ всегда стараться удерживать верхній срѣзъ рамы въ горизонтальномъ положеніи, такъ какъ незначительные наклоны рамы могутъ вызвать уже замѣтное измѣненіе собственнаго періода колебаній прибора. Для этой послѣдней цѣли и служитъ ранѣе упомянутый подвижной грузъ.

Наблюденія, произведенныя съ этимъ сейсмографомъ на Пулковской сейсмической станціи, показали высокія качества этого прибора въ дѣлѣ изслѣдованія вертикальныхъ смѣщеній почвы.

При пользованіи высоко-чувствительными и точными сейсмографами, дающими возможность изучать разныя мелкія детали *истиннаго* движенія почвы, необходимо имѣть и хорошіе регистрирные аппараты. Къ сожалѣнію, на эту сторону дѣла до сихъ поръ, и особенно заграницей, обращалось слишкомъ мало вниманія.

Отъ хорошаго регистрирнаго прибора требуется, чтобы вращеніе регистрирнаго вала было-бы вполнѣ равномѣрное, иначе говоря, чтобы длина одной минуты была-бы вездѣ одинакова, и чтобы это вращеніе было настолько быстрое, чтобы можно было ясно различать на сейсмограммахъ сейсмическія волны съ короткими періодами.

Одинъ изъ наиболѣе совершенныхъ типовъ регистрирныхъ аппаратовъ, работы механика, при Физической Лабораторіи Академіи Наукъ, Мазинга, представленъ на слѣдующемъ рисункѣ 85.

Правильно отточенный латунный цилиндръ приводится во вращеніе часовымъ механизмомъ, скрытымъ въ особомъ ящикѣ (на рисункѣ съ правой стороны). Регулированіе движенія этого пружиннаго часового механизма достигается при помощи особо тщательно сконструированнаго регулятора Фуко.

Передача движенія цилиндру происходитъ не у его оси, а у периферіи, при помощи, трущагося объ особое кольцо, ролика. Такая передача представляетъ ту несомнѣнную выгоду, что всякіе мелкіе, неизбѣжные недочеты, при изготовленіи различныхъ зубчатыхъ передачъ часового механизма, не увеличиваются въ масштабѣ у поверхности вала, какъ то имѣло-бы мѣсто, если-бы движеніе часового механизма передавалось непосредственно на ось цилиндра.

Регистрирный аппаратъ съ часовымъ механизмомъ помѣщается на особыхъ салазкахъ съ колесиками; эти салазки могутъ перемѣщаться по особымъ неподвижнымъ рельсамъ. Движеніе регистрирнаго аппарата, параллельно оси вала, осуществляется при помощи совершенно *отдѣльнаго* неподвижнаго часового механизма, приводимаго въ движеніе падающимъ грузомъ. Меньшая гиря, видимая на рисункѣ, служитъ только для того, чтобы держать всегда соединительный шнуръ или цѣпь въ натянутомъ состояніи.

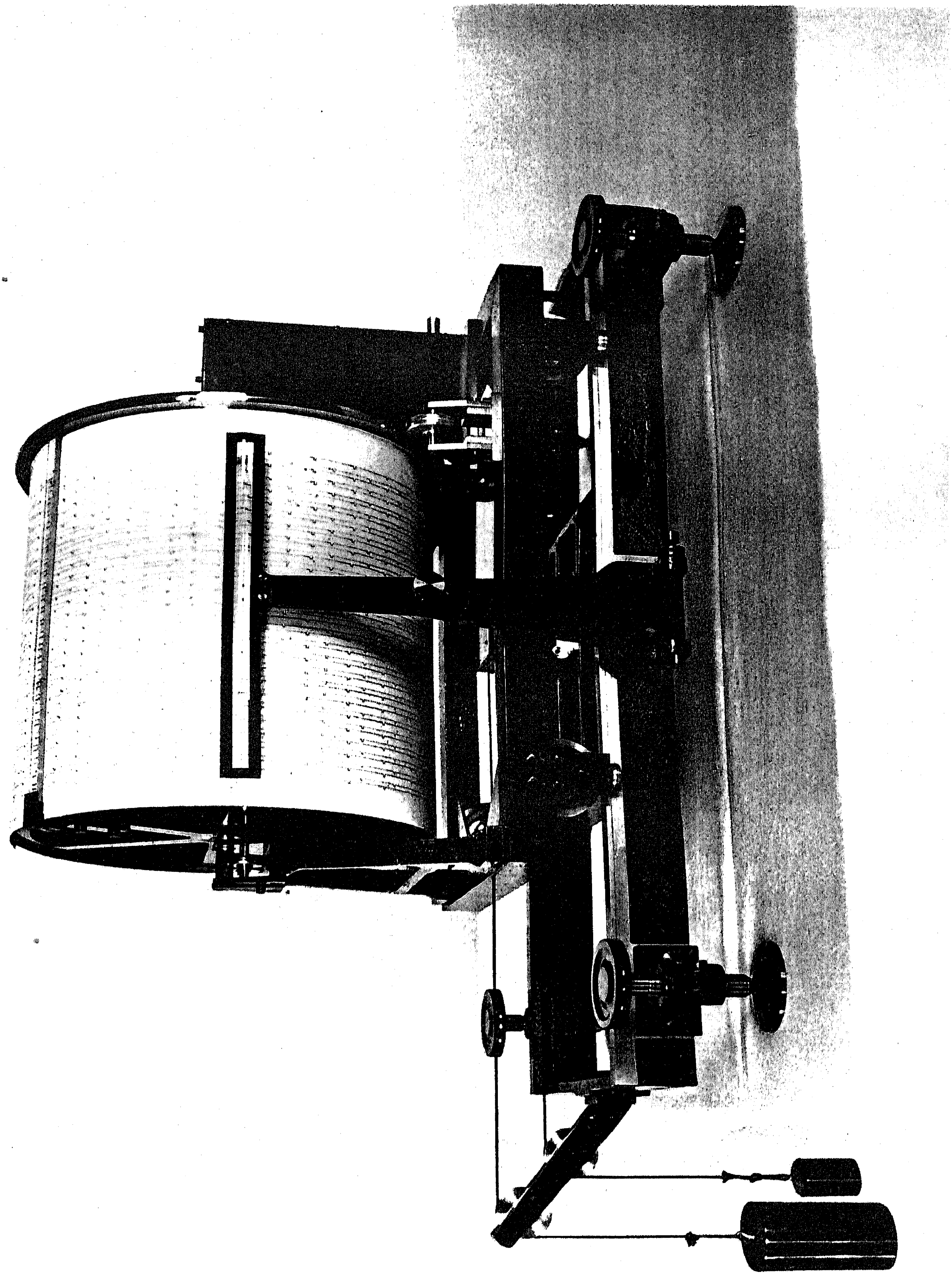
Въ большинствѣ-же регистрирныхъ аппаратовъ, перемѣщеніе вала, параллельно самому себѣ, достигается при помощи безконечнаго винта, и тотъ-же самый часовой механизмъ, который вращаетъ валъ, двигаетъ его и впередъ. При тяжелыхъ регистрирныхъ приборахъ такая система, однако, неудобна, такъ какъ нагрузка на часовой механизмъ бываетъ въ этомъ случаѣ настолько велика, что трудно достигнуть вполнѣ равномѣрнаго вращенія вала. Введеніе двухъ, совершенно независимыхъ другъ отъ друга, часовыхъ механизмовъ, является, такимъ образомъ, значительнымъ шагомъ впередъ.

Въ аппаратѣ вышеописаннаго устройства длина одной минуты соотвѣтствуетъ 30 миллиметрамъ, а разстояніе двухъ сосѣднихъ линій на барабанѣ 10 миллиметрамъ. Приборъ расчитанъ на 12-часовой ходъ; такимъ образомъ, приходится мѣнять на немъ бумагу два раза въ сутки.

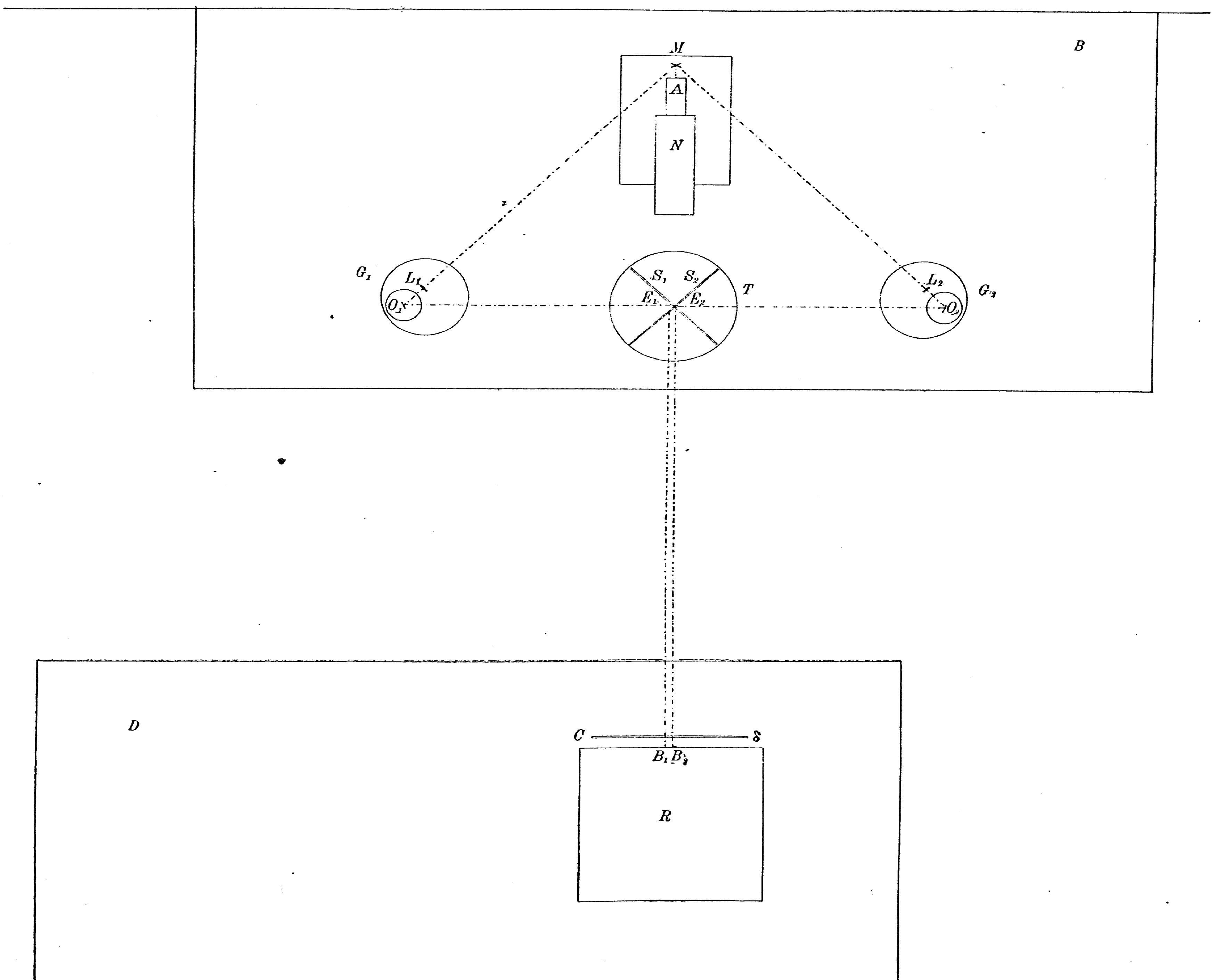
Этотъ типъ регистрирнаго аппарата, дѣйствительно, отличается замѣчательно равномѣрнымъ ходомъ.

Въ настоящее время механикъ Мазингъ выработалъ особый, упрощенный типъ регистрирнаго аппарата, для сейсмическихъ станцій второго разряда, съ однимъ только часовымъ механизмомъ.

Вмѣсто регулятора Фуко, предполагается примѣнить новый типъ регулятора чрезвычайно простой конструкціи.



Черт. 86.



На одномъ регистрирномъ аппаратѣ можно регистрировать одновременно движенiе двухъ сейсмографовъ.

На чертежѣ 86 представленъ ходъ лучей при регистрацiи движенiя двухъ гальванометровъ, соединенныхъ соотвѣтственно съ двумя аперiодическими, горизонтальными сейсмографами.

N представляетъ собою металлическiй цилиндръ, въ которомъ установлена лампочка Нернста съ вертикально-стоящей нитью. Свѣтъ отъ этой ити концентрируется, при помощи небольшой чечевицы, на узкой, вертикальной щели A, которая и служитъ, въ сущности, источникомъ свѣта.

Передъ щелью стоятъ, подъ угломъ другъ къ другу, два маленькихъ зеркальца M, которыя и посылаютъ по пучку отраженныхъ лучей на зеркала O_1 и O_2 гальванометровъ G_1 и G_2.

Послѣ отраженiя отъ зеркалъ гальванометра, лучи отражаются еще разъ, въ точкахъ E_1 и E_2, отъ двухъ плоскихъ зеркалъ S_1 и S_2, установленныхъ на столикѣ T.

Послѣ этого вторичнаго отраженiя лучи падаютъ на регистрирный валъ R (точки B_1 и B_2).

Собирательныя чечевицы L_1 и L_2, поставленныя *передъ* зеркалами гальванометровъ (до паденiя лучей на зеркала), и длинная, горизонтальная, цилиндрическая чечевица C собираютъ лучи въ двѣ яркiя точки B_1 и B_2.

Это расположенiе приборовъ оказалось на практикѣ очень удобнымъ.

Отмѣтка времени на сейсмограммахъ достигается проще всего тѣмъ, что на пути одного изъ пучковъ лучей ставятъ маленькую ширмочку, которая каждую минуту, при помощи особаго электро-магнита, соединеннаго съ контактными часами, прерываетъ на 1 или 2 секунды запись прибора, перехватывая падающiй пучекъ лучей.

Чтобы имѣть точное время для другого прибора, регистрирующаго на томъ-же валѣ, надо всегда учитывать величину такъ называемаго *параллакса* точекъ, т.-е. знать, насколько, при равновѣсiи приборовъ, одна точка смѣщена по отношенiю къ другой въ направленiи оси временъ.

Контактные часы должны быть высокаго качества и имѣть очень правильный ходъ, чтобы въ любой моментъ можно было бы знать вѣрное среднее время съ точностью до 1 секунды. Это та предѣльная точность, которая требуется въ настоящее время отъ сейсмическихъ наблюденiй.

Провѣрку часовъ производятъ, или по телеграфнымъ сигналамъ, даваемымъ какой-нибудь астрономической обсерваторiей, причемъ заграницей начали примѣнять для этой цѣли безпроволочный телеграфъ, или, лучше всего, опредѣляя самостоятельно поправку часовъ на мѣстѣ, при помощи весьма несложныхъ астрономическихъ прiемовъ. (См., напр., статью «Къ вопросу объ опредѣленiи времени на сейсмическихъ станцiяхъ второго разряда».

Краткое практическое руководство для опредѣленія поправки хронометра съ малымъ пассажнымъ инструментомъ. Извѣстія Постоянной Центральной Сейсмической Комиссіи. Томъ IV. Вып. 2).

Всѣ моменты на сейсмограммахъ должны быть всегда даваемы по Гринвичскому среднему времени, считаемое отъ 0 до 24 часовъ, отъ полночи до полночи.

Сами сейсмографы должны быть устанавливаемы на прочныхъ массивныхъ столбахъ, покоящихся на коренныхъ породахъ; можно устанавливать ихъ и прямо на природной скалѣ.

Сейсмическія станціи 1-го разряда должны быть снабжены наилучшими типами сейсмографовъ, причемъ весьма цѣлесообразно имѣть два полныхъ комплекта приборовъ, одинъ на большую, а другой на меньшую чувствительность. Слѣдуетъ, обязательно, регистрировать всѣ три составляющія смѣщенія почвы.

Само помѣщеніе станціи должно быть, по возможности, сухое и не подвержено различнымъ температурнымъ вліяніямъ. Въ этихъ цѣляхъ, а также для уменьшенія вліянія микросейсмическихъ колебаній 2-го рода, цѣлесообразно строить подземныя зданія, окружая помѣщеніе, гдѣ стоятъ сейсмографы, однимъ или даже двумя корридорами.

На слѣдующемъ чертежѣ 87 представленъ планъ новой, центральной сейсмической станціи въ Пулковѣ.

Черт. 88 даетъ боковой разрѣзъ станціи.

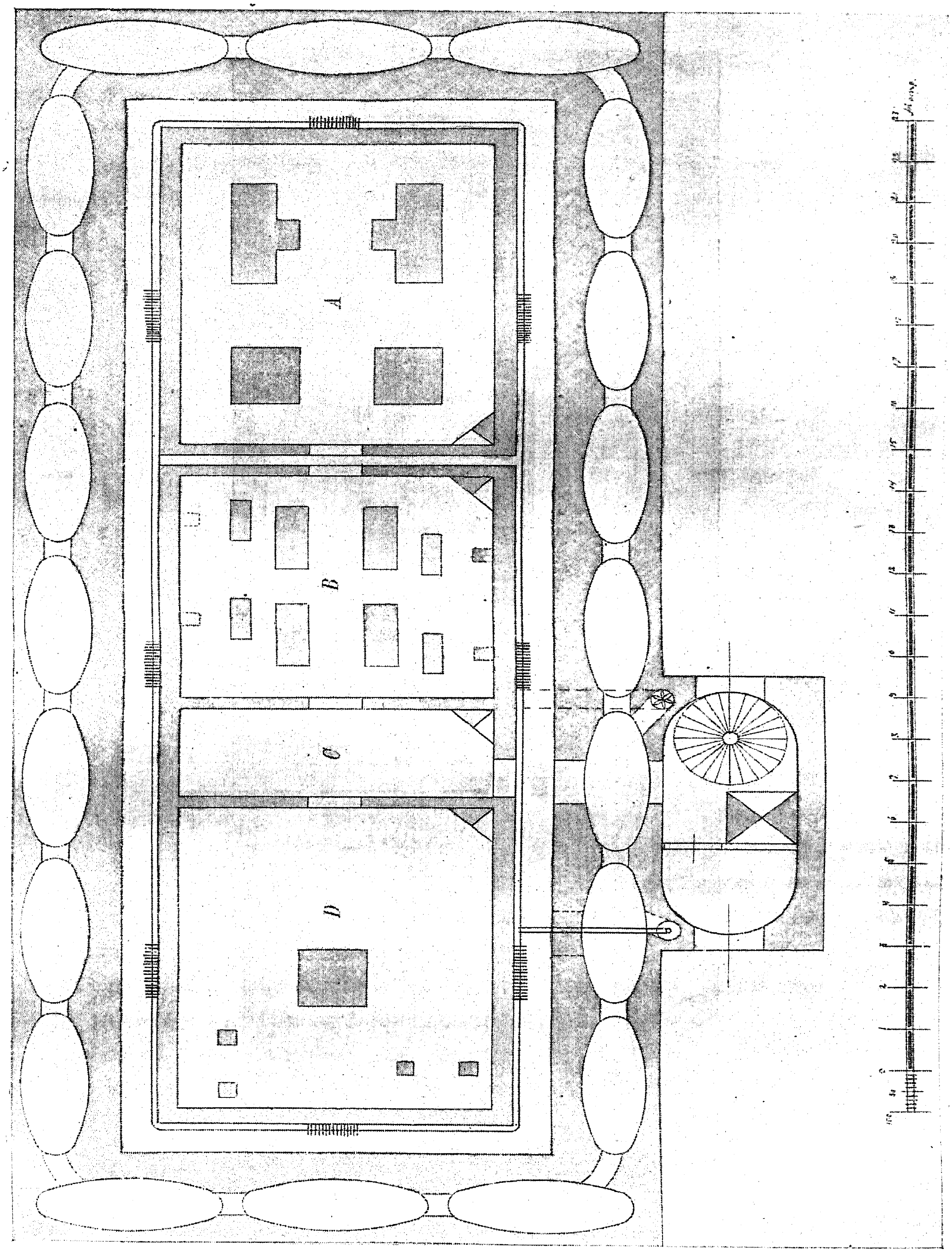
Эта станція состоитъ изъ четырехъ отдѣльныхъ помѣщеній, скрытыхъ совершенно подъ землей и окруженныхъ двумя внутренними корридорами.

Второй отъ наружной стѣны корридоръ снабженъ паровымъ отопленіемъ.

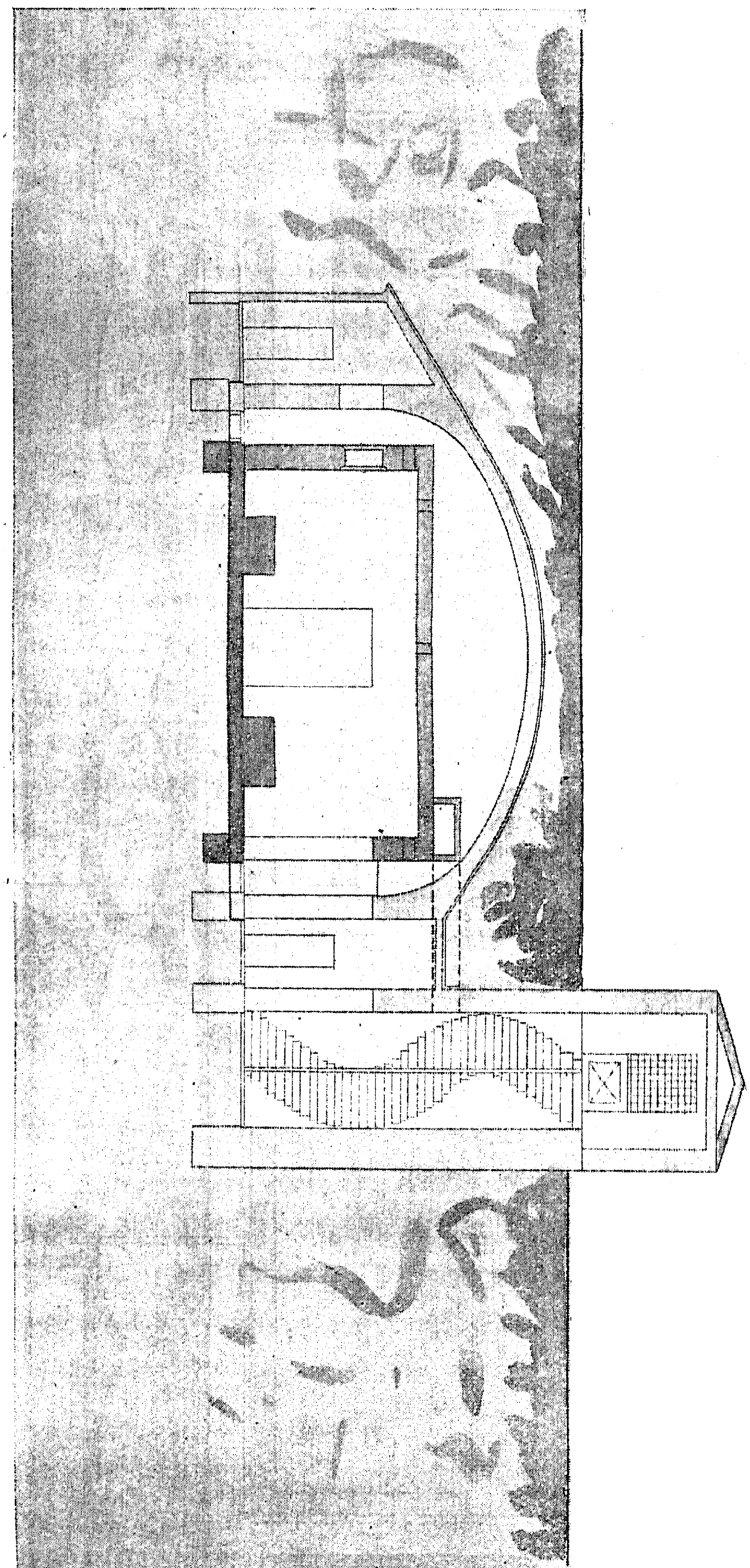
Требованія, предъявляемыя къ сейсмическимъ станціямъ 2-го разряда, гораздо менѣе строгія. Приборы могутъ быть гораздо менѣе чувствительны и самая запись механическая; но и на этихъ станціяхъ также требуется, чтобы время было извѣстно съ той-же предѣльной точностью въ 1 секунду. Только при этомъ условіи собираемый сейсмометрическій матеріалъ можетъ имѣть надлежащую научную цѣнность.

Мы разсмотрѣли, такимъ образомъ, важнѣйшіе типы сейсмическихъ инструментовъ.

Главнѣйшая задача всякихъ сейсмометрическихъ наблюденій заключается въ опредѣленіи элементовъ *истиннаго* движенія почвы, откуда уже можно вывести заключенія о соотвѣтствующей интенсивности сейсмической энергіи и о разныхъ характерныхъ особенностяхъ движенія поверхностныхъ слоевъ земли.



Черт. 87.



Черт. 88.

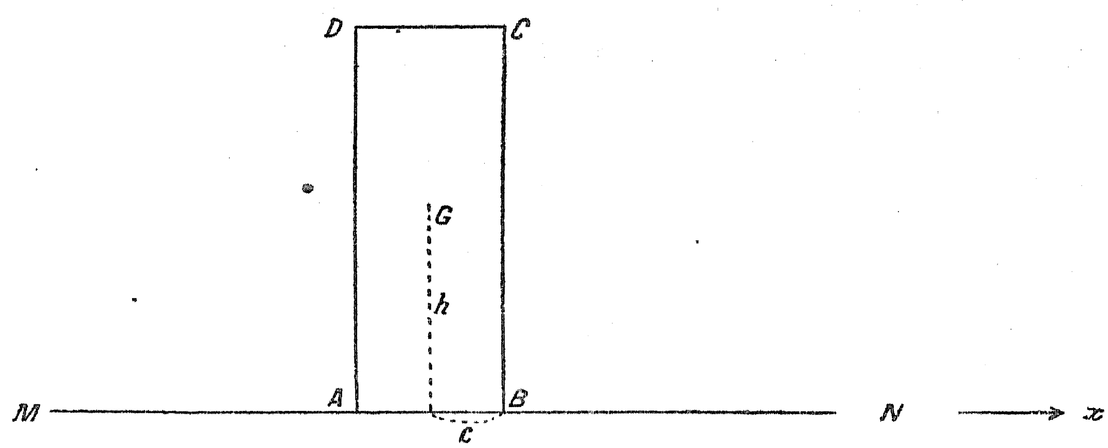
Въ заключеніе укажемъ еще на одинъ возможный пріемъ оцѣнки силы землетрясенія, который могъ-бы, казалось, быть съ успѣхомъ примѣненъ въ эпицентральныхъ и плейстосейстовыхъ областяхъ.

Пріемъ этотъ чрезвычайно простъ, не требуетъ никакихъ сложныхъ приборовъ и доступенъ безусловно каждому; основанъ онъ на явленіи опрокидыванія предметовъ опредѣленной формы.

Этотъ пріемъ могъ бы дать раціональную, чисто динамическую шкалу для оцѣнки силы землетрясенія, по крайней мѣрѣ по отношенію къ горизонтальнымъ сдвигамъ почвы.

Представимъ себѣ деревянный, однородный параллелепипедъ $ABCD$ (см. черт. 89), покоящійся на подставкѣ MN.

Черт. 89.



Наклонимъ его на небольшой уголъ θ вправо около оси B и предоставимъ его затѣмъ самому себѣ. Если уголъ θ не слишкомъ великъ, то параллелепипедъ вернется въ прежнее вертикальное положеніе равновѣсія, но, благодаря инерціи, начнетъ двигаться влѣво, вращаясь теперь уже около оси A, и достигнетъ нѣкотораго максимальнаго угла отклоненія, меньше перваго; потомъ онъ снова вернется въ нормальное положеніе, начнетъ двигаться вправо, вращаясь около оси B, и т. д.

Это движеніе чрезвычайно интересное по своему характеру.

Не вдаваясь въ различныя подробности, укажемъ только, что теорія устанавливаетъ, что максимальныя амплитуды (углы наклона) вправо и влѣво убываютъ въ геометрической прогрессіи, по закону логариѳмическаго декремента, но продолжительность колебаній, вправо и влѣво, не остается постоянной, а убываетъ вмѣстѣ съ амплитудой, а именно эта продолжительность пропорціональна квадратному корню изъ максимальной амплитуды.

Каждому, навѣрное, не разъ приходилось наблюдать это чрезвычайно характерное движеніе.

Справедливость различныхъ теоретическихъ формулъ, относящихся до

собственнаго движенія этого простого прибора, была провѣрена непосредственными наблюденіями.

Обратимся теперь къ тому случаю, когда подставка MN, на которомъ покоится параллелепипедъ, сама находится въ движеніи.

Обозначимъ высоту центра тяжести G надъ основаніемъ AB параллелепипеда черезъ h, а половину разстоянія между осями вращенія A и B черезъ c.

Представимъ себѣ теперь, что поверхность земли внезапно смѣстилась вправо по направленію x, иначе говоря, что подставка MN получила какъ-бы нѣкоторый толчекъ, сообщившій ей начальную скорость x_0'.

Если x_0' достаточно велико, то параллелепипедъ опрокинется влѣво.

Условіе опрокидываемости можно вывести теоретически. Теорія показываетъ, что для того, чтобы параллелепипедъ опрокинулся, надо, чтобы, съ точностью до членовъ порядка $\frac{c^2}{h^2}$, было

$$x_0' > c\sqrt{\frac{4}{3}\cdot\frac{g}{h}}, \qquad (24)$$

гдѣ g есть ускореніе силы тяжести.

Справедливость этой формулы подтвердилась въ общихъ чертахъ непосредственными наблюденіями.

На основаніи этой формулы можно построить цѣлую шкалу такихъ параллелепипедовъ, и, набюдая за тѣмъ, какіе изъ нихъ упали, а какіе остались стоять, можно уже судить объ интенсивности соотвѣтствующаго внезапнаго горизонтальнаго толчка (въ данномъ направленіи). Такая шкала будетъ уже чисто динамическая.

Поставивъ двѣ системы параллелепипедовъ въ двухъ взаимно перпендикулярныхъ плоскостяхъ, можно даже вывести извѣстное заключеніе о томъ, въ какомъ именно направленіи произошелъ толчекъ.

Но кромѣ внезапныхъ толчковъ, параллелепипеды могутъ упасть и при ритмическихъ движеніяхъ почвы.

Предположимъ теперь, что смѣщеніе x удовлетворяетъ закону гармоническихъ колебаній, напр.,

$$x = x_m \sin\left(2\pi\frac{t}{T_p} + \delta\right).$$

Максимальное ускореніе движенія будетъ

$$w_m = \frac{4\pi^2 x_m}{T_p^2} \qquad (25)$$

Теорія устойчивости параллелепипедовъ на подвижной подставкѣ, совершающей правильныя, синусоидальныя колебанія, представляетъ извѣстныя трудности, но опыты, произведенные съ небольшой подвижной платформой, показали, что для каждаго даннаго параллелепипеда, характеризуемаго опредѣленными величинами h и c, существуетъ *вполнѣ опредѣленное* максимальное ускореніе движенія почвы w_m, при которомъ онъ опрокидывается. Устойчивость параллелепипеда не зависитъ вовсе отъ *отдѣльныхъ абсолютныхъ значеній* x_m и T_p, но только отъ *комбинаціи* этихъ величинъ, характеризующей максимальное ускореніе движенія w_m. Кромѣ того, опыты показали, что это предѣльное значеніе w_m, при которомъ параллелепипедъ опрокидывается, зависитъ только отъ отношенія $\frac{c}{h}$. Зависимость эта выражается слѣдующей, чрезвычайно простой формулой:

$$\frac{c}{h} = 0{,}0012\, w_m, \qquad (26)$$

гдѣ w_m выражено въ единицахъ C. G. S.

На основаніи этой формулы можно опять таки построить особую шкалу параллелепипедовъ, по паденію коихъ можно уже судить о томъ, между какими предѣлами заключалось максимальное горизонтальное ускореніе движенія почвы въ данномъ направленіи. Двѣ системы параллелепипедовъ, установленныхъ въ двухъ взаимно перпендикулярныхъ плоскостяхъ, дастъ намъ нѣкоторое указаніе и на направленіе, по которому распространялась соотвѣтствующая поверхностная сейсмическая волна.

Наблюденія съ такими параллелепипедами не могутъ, конечно, претендовать на большую точность, такъ какъ мы, такимъ образомъ, можемъ опредѣлить только *предѣлы*, между которыми искомая величина максимальнаго ускоренія движенія почвы заключалась. Но, тѣмъ не менѣе, такая система параллелепипедовъ дастъ намъ вполнѣ раціональную, чисто *динамическую шкалу* для оцѣнки силы землетрясенія при макросейсмическихъ явленіяхъ, по крайней мѣрѣ по отношенію къ горизонтальнымъ смѣщеніямъ почвы. Во всякомъ случаѣ, такая шкала будетъ гораздо надежнѣе всякой другой условной шкалы, гдѣ оцѣнка силы землетрясенія производится по балламъ.

Вопросъ о максимальномъ ускореніи движенія почвы при землетрясеніяхъ имѣетъ для сейсмическихъ областей громадное практическое значеніе, такъ какъ, изучивши всесторонне различныя характерныя особенности движенія почвы при землетрясеніяхъ, можно уже будетъ выработать вполнѣ раціональныя правила для постройки зданій и разныхъ другихъ искусственныхъ сооруженій въ областяхъ, часто подвергающихся разрушительному дѣйствію землетрясеній.

Глава V.

Теорія горизонтальнаго маятника.

§ 1.

Выводъ основного дифференціальнаго уравненія движенія маятника.

За прототипъ сейсмографа мы возьмемъ горизонтальный маятникъ и разсмотримъ подробно теорію его движенія. Тѣ-же самые принципы и методы, которые мы здѣсь изложимъ, могутъ быть распространены и на любой, другой типъ сейсмографа. Такимъ образомъ, та теорія, которую мы теперь здѣсь разсмотримъ, представляетъ собою, до извѣстной степени, общую теорію сейсмическихъ инструментовъ.

Горизонтальный маятникъ представляетъ собою твердое тѣло, имѣющее опредѣленную ось вращенія.

Прежде чѣмъ разсматривать теорію движенія горизонтальнаго маятника, выведемъ основную теорему механики, относящуюся вообще къ движенію всякаго твердаго тѣла около неподвижной оси.

Возьмемъ для этой цѣли прямоугольную систему координатныхъ осей x, y, z, и за неподвижную ось примемъ ось z.

На массу m, имѣющую координаты x, y и z, дѣйствуетъ нѣкоторая внѣшняя сила F. Пусть проэкціи этой силы на оси координатъ будутъ X, Y, Z.

Тогда, на основаніи началъ динамики, будемъ имѣть

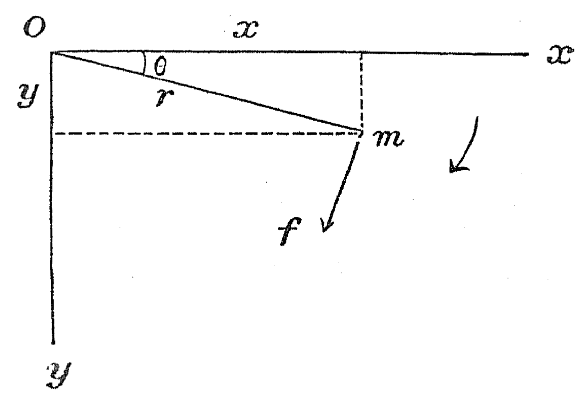
$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + R_x \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + R_y \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + R_z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

R_x, R_y, R_z суть проэкціи реакціи связи. Вводя эти реакціи, можно разсматривать точку m, какъ свободную.

Координата z не мѣняется со временемъ.

Вмѣсто прямоугольныхъ координатъ x и y, введемъ полярныя r и θ (см. черт. 90).

Черт. 90.



Направленіе вращенія мы будемъ считать положительнымъ, когда оно совершается по направленію движенія часовой стрѣлки.

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (2)$$

При вращеніи тѣла, r не мѣняется; единственная перемѣнная θ.

Изъ уравненій (2) находимъ:

$$\frac{dx}{dt} = -r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \quad r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -r\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -r\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

Найдемъ моментъ полной силы f, дѣйствующей перпендикулярно къ плечу r въ сторону возрастающихъ θ.

Такъ какъ реакція связи въ плоскости yOx направлена по линіи mO, то проэкція этой силы на направленіе, перпендикулярное къ mO, будетъ равна нулю.

Такимъ образомъ, мы будемъ имѣть

$$\begin{aligned} fr &= [Y\cos\theta + X\cos(90+\theta)]\,r \\ &= Yr\cos\theta - Xr\sin\theta \\ &= Yx - Xy. \end{aligned}$$

На основаніи уравненій (1) находимъ

$$f.r = m\left[x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right].$$

Подставляя сюда соотвѣтствующія выраженія изъ уравненій (2) и (3), находимъ:

$$fr = m\left[r\cos\theta\left\{-r\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}\right\} - r\sin\theta\left\{-r\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}\right\}\right]$$

$$= mr^2\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Это уравненіе имѣетъ мѣсто для всякой массы m, а, такъ какъ $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ одинаково для всѣхъ точекъ, то мы получимъ окончательно

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}\cdot\Sigma mr^2 = \Sigma fr.$$

Σmr^2 есть *моментъ инерціи* тѣла относительно оси вращенія. Обозначимъ его черезъ K.

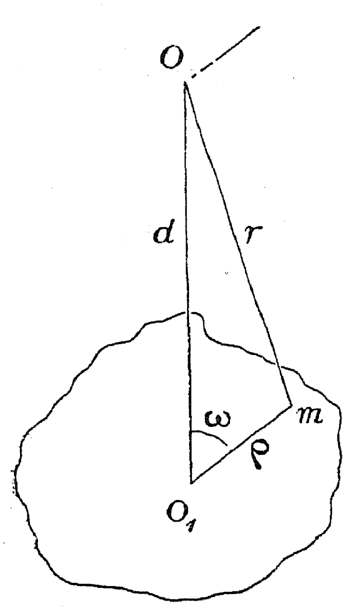
Σfr есть моментъ всѣхъ внѣшнихъ силъ относительно той-же оси вращенія. Обозначимъ его черезъ $\mathfrak{M}$.

Тогда мы будемъ имѣть

$$K\frac{d^2\theta}{dt^2} = \mathfrak{M} \qquad (4)$$

Эта формула служитъ выраженіемъ основной теоремы механики, а именно, что, при вращеніи твердаго тѣла около нѣкоторой неподвижной оси, *моментъ инерціи тѣла, относительно оси вращенія, умноженный на угловое ускореніе, равенъ моменту всѣхъ дѣйствующихъ внѣшнихъ силъ.*

Черт. 91.



Докажемъ еще одну важную вспомогательную теорему, относящуюся къ моментамъ инерціи.

Положимъ, что K есть моментъ инерціи тѣла, полная масса котораго есть M, относительно данной оси O, а K_0 — моментъ инерціи относительно оси O_1, параллельной данной, но проходящей черезъ центръ тяжести тѣла. Разстояніе между осями обозначимъ черезъ d (см. черт. 91).

Тогда

$$K = K_0 + Md^2 \qquad (5)$$

Доказательство:

$$r^2 = d^2 + \rho^2 - 2d\rho\cos\omega$$

$$\Sigma mr^2 = d^2.\Sigma m + \Sigma m\rho^2 - 2d\,\Sigma m\rho\cos\omega.$$

$$\Sigma m r^2 = K$$

$$\Sigma m = M$$

$$\Sigma m \rho^2 = K_0.$$

$\Sigma m \rho \cos \omega = 0$, такъ какъ ось O_1 проведена, по предположенію, черезъ центръ тяжести тѣла.

Слѣдовательно,

$$K = K_0 + M d^2,$$

что и требовалось доказать.

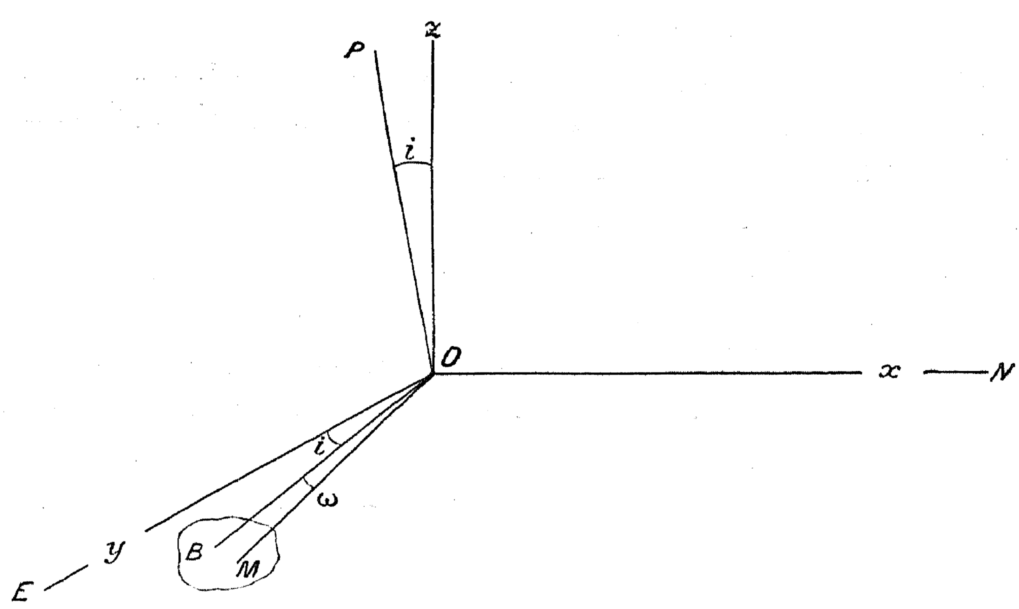
Этой послѣдней теоремой приходится пользоваться при *вычисленіи* приведенной длины ранѣе описаннаго тяжелаго горизонтальнаго маятника, такъ какъ для этого типа прибора опредѣленіе приведенной длины изъ непосредственныхъ наблюденій представляетъ нѣкоторыя затрудненія (см. § 1 главы VII).

Выведемъ теперь дифференціальное уравненіе собственнаго движенія горизонтальнаго маятника при покоящейся почвѣ.

Возьмемъ для этой цѣли *неподвижную* систему координатныхъ осей x, y, z.

Ось x-овъ направимъ къ сѣверу, ось y-овъ на востокъ, а ось z-овъ къ зениту.

Черт. 92.



При равновѣсіи маятника, пусть его центръ тяжести B находится въ плоскости zy, какъ это представлено на черт. 92.

Ось вращенія маятника OP также лежитъ въ плоскости zy и составляетъ уголъ i съ вертикальной линіей Oz.

За начало координатъ O возьмемъ основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ центра тяжести маятника на его ось вращенія.

Когда стержень горизонтальнаго маятника лежитъ въ плоскости перваго вертикала, то онъ можетъ реагировать на смѣщенія почвы, параллельныя оси x-овъ, то есть онъ служитъ для записи смѣщеній почвы, происходящихъ въ меридіанѣ.

Смѣщенія, параллельныя оси y-овъ и оси z-овъ, не выводятъ такой маятникъ изъ положенія равновѣсія, если мы только отвлечемся отъ ранѣе упомянутыхъ побочныхъ, продольныхъ колебаній прибора, которыя могутъ имѣть мѣсто при Zöllner'овскомъ подвѣсѣ, но которыя всегда легко исключить, введеніемъ ранѣе описаннаго упорнаго штифта.

Чтобы вывести дифференціальное уравненіе движенія горизонтальнаго маятника обратимся къ такъ называемой *небесной сферѣ*, т.-е. къ сферѣ съ радіусомъ равнымъ единицѣ, на которой мы и будемъ отмѣчать различныя *направленія* въ пространствѣ.

Терминъ небесная сфера заимствованъ изъ астрономіи; къ ней прибѣгаютъ въ тѣхъ случаяхъ, когда, для анализированія явленія, приходится пользоваться формулами сферической тригонометріи.

Такая небесная сфера представлена на чертежѣ 93.

Точка C представляетъ собою *направленіе* оси x, точка A направленіе оси y, а точка Z направленіе оси z.

Дуга большого круга ZC соотвѣтствуетъ плоскости zx, дуга AC — плоскости xy, а дуга ZA — плоскости yz.

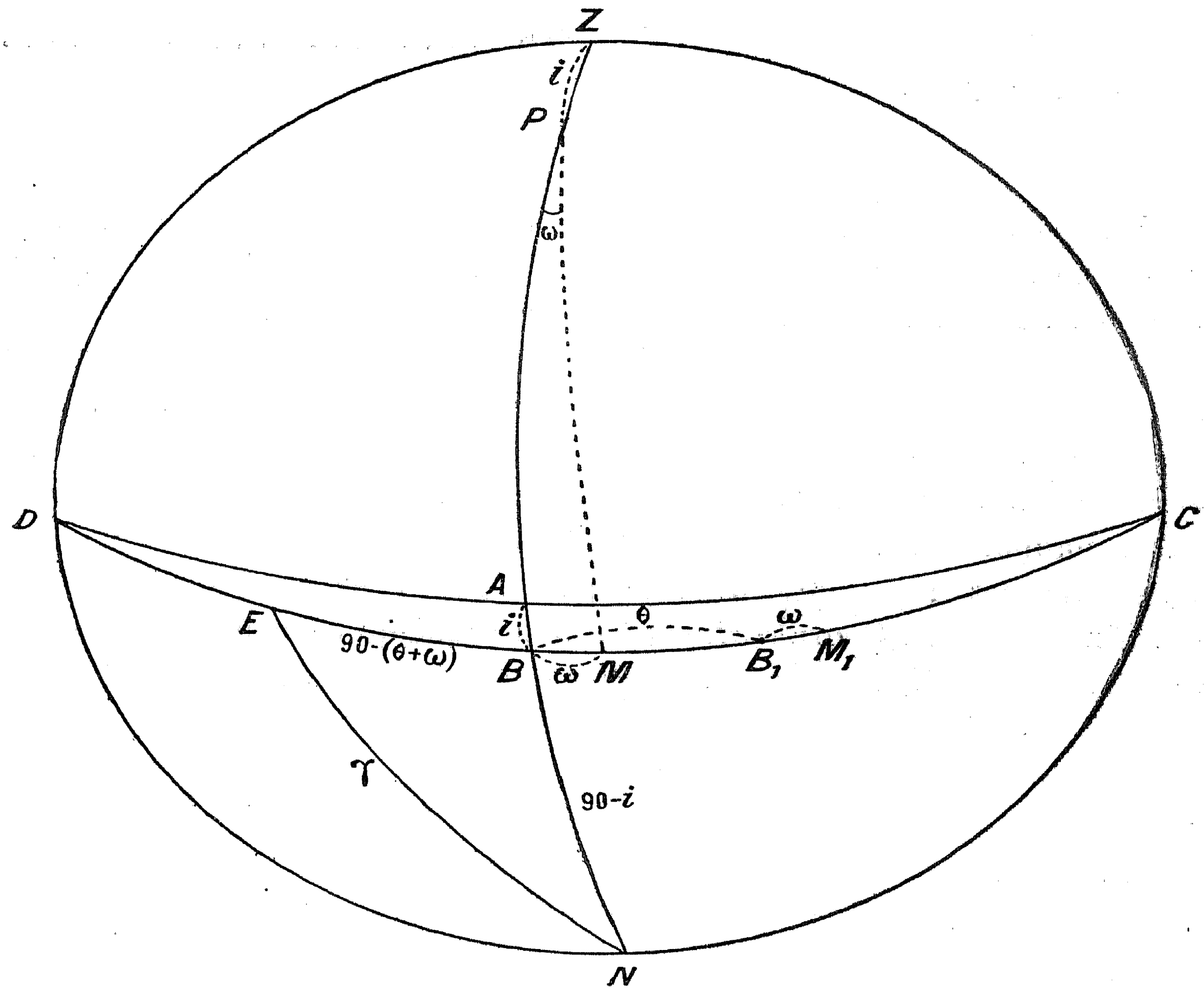
Направленіе оси вращенія проектируется въ P, а направленіе на центръ тяжести маятника въ B, причемъ дуга $PZ = AB = i$.

Каждая точка горизонтальнаго маятника перемѣщается, при движеніяхъ маятника, въ плоскости перпендикулярной къ оси вращенія P, слѣдовательно, *положеніе этой плоскости на небесной сферѣ* представится дугой большого круга, каждая точка которой отстоитъ на 90° отъ P. Эта дуга будетъ, очевидно, DBC; она представляетъ собою, такимъ образомъ, положеніе плоскости движенія *любой точки* горизонтальнаго маятника, безразлично, лежитъ или эта точка выше или ниже центра тяжести B.

Возьмемъ теперь произвольную точку M даннаго твердаго тѣла и пусть въ этой точкѣ сосредоточена масса m.

Проведемъ затѣмъ черезъ ось вращенія маятника OP (см. черт. 92) двѣ плоскости, одну, проходящую черезъ центръ тяжести B, а другую, черезъ данную точку M. Двугранный уголъ между этими плоскостями обозначимъ черезъ ω.

Черт. 93.



На небесной сферѣ эти плоскости представятся дугами большихъ круговъ PB и PM, а двугранный уголъ ω будетъ равенъ, на небесной сферѣ, углу BPM. Ввиду того, что $PB = PM = 90°$, то тотъ-же уголъ ω представится дугой BM:

$$\omega = \overset{\smile}{BM}.$$

Въ зависимости отъ того, лежитъ ли точка M вправо или влѣво отъ B, ω будетъ или положительно, или отрицательно.

Длину *перпендикуляра*, опущеннаго изъ точки M на ось вращенія, обозначимъ черезъ r, а длину перпендикуляра, опущеннаго изъ центра тяжести B на ту-же ось, черезъ r_0.

При равновѣсіи маятника, направленіе на центръ тяжести совпадаетъ съ точкой B на небесной сферѣ.

Предположимъ теперь, что маятникъ отклоненъ *вправо* на уголъ θ; въ этомъ случаѣ мы будемъ считать θ положительнымъ. Тогда точка B перейдетъ въ B_1, а M въ M_1.

Моментъ инерціи системы относительно оси вращенія будетъ

$$K = \Sigma m r^2, \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (6)$$

а угловое ускореніе

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \theta''.$$

Чтобы примѣнить основную теорему механики для вращенія твердаго тѣла около нѣкоторой неподвижной оси (см. уравненіе (4)), надо вычислить моментъ $\mathfrak{M}$ внѣшнихъ силъ относительно оси вращенія.

На массу m дѣйствуетъ внѣшняя сила тяжести равная mg, гдѣ g есть ускореніе силы тяжести. Сила эта направлена вертикально внизъ. Соотвѣтствующее *направленіе* на небесной сферѣ представится точкой N. Надо теперь взять проэкцію этой силы на направленіе перпендикулярное къ r, т.-е. на направленіе, составляющее $90°$ съ направленіемъ перпендикуляра, опущеннаго изъ точки M_1 на ось вращенія и совпадающее съ плоскостью движенія массы m. Соотвѣтствующее направленіе на небесной сферѣ представится точкой E, отстоящей на $90°$ отъ точки M_1:

$$\breve{EM_1} = 90°.$$

Уголъ между направленіемъ силы тяжести и направленіемъ на точку E представится на небесной сферѣ дугой $\breve{EN} = \gamma$.

Такимъ образомъ, искомый моментъ силы тяжести будетъ

$$mg \cos\gamma \, . \, r.$$

Остается теперь только найти выраженіе для $\cos\gamma$.

Изъ сферическаго треугольника EBN, гдѣ уголъ при B прямой, имѣемъ

$$\cos\gamma = \cos \breve{EB} \times \cos \breve{BN}.$$

Но

$$\breve{EB} = 90° - (\theta + \omega)$$

и

$$BN = 90° - i;$$

слѣдовательно,

$$\cos\gamma = \sin i \, . \sin(\theta + \omega). \dots\dots\dots\dots\dots \quad (7)$$

Моментъ силы тяжести стремится всегда вернуть маятникъ въ положеніе равновѣсія, т.-е. онъ стремится всегда уменьшить существующее угловое ускореніе, а потому этотъ моментъ будетъ отрицательный.

Итакъ, для полнаго момента внѣшнихъ силъ относительно оси вращенія мы будемъ имѣть

$$\mathfrak{M} = -\Sigma mgr \sin i \,.\, \sin(\theta + \omega), \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

гдѣ суммированіе должно быть распространено на всѣ движущіяся массы маятника.

Для разныхъ точекъ данной твердой системы g, i и θ одинаковы, а потому

$$\mathfrak{M} = -g \sin i \,.\, [\sin\theta \,.\, \Sigma mr \cos\omega + \cos\theta \,.\, \Sigma mr \sin\omega].$$

Здѣсь $r\cos\omega$ есть проекція длины r на плоскость, проходящую черезъ ось вращенія и центръ тяжести маятника, слѣдовательно,

$$\Sigma mr \cos\omega = Mr_0 \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Съ другой стороны, $r\sin\omega$, есть разстояніе точки m до той-же плоскости, а, слѣдовательно, $\Sigma mr \sin\omega$ по теоремѣ моментовъ, равно нулю, такъ какъ данная плоскость проходитъ именно черезъ центръ тяжести системы.

Итакъ,

$$\mathfrak{M} = -g \sin i \,.\, \sin\theta \,.\, Mr_0,$$

или, ограничиваясь малыми углами поворота, съ которыми только и приходится имѣть дѣло въ практической сейсмометріи,

$$\mathfrak{M} = -g \sin i \,.\, Mr_0 \,.\, \theta.$$

Подставляя это выраженіе въ основное дифференціальное уравненіе (4), будемъ имѣть

$$\theta'' + g \sin i \cdot \frac{Mr_0}{K} \cdot \theta = 0.$$

$K = \Sigma mr^2$ дѣленное на Mr_0 есть нѣкоторая длина; обозначимъ ее черезъ l.

Съ другой стороны, можно представить K слѣдующимъ образомъ:

$$K = M\rho^2,$$

гдѣ ρ называется радіусомъ инерціи.

Слѣдовательно,

$$l = \frac{K}{Mr_0} = \frac{\rho^2}{r_0}, \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

гдѣ r_0 есть разстояніе центра тяжести системы до оси вращенія.

l называется *приведенной длиной* маятника.

Такимъ образомъ мы получимъ слѣдующее окончательное дифференціальное уравненіе движенія горизонтальнаго маятника при отсутствіи затуханія:

$$\theta'' + \frac{g \sin i}{l} \theta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Найдемъ теперь его общій интегралъ.

Для этого положимъ

$$n^2 = \frac{g \sin i}{l},$$

тогда

$$\theta'' + n^2 \theta = 0.$$

На основаніи выводовъ главы II (см. формулы (23), (24) и (26)), общій интегралъ этого уравненія представится въ такомъ видѣ:

$$\theta = A \cos nt + B \sin nt,$$

гдѣ A и B суть двѣ произвольныя постоянныя.

Движеніе маятника будетъ періодическое, удовлетворяющее закону гармоническихъ колебаній, причемъ полный періодъ колебаній T выразится слѣдующимъ образомъ:

$$T = \frac{2\pi}{n} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \sin i}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

При малыхъ значеніяхъ i, собственный періодъ колебаній маятника можетъ быть очень великъ.

Если $i = 90°$, то нашъ горизонтальный маятникъ превращается въ простой вертикальный маятникъ, съ горизонтальной осью вращенія.

Соотвѣтствующій періодъ колебаній будетъ

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Мы пришли, такимъ образомъ, къ извѣстной формулѣ для періода простого вертикальнаго маятника. Слѣдовательно, l представляетъ собою ни что иное, какъ длину математическаго маятника, имѣющаго тотъ-же періодъ, какъ данный физическій маятникъ, при условіи горизонтальности его оси вращенія.

Для горизонтальныхъ маятниковъ съ Zöllner'овскихъ подвѣсомъ, предназначенныхъ для русскихъ сейсмическихъ станцій перваго разряда, l равно, приблизительно, 120 $^{м}/_{м}$.

Посмотримъ теперь, какой-же долженъ быть наклонъ оси вращенія i такого маятника, чтобы его собственный періодъ колебаній равнялся 25 сек.

Принимая ускореніе силы тяжести g для Петербурга равнымъ 9819 $^{\text{м}}/_{\text{м}}$, найдемъ, по формулѣ (12), что

$$\sin i = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{l}{g} = \frac{4\pi^2}{625} \cdot \frac{120}{9819}$$

или

$$i = 0^\circ\, 2'\, 39'',2.$$

Мы видимъ, такимъ образомъ, что уголъ наклона оси очень малъ. Слѣдовательно, въ дальнѣйшемъ изложеніи теоріи горизонтальнаго маятника, мы можемъ во всѣхъ формулахъ положить

$$\sin i = i$$

и

$$\cos i = 1.$$

Замѣтимъ еще, что простой вертикальный маятникъ съ тѣмъ-же періодомъ въ 25 секундъ долженъ былъ-бы имѣть громадную длину.

Полагая $i = 90^\circ$, найдемъ, что въ этомъ случаѣ l равно 155,5 метрамъ!

Мы видимъ, такимъ образомъ, что, при посредствѣ горизонтальнаго маятника, можно очень легко осуществить сейсмографъ съ весьма длиннымъ собственнымъ періодомъ колебаній.

Разсмотримъ теперь движеніе горизонтальнаго маятника въ томъ случаѣ, когда почва испытываетъ смѣщенія, параллельныя оси x.

Величину этого смѣщенія мы обозначимъ черезъ x, гдѣ x есть нѣкоторая функція времени t:

$$x = f(t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Смѣщенія, параллельныя осямъ y-овъ и z-овъ, не вліяютъ, какъ мы раньше видѣли, на положеніе равновѣсія маятника.

Возьмемъ другую систему прямоугольныхъ координатныхъ осей ξ, η, ζ, *связанную со штативомъ маятника* и совпадающую съ системой осей x, y, z, когда почва, на которой покоится маятникъ, неподвижна. Координатныя оси x, y, z мы принимаемъ *неподвижными* въ пространствѣ и относительно нихъ-то мы и опредѣляемъ движеніе почвы.

Когда элементъ земной поверхности перемѣстится на величину x, то на ту-же величину перемѣстится и весь маятникъ со штативомъ и координатныя оси ξ, η, ζ. То, что мы можемъ непосредственно наблюдать, это только *относительное* движеніе горизонтальнаго маятника по отношенію къ осямъ ξ, η, ζ.

Въ моментъ сдвига, соотвѣтствующее ускореніе движенія почвы будетъ $\frac{d^2 x}{dt^2} = x''$, но маятникъ, вслѣдствіе инерціи, не измѣнитъ, въ первый моментъ, своего положенія въ пространствѣ. Такимъ образомъ, при внезапномъ сдвигѣ вправо, маятникъ отклонится, по отношенію къ штативу, влѣво. Разсматривая движеніе маятника относительно *переносныхъ осей* ξ, η, ζ, такое ускореніе движенія всей системы вправо будетъ равносильно тому, какъ будто къ массѣ m была-бы приложена сила инерціи mx'', направленная въ сторону отрицательныхъ x-овъ. Вводя эту, такъ называемую, *обратно-переносную* силу, мы можемъ уже прямо прилагать нашу основную теорему механики, касательно вращенія тяжелаго твердаго тѣла около нѣкоторой неподвижной оси (формула (4)), къ случаю горизонтальнаго маятника на движущейся подставкѣ.

Если маятникъ отклоненъ, въ данный моментъ, на уголъ θ, то направленіе плоскости, проходящей черезъ ось вращенія и массу m, составитъ уголъ $\theta + \omega$ съ плоскостью равновѣсія маятника zOy.

Сила инерціи mx'' дѣйствуетъ въ направленіи отрицательныхъ x-овъ (если $x'' > 0$), а потому проэкція этой силы на направленіе, перпендикулярное къ плечу r, будетъ

$$mx'' \cos(\theta + \omega),$$

а соотвѣтствующій моментъ

$$-mr\cos(\theta + \omega) \,.\, x''.$$

Величина x'' одинакова для всѣхъ точекъ даннаго твердаго тѣла.

Такимъ образомъ, къ моменту силы тяжести присоединится еще моментъ силы инерціи; слѣдовательно, полный моментъ всѣхъ дѣйствующихъ силъ будетъ (см. формулу (8))

$$\mathfrak{M} = -gi\,\Sigma mr \sin(\theta + \omega) - x''\,\Sigma mr \cos(\theta + \omega).$$

Отсюда, принимая во вниманіе, что

$$\Sigma mr \cos\omega = Mr_0$$

и

$$\Sigma mr \sin\omega = 0,$$

будемъ имѣть

$$\mathfrak{M} = -giMr_0 \sin\theta - x''\,Mr_0 \cos\theta.$$

Ограничиваясь малыми углами отклоненія θ, то есть, полагая

$$\sin\theta = \theta$$

и

$$\cos\theta = 1,$$

и подставляя найденное выраженіе для $\mathfrak{M}$ въ основную формулу (4), будемъ, принимая еще во вниманіе соотношеніе (10), имѣть

$$\theta'' + \frac{gi}{l}\cdot\theta + \frac{x''}{l} = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (15)$$

Таково дифференціальное уравненіе относительнаго движенія маятника, при наличіи смѣщеній почвы параллельно оси x-овъ и при отсутствіи затуханія.

Разсмотримъ теперь вліяніе вращеній на положеніе равновѣсія и на движеніе горизонтальнаго маятника.

Вращеніе около оси x-овъ (φ) не вліяетъ на положеніе равновѣсія маятника.

Посмотримъ, что вызоветъ небольшое вращеніе ψ около оси y-овъ. Это вращеніе соотвѣтствуетъ наклону поверхности земли на тотъ-же уголъ ψ въ сторону оси x-овъ. Согласно условію, мы будемъ считать ψ положительнымъ, когда поверхность земли, вправо отъ плоскости zOy, опускается, а слѣва поднимается.

Мы предположимъ, что всякія другія движенія почвы отсутствуютъ, а что только поверхность земли наклонилась на уголъ ψ.

Отъ этого вращенія около оси y-овъ маятникъ измѣнитъ свое положеніе равновѣсія по отношенію къ штативу и отклонится на нѣкоторый уголъ α, который и надлежитъ теперь опредѣлить.

При этомъ выводѣ, мы предположимъ, что i и ψ очень малы и, соотвѣтственно этому, отбросимъ всѣ члены высшаго порядка.

Обратимся къ чертежу 94.

При вращеніи около оси y-овъ, ось вращенія маятника перемѣстится изъ P въ P', причемъ двугранный уголъ PAP' и будетъ равенъ углу ψ, а дуга $\overset{\smile}{AP} = \overset{\smile}{AP'} = 90 - i$.

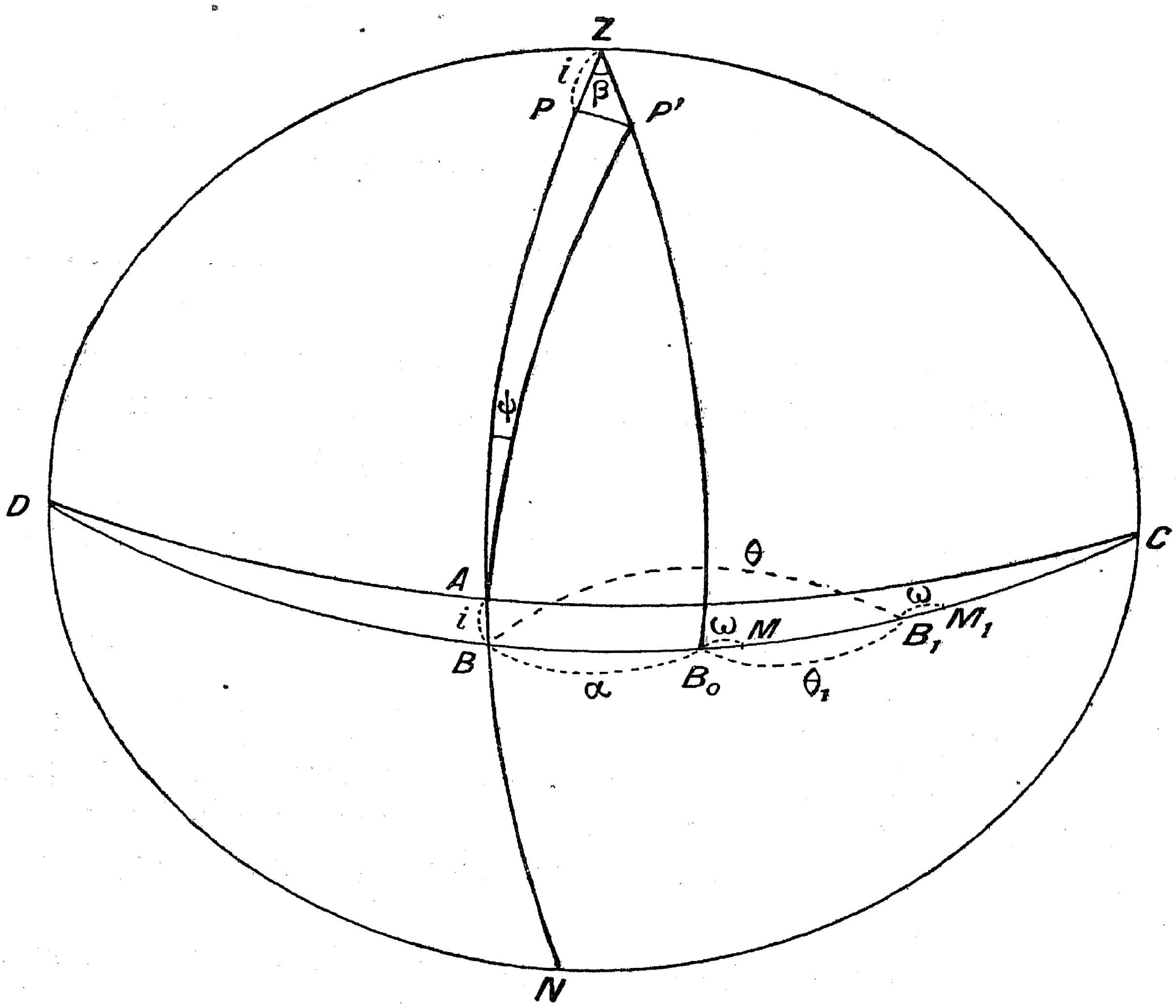
Изъ элементарнаго сферическаго треугольника PAP' имѣемъ

$$\overset{\smile}{PP'} = \psi\,.\cos i = \psi.$$

Обозначивъ далѣе уголъ PZP' черезъ β, получимъ изъ элементарнаго треугольника PZP'

$$\overset{\smile}{PP'} = \beta \sin i = \beta i.$$

Черт. 94.



Сравнивая эти два выраженія для $\breve{PP'}$, найдемъ, что

$$\beta = \frac{\psi}{i} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Дуга большого круга $P'Z$ соотвѣтствуетъ плоскости, проходящей черезъ новое положеніе оси вращенія и черезъ направленіе отвѣса, т.-е. это будетъ новая плоскость равновѣсія горизонтальнаго маятника.

Такимъ образомъ, вслѣдствіе наклона ψ, маятникъ отклонится отъ своего прежняго положенія равновѣсія на уголъ $\alpha = BB_0$.

Въ виду малости ψ и β, мы можемъ, въ первомъ приближеніи, положить въ элементарномъ сферическомъ треугольникѣ $\breve{ZB} = \breve{ZB_0}$. Тогда

$$\alpha = \beta \sin (90 + i) = \beta \cos i = \beta.$$

Подставляя эту величину въ формулу (16), получимъ окончательно

$$\alpha = \frac{\psi}{i} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Эта формула показываетъ, что, при малыхъ значеніяхъ угла наклона оси вращенія маятника i, т.-е. при длинныхъ періодахъ T, горизонтальный маятникъ является чрезвычайно чувствительнымъ приборомъ въ отношеніи регистраціи наклоновъ почвы или, что то-же самое, въ отношеніи измѣненія направленія отвѣсной линіи.

Возьмемъ, для примѣра, ранѣе выведенное значеніе $i = 0^\circ 2' 39'',2$.

Въ абсолютной мѣрѣ

$$i = \frac{1}{1295},$$

слѣдовательно,

$$\alpha = 1295 . \psi.$$

Предѣльную точность опредѣленія угла отклоненія горизонтальнаго маятника отъ положенія равновѣсія, при примѣненіи прямого оптическаго способа регистраціи, мы опредѣлили раньше, примѣрно, въ $2^1/_2''$.

Такимъ образомъ, предѣльную точность при опредѣленіи угла наклона почвы ψ или измѣненія направленія отвѣсной линіи мы можемъ принять равной $\frac{2{,}5''}{1295}$ или, примѣрно, *0,002''*.

Это число наглядно показываетъ намъ громадную чувствительность горизонтальнаго маятника. Увеличивъ собственный періодъ колебаній маятника, легко достигнуть еще бóльшей точности наблюденій. Изъ этого видно, что горизонтальный маятникъ является чрезвычайно подходящимъ приборомъ для изслѣдованія деформацій земли подъ вліяніемъ лунно-солнечнаго притяженія.

Посмотримъ теперь, какое вліяніе имѣетъ наклонъ почвы ψ на уравненіе *движенія* горизонтальнаго маятника.

Наклонъ ψ измѣняетъ *положеніе равновѣсія* маятника, переводя точку B въ B_0 (см. черт. 94), но самъ по себѣ онъ не сообщаетъ никакого ускоренія движенію маятника.

Предположимъ теперь, что маятникъ отклоненъ отъ своего новаго положенія равновѣсія на уголъ $B_0 B_1 = \theta_1$.

То, что мы непосредственно наблюдаемъ, это уголъ $\theta = BB_1$.

Слѣдовательно,

$$\theta_1 = \theta - \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

Для вычисленія момента силы тяжести, дѣйствующей на произвольную массу m въ точкѣ M, мы можемъ непосредственно примѣнить тѣ-же самыя разсужденія и формулы, что и раньше, но только, вмѣсто того, чтобы брать отклоненія θ отъ первоначальнаго положенія равновѣсія, мы должны брать отклоненія θ_1 отъ *новаго* положенія равновѣсія.

Тогда равнодѣйствующій моментъ силы тяжести будетъ

$$-gi\Sigma mr\sin(\theta_1+\omega),$$

а моментъ силы инерціи, при наличіи смѣщенія, параллельно оси x-овъ, будетъ, по прежнему,

$$-x''\Sigma mr\cos(\theta+\omega).$$

Для полнаго момента найдемъ, какъ и раньше,

$$\mathfrak{M}=-gi.Mr_0\theta_1-x''Mr_0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

или, замѣняя здѣсь θ_1 соотвѣтствующимъ выраженіемъ изъ формулы (18), получимъ для дифференціальнаго уравненія движенія маятника слѣдующее выраженіе:

$$\theta''+\frac{gi}{l}\cdot(\theta-\alpha)+\frac{x''}{l}=0.$$

Принимая еще во вниманіе соотношеніе (17), мы можемъ представить предыдущее уравненіе въ слѣдующемъ видѣ:

$$\theta''+\frac{gi}{l}\theta+\frac{1}{l}(x''-g\psi)=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

Разсмотримъ еще, какое вліяніе на движеніе маятника имѣетъ вращеніе почвы около вертикальной оси z. Уголъ поворота мы обозначимъ черезъ χ, при чемъ, согласно условію, мы будемъ считать χ положительнымъ, когда, смотря вдоль оси z-овъ къ началу координатъ, вращеніе совершается въ направленіи движенія часовой стрѣлки.

Угловая скорость вращенія всего прибора со штативомъ около оси z-овъ будетъ $\frac{d\chi}{dt}=\chi'$, а угловое ускореніе $\frac{d^2\chi}{dt^2}=\chi''$.

Какая нибудь точка, находящаяся въ разстояніи r отъ оси вращенія маятника, или, что то-же самое, въ виду малости угла наклона i, отъ оси z-овъ, будетъ имѣть *линейное ускореніе* $r\chi''$. Это ускореніе направлено, для любой точки M, всегда перпендикулярно къ плечу r.

Изучая *относительное* движеніе маятника, по отношенію къ переноснымъ координатнымъ осямъ ξ, η, ζ, мы должны ввести новую силу инерціи $mr\chi''$.

Это будетъ такъ называемая *обратно-поворотная* сила. Моментъ этой силы для массы m будетъ

$$mr^2\chi''.$$

Сила эта направлена въ сторону возрастающихъ угловъ θ (при $\chi''>0$). Такъ какъ χ'' одно и то-же для всѣхъ точекъ маятника, то полный добавочный моментъ этой силы инерціи будетъ

$$\chi''\Sigma mr^2 = K.\chi''.$$

Присоединивъ эту величину къ ранѣе выведенному выраженію момента $\mathfrak{M}$, и, подставивъ соотвѣтствующую величину въ основную формулу (4), получимъ

$$\theta'' + \frac{gi}{l}\theta + \frac{1}{l}(x'' - g\psi) = \chi'' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

При предыдущихъ выводахъ и разсужденіяхъ мы вовсе не принимали во вниманіе тѣ особыя силы, которыя сопротивляются движенію маятника, какъ, напримѣръ, треніе и пр.; ихъ слѣдуетъ теперь учесть и ввести въ общее выраженіе момента $\mathfrak{M}$.

Не входя ближе въ разсмотрѣніе природы этихъ силъ, мы будемъ просто считать, что соотвѣтствующій моментъ пропорціоналенъ угловой скорости движенія маятника $\frac{d\theta}{dt} = \theta'$. Послѣднее условіе, какъ мы видѣли раньше, строго выполняется при примѣненіи магнитнаго затуханія. Такъ какъ эти силы всегда противодѣйствуютъ движенію маятника, то моментъ ихъ будетъ отрицательный, а, слѣдовательно, въ лѣвой части уравненія (21) соотвѣтственный членъ войдетъ со знакомъ (+).

Обозначивъ соотвѣтствующій коеффиціентъ при θ' черезъ 2ε, гдѣ ε называется *постоянной затуханія*, получимъ слѣдующее окончательное общее дифференціальное уравненіе движенія горизонтальнаго маятника:

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta + \frac{1}{l}(x'' - g\psi) = \chi'', \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

гдѣ

$$n^2 = \frac{gi}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

Формула (22) показываетъ, что на движеніе горизонтальнаго маятника, установленнаго въ первомъ вертикалѣ, вліяютъ три элемента движенія почвы, а именно: во-первыхъ, смѣщеніе параллельное оси x-овъ, во-вторыхъ, вращеніе около оси y-овъ и, въ-третьихъ, вращеніе около оси z-овъ.

Послѣднее вращеніе для дальнихъ землетрясеній мы можемъ положить равнымъ нулю и вовсе не разсматривать.

Такимъ образомъ, мы видимъ, что движеніе горизонтальнаго маятника зависитъ, вообще говоря, не отдѣльно отъ x'' или ψ, но отъ *комбинаціи* этихъ величинъ $x'' - g\psi$.

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta + \frac{1}{l}(x'' - g\psi) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

Слѣдовательно, строго говоря, одинъ горизонтальный маятникъ не даетъ еще возможности изучать горизонтальныя смѣщенія почвы, независимо отъ наклоновъ, такъ какъ дѣйствительное движеніе маятника обусловливается всегда совокупнымъ дѣйствіемъ обоихъ этихъ факторовъ, но, такъ какъ для дальнихъ землетрясеній наклоны почвы, благодаря большой длинѣ поверхностныхъ сейсмическихъ волнъ, какъ мы раньше видѣли, совершенно ничтожны, то, въ огромномъ большинствѣ случаевъ, мы можемъ вліяніемъ наклоновъ совершенно пренебречь и привести, такимъ образомъ, основное дифференціальное уравненіе движенія маятника къ слѣдующей простой, канонической формѣ:

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta + \frac{x''}{l} = 0 \dots\dots\dots\dots\dots (25)$$

Въ этомъ случаѣ горизонтальный маятникъ можетъ служить уже исключительно для изслѣдованія смѣщеній почвы, параллельныхъ оси x-овъ. Другой такой маятникъ, установленный въ меридіанѣ, дастъ возможность изслѣдовать смѣщенія почвы, параллельныя оси y-овъ. Слѣдовательно, два горизонтальныхъ маятника, установленныхъ подъ прямымъ угломъ другъ къ другу, даютъ возможность всесторонне изучить горизонтальныя смѣщенія почвы при отдаленныхъ землетрясеніяхъ.

Уравненіе (25) и послужитъ намъ основаніемъ для дальнѣйшихъ выводовъ и заключеній.

---

§ 2.

Изслѣдованіе собственнаго движенія маятника.

Предположимъ теперь, что поверхность земли находится въ покоѣ; въ этомъ случаѣ $x'' = 0$.

Тогда дифференціальное уравненіе *собственнаго движенія* маятника представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta = 0 \dots\dots\dots\dots\dots (26)$$

ε и n^2 суть двѣ характерныя постоянныя прибора.

Для горизонтальнаго маятника величина постоянной n^2 опредѣляется формулой (23) $\left(n^2 = \frac{gi}{l}\right)$, а для простого вертикальнаго маятника, съ гори-

зонтальной осью вращенія, $n^2 = \frac{g}{l}$. Такимъ образомъ, уравненіе (26) обнимаетъ, въ сущности, собою теорію собственнаго движенія обоихъ типовъ маятниковъ.

Уравненіе (26) представляетъ собою простое линейное дифференціальное уравненіе второго порядка съ постоянными коеффиціентами.

Для интегрированія таковаго полагаемъ, согласно извѣстному пріему,

$$\theta = e^{-\alpha t}.$$

Тогда

$$\theta' = -\alpha e^{-\alpha t}$$

и

$$\theta'' = +\alpha^2 e^{-\alpha t}.$$

Подставляя эти величины въ уравненіе (26), получимъ слѣдующее квадратное уравненіе:

$$\alpha^2 - 2\varepsilon\alpha + n^2 = 0.$$

Это уравненіе имѣетъ два корня α_1 и α_2.

и

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= +\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - n^2} \\ \alpha_2 &= +\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - n^2} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

Тогда *общій* интегралъ уравненія (26) представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$\theta = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

гдѣ A_1 и A_2 суть двѣ *совершенно произвольныя* постоянныя интегрированія, обусловливаемыя начальными условіями движенія, т.-е. значеніями θ и θ' при $t = 0$.

Въ справедливости формулы (28) можно убѣдиться непосредственной подстановкой выраженія θ въ уравненіе (26).

Здѣсь надо, однако, различать два случая.

I-ый случай: $\varepsilon > n$.

Тогда α_1 и α_2 оба вещественны и положительны, причемъ $\alpha_1 > \alpha_2$.

Положимъ, что при $t = 0$, маятникъ былъ въ покоѣ и что въ этотъ моментъ маятнику данъ толчекъ, сообщившій ему начальную угловую скорость θ_0'.

Такъ какъ

$$\theta' = -\left[\alpha_1 A_1 e^{-\alpha_1 t} + \alpha_2 A_2 e^{-\alpha_2 t}\right], \ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

то, для опредѣленія постоянныхъ A_1 и A_2, мы будемъ имѣть слѣдующія два соотношенія:

$$0 = A_1 + A_2$$

и

$$-\theta_0' = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2,$$

откуда находимъ

$$A_2 = -A_1,$$

$$A_1 = -\frac{\theta_0'}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

и

$$A_2 = +\frac{\theta_0'}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

Слѣдовательно,

$$\theta = \frac{\theta_0'}{\alpha_1 - \alpha_2}\left[e^{-\alpha_2 t} - e^{-\alpha_1 t}\right]. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

Таково будетъ, въ этомъ случаѣ, уравненіе движенія маятника.

Такъ какъ $\alpha_1 > \alpha_2$, то второй членъ въ скобкахъ убываетъ, при возрастаніи t, быстрѣе перваго и θ будетъ *всегда положительно.*

θ будетъ равно 0 при $t = 0$ и при $t = \infty$.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что въ этомъ случаѣ движеніе маятника будетъ апеpіодическое.

Такое движеніе представлено кривой на предыдущемъ чертежѣ 75.

Опредѣлимъ теперь максимальный уголъ отклоненія маятника θ_m.

Соотвѣтствующій моментъ t_m опредѣлится изъ условія

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.$$

Слѣдовательно,

$$-\alpha_2 e^{-\alpha_2 t_m} + \alpha_1 e^{-\alpha_1 t_m} = 0$$

или

$$-\alpha_2 e^{(\alpha_1 - \alpha_2) t_m} + \alpha_1 = 0.$$

Отсюда находимъ

$$t_m = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \lg\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \lg\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}} \ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

Подставимъ теперь это значеніе для t_m въ формулу (30).

Тогда

$$\theta_m = \frac{\theta_0'}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \left[e^{-\alpha_2 \lg \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}}} - e^{-\alpha_1 \lg \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}}} \right] =$$

$$= \frac{\theta_0'}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \left[\frac{1}{e^{\lg \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}}}} - \frac{1}{e^{\lg \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}}}} \right]$$

или

$$\theta_m = \frac{\theta_0'}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \left[\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}} - \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}} \right]$$

$$= \frac{\theta_0'}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \left[\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}} - \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\frac{\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}} \right]$$

$$= \frac{\theta_0'}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}} \left[1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right]$$

$$= \theta_0' \cdot \frac{(\alpha_2)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}}}{\alpha_1 \cdot (\alpha_1)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}}},$$

или, окончательно,

$$\theta_m = \theta_0' \cdot \frac{(\alpha_2)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}}}{(\alpha_1)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}}} = \theta_0' \sqrt[\alpha_1 - \alpha_2]{\frac{\alpha_2^{\alpha_2}}{\alpha_1^{\alpha_1}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

Эта формула имѣетъ очень оригинальный видъ.

Разсмотримъ еще предѣльный случай, когда

$$\varepsilon = n$$

или

$$\alpha_1 = \alpha_2 = n.$$

Этотъ случай соотвѣтствуетъ *границѣ апеseveralріодичности*.

Тогда уравненіе (30) принимаетъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$.

Чтобы избавиться отъ неопредѣленности, положимъ

$$\alpha_1 = \alpha_2 + \xi,$$

гдѣ ξ очень маленькая величина. Разовьемъ въ этомъ предположеніи формулу (30) и положимъ затѣмъ въ предѣлѣ $\xi = 0$.

$$e^{-\alpha_1 t} = e^{-\alpha_2 t} . e^{-\xi t} = e^{-\alpha_2 t}\left[1 - \xi t + \frac{1}{2}\xi^2 t^2 - \ldots.\right],$$

слѣдовательно,

$$\theta = \frac{\theta_0'}{\xi} e^{-\alpha_2 t}\left[1 - \left\{1 - \xi t + \frac{1}{2}\xi^2 t^2 - \ldots.\right\}\right].$$

Въ предѣлѣ будемъ имѣть

$$\theta = \theta_0' . t e^{-nt} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

Эта формула показываетъ намъ, что θ всегда положительно. θ будетъ равно 0 при $t = 0$ и $t = \infty$, т.-е. и въ этомъ случаѣ движеніе маятника будетъ тоже апеsevernoе.

Максимальный уголъ отклоненія θ_m опредѣлится по тому-же пріему. Условіе $\frac{d\theta}{dt} = 0$ даетъ

$$e^{-nt_m} - nt_m e^{-nt_m} = 0$$

или

$$t_m = \frac{1}{n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

Слѣдовательно,

$$e^{-nt_m} = \frac{1}{e}$$

и

$$\theta_m = \frac{\theta_0'}{ne} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

Эта формула отличается большой простотой. Эту-же формулу можно получить и изъ общаго выраженія (32). Рѣшеніе этого вопроса представляетъ собою интересную математическую задачу.

II-й случай: $\varepsilon < n$.

Въ этомъ случаѣ постоянныя α_1 и α_2, входящія въ формулу (28), будутъ мнимыя.

Введемъ слѣдующее обозначеніе:

$$\gamma = +\sqrt{n^2 - \varepsilon^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (36)$$

Тогда, на основаніи формулъ (27), мы можемъ положить

$$\alpha_1 = \varepsilon + \gamma i$$

и

$$\alpha_2 = \varepsilon - \gamma i,$$

гдѣ

$$i = \sqrt{-1}.$$

Подставляя эти выраженія въ формулу (28), будемъ имѣть

$$\theta = e^{-\varepsilon t}\left[A_1 e^{-\gamma t.i} + A_2 e^{\gamma t.i}\right].$$

Но, по формулѣ Моавра,

$$e^{\gamma t.i} = \cos\gamma t + i\sin\gamma t$$

и

$$e^{-\gamma t.i} = \cos\gamma t - i\sin\gamma t.$$

Подставляя эти величины, получимъ

$$\theta = e^{-\varepsilon t}\left[(A_2 + A_1)\cos\gamma t + (iA_2 - iA_1)\sin\gamma t\right].$$

$(A_2 + A_1)$ и $(iA_2 - iA_1)$ суть двѣ *совершенно произвольныя* постоянныя, которыя мы можемъ обозначить черезъ C_1 и C_2.

Тогда общій интегралъ уравненія (26) представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$\theta = e^{-\varepsilon t}\left[C_1\cos\gamma t + C_2\sin\gamma t\right] \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

Постоянныя произвольныя опредѣлятся, какъ и раньше, изъ начальныхъ условій движенія.

Легко убѣдиться, что это выраженіе для θ, опредѣляемое формулой (37), дѣйствительно удовлетворяетъ уравненію движенія маятника (уравненіе (26)) для любого момента t и при всякихъ значеніяхъ постоянныхъ C_1 и C_2.

Сдѣлаемъ эту провѣрку. Изъ формулы (37) находимъ

$$\theta' = e^{-\varepsilon t}\left[-\varepsilon C_1\cos\gamma t - \varepsilon C_2\sin\gamma t - \gamma C_1\sin\gamma t + \gamma C_2\cos\gamma t\right]$$

или

$$\theta' = e^{-\varepsilon t}\left[(\gamma C_2 - \varepsilon C_1)\cos\gamma t + (-\varepsilon C_2 - \gamma C_1)\sin\gamma t\right] \;\ldots\ldots (38)$$

Далѣе имѣемъ

$$\theta'' = e^{-\varepsilon t}\left[-\varepsilon(\gamma C_2 - \varepsilon C_1)\cos\gamma t + \varepsilon(\varepsilon C_2 + \gamma C_1)\sin\gamma t\right.$$
$$\left.- \gamma(\gamma C_2 - \varepsilon C_1)\sin\gamma t + \gamma(-\varepsilon C_2 - \gamma C_1)\cos\gamma t\right]$$

или

$$\theta'' = e^{-\varepsilon t}\left[\{-2\varepsilon\gamma C_2 + (\varepsilon^2-\gamma^2)\,C_1\}\cos\gamma t + \{(\varepsilon^2-\gamma^2)\,C_2 + 2\varepsilon\gamma C_1\}\sin\gamma t\right]\ldots(39)$$

Подставляя теперь выраженія для θ, θ' и θ'' изъ формулъ (37), (38) и (39) въ уравненіе (26), мы увидимъ, во-первыхъ, что войдетъ общій множитель $e^{-\varepsilon t}$, на который можно, слѣдовательно, сократить полученное выраженіе.

Группируя затѣмъ вмѣстѣ члены, имѣющіе множителями $\cos\gamma t$ и $\sin\gamma t$, получимъ

$$[-2\varepsilon\gamma C_2 + (\varepsilon^2-\gamma^2)\,C_1 + 2\varepsilon\gamma C_2 - 2\varepsilon^2 C_1 + n^2 C_1]\cos\gamma t$$

$$+ [(\varepsilon^2-\gamma^2)\,C_2 + 2\varepsilon\gamma C_1 - 2\varepsilon^2 C_2 - 2\varepsilon\gamma C_1 + n^2 C_2]\sin\gamma t = 0$$

или

$$C_1\{n^2-\varepsilon^2-\gamma^2\}\cos\gamma t + C_2\{n^2-\varepsilon^2-\gamma^2\}\sin\gamma t = 0.$$

Но, такъ какъ, на основаніи формулы (36),

$$\gamma^2 = n^2 - \varepsilon^2,$$

то предыдущее уравненіе будетъ тождественно равно нулю при всякихъ значеніяхъ t, C_1 и C_2.

Изслѣдуемъ теперь собственное движеніе маятника, опредѣляемое уравненіемъ (37).

Для опредѣленія постоянныхъ C_1 и C_2 предположимъ опять, что, при $t=0$,

$$\theta = 0$$

и

$$\theta' = \theta_0'.$$

Положивши въ формулѣ (37) $t=0$, найдемъ что

$$C_1 = 0.$$

Для опредѣленія C_2 обратимся къ формулѣ (38).

Положивши въ ней t и C_1 равными нулю, получимъ

$$\theta_0' = \gamma C_2$$

или

$$C_2 = \frac{\theta_0'}{\gamma}.$$

Такимъ образомъ, уравненіе движенія маятника представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$\theta = \frac{\theta_0'}{\gamma} \cdot e^{-\varepsilon t} \sin \gamma t \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (40)$$

Изслѣдуемъ теперь ближе характеръ этого движенія.

При $t = 0$, $\theta = 0$. Съ увеличеніемъ t, θ вначалѣ возрастаетъ. Первый максимумъ для θ наступитъ тогда, когда $\frac{d\theta}{dt} = 0$. Соотвѣтствующій моментъ обозначимъ черезъ t_1.

Уравненіе

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta_0'}{\gamma} e^{-\varepsilon t} [-\varepsilon \sin \gamma t + \gamma \cos \gamma t] = 0$$

даетъ

$$\operatorname{tg} \gamma t = \frac{\gamma}{\varepsilon} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (41)$$

или

$$t_1 = \frac{1}{\gamma} \operatorname{arctg} \frac{\gamma}{\varepsilon} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (42)$$

Итакъ, первый корень уравненія (41) даетъ намъ искомый моментъ t_1. Соотвѣтствующій максимальный уголъ отклоненія маятника обозначимъ черезъ θ_1.

Тогда

$$\theta_1 = \frac{\theta_0'}{\gamma} e^{-\varepsilon t_1} \sin \gamma t_1.$$

Съ другой стороны,

$$\sin \gamma t_1 = \frac{\operatorname{tg} \gamma t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma t_1}} = \frac{\frac{\gamma}{\varepsilon}}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\varepsilon^2}}} = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + \varepsilon^2}},$$

гдѣ

$$\gamma^2 = n^2 - \varepsilon^2; \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (43)$$

слѣдовательно,

$$\sin \gamma t_1 = \frac{\gamma}{n}$$

и

$$\theta_1 = \frac{\theta_0'}{n} \cdot e^{-\varepsilon t_1} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (44)$$

Найдемъ теперь второй максимумъ θ_2.

Соотвѣтствующій моментъ обозначимъ черезъ t_2.

t_2 есть второй по величинѣ корень уравненія (41).

Тангенсъ нѣкотораго угла воспринимаетъ ту-же величину, когда самый уголъ увеличивается на π, слѣдовательно,

$$\gamma t_2 = \gamma t_1 + \pi$$

или

$$t_2 = t_1 + \frac{\pi}{\gamma}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\sin \gamma t_2 = \sin(\gamma t_1 + \pi) = -\frac{\gamma}{n}$$

и

$$\theta_2 = -\frac{\theta_0'}{n} \cdot e^{-\varepsilon t_2}.$$

Точно также найдемъ

$$t_3 = t_2 + \frac{\pi}{\gamma} = t_1 + 2\frac{\pi}{\gamma}$$

и

$$\theta_3 = \frac{\theta_0'}{n} e^{-\varepsilon t_3}$$

и т. д.

Вообще

$$\theta_k = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\theta_0'}{n} e^{-\varepsilon t_k}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (45)$$

гдѣ

$$t_k = t_1 + (k-1)\frac{\pi}{\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (46)$$

Мы видимъ, такимъ образомъ, что максимальныя амплитуды размаховъ маятника будутъ поперемѣнно то положительны, то отрицательны, причемъ абсолютная величина этихъ амплитудъ съ теченіемъ времени постепенно убываетъ.

Возьмемъ отношеніе *абсолютныхъ величинъ* двухъ какихъ-нибудь послѣдующихъ максимальныхъ амплитудъ, напр. $\frac{\theta_k}{\theta_{k+1}}$.

Тогда изъ формулъ (45) и (46) будемъ имѣть

$$\frac{\theta_k}{\theta_{k+1}} = e^{\varepsilon(t_{k+1} - t_k)} = e^{\pi\frac{\varepsilon}{\gamma}}.$$

Это отношеніе, которое мы обозначимъ черезъ v, есть, такимъ образомъ, величина постоянная. Эта величина называется *коеффиціентомъ затуханія* (въ нѣмецкой терминологіи Dämpfungsverhältnis).

Итакъ,

$$v = \frac{\theta_k}{\theta_{k+1}} = e^{\pi\frac{\varepsilon}{\gamma}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (47)$$

Мы видимъ, такимъ образомъ, что максимальныя амплитуды размаховъ

маятника убываютъ въ геометрической прогрессіи. Соотвѣтствующая кривая движенія маятника представлена на предыдущемъ чертежѣ 74 (см. стр. 259).

Время, протекшее между двумя послѣдующими максимумами, *на той-же сторонѣ* оси временъ, будетъ полнымъ періодомъ движенія маятника.

Обозначимъ его черезъ T'.

Изъ формулы (46) видно, что

$$T' = \frac{2\pi}{\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(48)}$$

Мы видимъ, такимъ образомъ, что кривая движенія горизонтальнаго маятника представляетъ собою затухающую синусоиду съ періодомъ T'.

Если маятникъ не обладалъ-бы никакимъ затуханіемъ, то мы имѣли-бы

$$\varepsilon = 0$$

и

$$\gamma = n.$$

Въ этомъ случаѣ

$$v = 1$$

и

$$T' = T = \frac{2\pi}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(49)}$$

То-есть, кривая движенія маятника была-бы обыкновенной синусоидой съ періодомъ $T = \frac{2\pi}{n}$.

Такимъ образомъ, T представляетъ собою собственный періодъ колебаній маятника при отсутствіи всякаго затуханія. Величина этого періода обуславливается только значеніемъ приведенной длины маятника l, величиной ускоренія силы тяжести g и угломъ наклона оси вращенія маятника i (см. формулу (23)).

Изъ формулъ (48) и (36) слѣдуетъ, что

$$T' > T,$$

то-есть, съ увеличеніемъ затуханія, увеличивается и собственный періодъ колебаній маятника.

Обыкновенный логариѳмическій декрементъ Λ получится прямо изъ формулы (47):

$$\Lambda = \operatorname{Log}_{10} v = \pi \frac{\varepsilon}{\gamma} \operatorname{Log}_{10} e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(50)}$$

Посмотримъ теперь, какимъ образомъ можно опредѣлить изъ опыта

двѣ характерныя постоянныя маятника ε и n, входящія въ основное дифференціальное уравненіе его движенія (формула (26)).

Изъ наблюденій мы можемъ опредѣлить, какъ собственный періодъ колебаній маятника T', такъ и соотвѣтствующій логариѳмическій декрементъ Λ, опредѣляя изъ опыта рядъ послѣдующихъ максимальныхъ амплитудъ θ_k.

Зная T' и Λ легко опредѣлить n $\left(\text{или } T=\frac{2\pi}{n}\right)$ и ε.

Изъ формулъ (49) и (43) слѣдуетъ, что

$$T=\frac{2\pi}{n}=\frac{2\pi}{\sqrt{\gamma^2+\varepsilon^2}}=\frac{2\pi}{\gamma}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)^2}}.$$

Съ другой стороны, $\frac{2\pi}{\gamma}=T'$ (см. формулу (48)), а, изъ формулы (50),

$$\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)^2=\frac{1}{(\pi \operatorname{Log} e)^2}\cdot\Lambda^2=0{,}53720\,\Lambda^2 \qquad (51)$$

Слѣдовательно,

$$T=\frac{T'}{\sqrt{1+0{,}53720\,\Lambda^2}} \qquad (52)$$

и

$$n=\frac{2\pi}{T'}\cdot\sqrt{1+0{,}53720\,\Lambda^2} \qquad (53)$$

Что-же касается постоянной ε, то она опредѣлится непосредственно изъ формулы (50):

$$\varepsilon=\frac{\Lambda}{\pi\operatorname{Log} e}\cdot\gamma=\frac{\Lambda}{\pi\operatorname{Log} e}\cdot\frac{2\pi}{T'}=\frac{2}{\operatorname{Log} e}\cdot\frac{\Lambda}{T'}$$

или

$$\varepsilon=4{,}6052\cdot\frac{\Lambda}{T'} \qquad (54)$$

Наблюдая T' и Λ можно, слѣдовательно, легко опредѣлить обѣ постоянныя n и ε, а также и T.

Замѣняя въ выраженіи (54) T' соотвѣтствующей величиной изъ формулы (52), получимъ

$$\varepsilon=4{,}6052\cdot\frac{1}{T}\cdot\frac{\Lambda}{\sqrt{1+0{,}53720\,\Lambda^2}} \qquad (55)$$

Въ цѣляхъ упрощенія различныхъ формулъ и облегченія дальнѣйшихъ выкладокъ, цѣлесообразно ввести теперь уже слѣдующія новыя обозначенія, а именно

$$h=\frac{\varepsilon}{n} \qquad (56)$$

и

$$\mu^2 = 1 - h^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (57)$$

Тогда

$$\gamma = \sqrt{n^2 - \varepsilon^2} = n\sqrt{1 - h^2} = n\mu \ldots\ldots\ldots\ldots (58)$$

и

$$\frac{\varepsilon}{\gamma} = \frac{h}{\mu} = \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu} \ldots\ldots\ldots\ldots (59)$$

Подставляя эту послѣднюю величину въ формулу (47), получимъ

$$v = e^{\pi\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}} \ldots\ldots\ldots\ldots (60)$$

Съ другой стороны, изъ формулъ (53) и (54) слѣдуетъ, что

$$h = \frac{\varepsilon}{n} = \frac{4,6052}{2\pi} \cdot \frac{\Lambda}{\sqrt{1 + 0,53720\,\Lambda^2}}$$

или

$$h = 0,7330\,\frac{\Lambda}{\sqrt{1 + 0,53720\,\Lambda^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots (61)$$

Такимъ образомъ h, а, слѣдовательно, и μ^2, не зависятъ вовсе отъ собственнаго періода колебаній маятника T', а обусловливаются исключительно только величиной соотвѣтствующаго логариѳмическаго декремента Λ.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ характеризовать силу затуханія горизонтальнаго маятника не величиной постоянной ε, ни величиной коэффиціента затуханія v, ни даже величиной логариѳмическаго декремента Λ, но величиной коэффиціента μ^2, который мы, слѣдовательно, и примемъ за мѣру, опредѣляющую степень затуханія прибора.

Изъ дальнѣйшаго будетъ видно, что коэффиціентъ μ^2, который мы условно будемъ называть *постоянной затуханія*, является наиболѣе характерной величиной, опредѣляющей степень затуханія, когда приборъ находится невдалекѣ отъ границы апеaccording періодичности.

Взявъ, такимъ образомъ, μ^2 за перемѣнную независимую, можно, по формуламъ (57) и (60), вычислить соотвѣтствующія величины h и *коэффиціента* затуханія v.

Числа эти приведены въ таблицѣ I особаго Сборника сейсмометрическихъ таблицъ (Seismometrische Tabellen), изданнаго Постоянной Центральной Сейсмической Комиссіей, состоящей при Императорской Академіи Наукъ.

При $\mu^2 = 1$, $h = 0$ и $v = 1$, т.-е. приборъ совсѣмъ безъ затуханія.

При $\mu^2 = 0$, $h = 1$, такъ какъ $\varepsilon = n$, и $v = \infty$. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ приборъ находится на границѣ аперіодичности.

При $\mu^2 = 0,79$, v равно, приблизительно, 5. Это тотъ коэффиціентъ затуханія, который чаще всего примѣняется въ Германіи.

Съ уменьшеніемъ μ^2, v, какъ то видно изъ только что упомянутой таблицы I, очень быстро возрастаетъ. Напримѣръ, при $\mu^2 = 0,10$, v уже равно 12400. Это уже громадный коэффиціентъ затуханія, при которомъ маятникъ, по своимъ свойствамъ, весьма мало отличается отъ вполнѣ апеpіодическаго прибора.

Въ заключеніе посмотримъ, во что обратится уравненіе движенія маятника, характеризуемое формулой (40), когда маятникъ находится какъ разъ на границѣ апеpіодичности, т.-е. когда

$$\mu^2 = 0,$$

$$\varepsilon = n$$

и

$$\gamma = 0.$$

Формула (40) принимаетъ въ этомъ случаѣ неопредѣленый видъ $\frac{0}{0}$. Для исключенія этой неопредѣленности разложимъ $\sin \gamma t$ въ рядъ по степенямъ γt и затѣмъ перейдемъ къ предѣлу $\gamma = 0$.

$$\frac{\sin \gamma t}{\gamma} = \frac{1}{\gamma}\left[\gamma t - \frac{1}{6}\gamma^3 t^3\right] = t - \frac{1}{6}\gamma^2 t^3.$$

Итакъ, въ предѣлѣ, на границѣ апеpіодичности,

$$\theta = \theta_0' t . e^{-nt} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (62)$$

Мы получили, такимъ образомъ, то-же самое уравненіе (33), которое мы вывели раньше, исходя изъ апеpіодическаго движенія прибора.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что, въ зависимости отъ того, будетъ-ли ε больше или меньше n, собственное движеніе маятника будетъ или апеpіодическое, или періодическое съ затуханіемъ.

Особенно интересенъ и на практикѣ важенъ тотъ случай, когда маятникъ установленъ какъ разъ на границу апеpіодичности, т.-е. когда $\mu^2 = 0$.

Въ этомъ случаѣ разныя формулы, съ которыми мы впослѣдствіи познакомимся, принимаютъ особенно простой и удобный для вычисленія видъ, чѣмъ въ значительной мѣрѣ упрощается обработка сейсмограммъ.

На практикѣ, при пользованіи ранѣе описанными горизонтальнымъ и вертикальнымъ сейсмографами съ магнитнымъ затуханіемъ и гальваноме-

трической регистраціей, слѣдуетъ всегда, по возможности, устанавливать ихъ строго на границу апеperiодичности.

Какъ это практически осуществить, мы увидимъ впослѣдствіи въ § 3 главы VII.

---

§ 3.

Движеніе маятника подъ вліяніемъ горизонтальныхъ смѣщеній почвы.

Для изслѣдованія этого вопроса, обратимся къ ранѣе выведенному дифференціальному уравненію движенія маятника (формула (25)).

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta + \frac{x''}{l} = 0 \qquad (25)$$

Горизонтальное смѣщеніе почвы x въ направленіи меридіана есть нѣкоторая функція отъ t:

$$x = f(t) \qquad (14)$$

Возьмемъ вторую производную отъ x и положимъ

$$-\frac{1}{l}x'' = -\frac{1}{l}f''(t) = A\,\Phi(t) \qquad (63)$$

Тогда

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta = A\,\Phi(t) \qquad (64)$$

Предположимъ дальше, что $\varepsilon < n$, т.-е., что собственное движеніе маятника періодическое, но съ затуханіемъ.

Для интегрированія линейнаго дифференціальнаго уравненія вида формулы (64), гдѣ въ правой части равенства стоитъ нѣкоторая заданная функція $\Phi(t)$, примѣняется методъ измѣненія постоянныхъ произвольныхъ.

Методъ этотъ заключается въ слѣдующемъ.

Сначала полагаютъ $\Phi(t)$ равнымъ нулю.

Тогда общій интегралъ уравненія (64) можетъ, какъ мы раньше видѣли, быть представленъ въ слѣдующемъ видѣ (см. формулу (37)):

$$\theta = e^{-\varepsilon t}\left[C_1 \cos\gamma t + C_2 \sin\gamma t\right], \qquad (37)$$

гдѣ $\gamma = +\sqrt{n^2 - \varepsilon^2}$, а C_1 и C_2 суть двѣ произвольныя *постоянныя*.

Когда-же въ правой части дифференціальнаго уравненія (64) стоитъ функція $\Phi(t)$, то выраженіе вида (37) не будетъ уже болѣе удовлетворять данному дифференціальному уравненію, если только C_1 и C_2 будутъ величинами постоянными. Но мы можемъ все-таки представить общій интегралъ уравненія (64) выраженіемъ вида формулы (37), если только будемъ считать C_1 и C_2 не постоянными, а нѣкоторыми *функціями времени* t.

Весь вопросъ сводится, такимъ образомъ, къ нахожденію этихъ двухъ функцій.

Такъ какъ такихъ функцій двѣ, а дифференціальное уравненіе, которому онѣ должны удовлетворять, одно, то мы можемъ наложить на эти функціи одно добавочное условіе по нашему выбору.

Возьмемъ теперь первую производную отъ θ по времени (см. формулу (38)).

Тогда

$$\theta' = e^{-\varepsilon t}[(\gamma C_2 - \varepsilon C_1)\cos\gamma t + (-\varepsilon C_2 - \gamma C_1)\sin\gamma t]$$
$$+ e^{-\varepsilon t}[C_1'\cos\gamma t + C_2'\sin\gamma t].$$

То условіе, которое мы налагаемъ на функціи C_1 и C_2, пусть будетъ слѣдующее:

$$C_1'\cos\gamma t + C_2'\sin\gamma t = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (65)$$

Возьмемъ теперь вторую производную отъ θ по времени, принимая во вниманіе условіе (65) (см. формулу (39)).

Тогда

$$\theta'' = e^{-\varepsilon t}[\{-2\varepsilon\gamma C_2 + (\varepsilon^2 - \gamma^2)C_1\}\cos\gamma t + \{(\varepsilon^2 - \gamma^2)C_2 + 2\varepsilon\gamma C_1\}\sin\gamma t]$$
$$+ e^{-\varepsilon t}[\{\gamma\cos\gamma t - \varepsilon\sin\gamma t\}C_2' - \{\varepsilon\cos\gamma t + \gamma\sin\gamma t\}C_1'].$$

Подставивъ теперь выраженія для θ, θ' и θ'' въ дифференціальное уравненіе (64), и, принимая во вниманіе, что, согласно предыдущему, всѣ члены, содержащіе множителями C_1 и C_2 тождественно равны нулю, такъ какъ θ, при постоянныхъ значеніяхъ C_1 и C_2, есть интегралъ дифференціальнаго уравненія (64), при условіи $\Phi(t) = 0$, будемъ имѣть

$$e^{-\varepsilon t}[\{\gamma\cos\gamma t - \varepsilon\sin\gamma t\}C_2' - \{\varepsilon\cos\gamma t + \gamma\sin\gamma t\}C_1'] = A\,\Phi(t)\ldots(66)$$

Такимъ образомъ, изъ уравненій (65) и (66) опредѣлятся значенія C'_1 и C'_2.

Изъ формулы (65) имѣемъ

$$C_2' = -\frac{\cos\gamma t}{\sin\gamma t}\cdot C_1' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (67)$$

Подставивъ эту величину въ формулу (66), получимъ

$$\left[-\gamma\frac{\cos^2\gamma t}{\sin\gamma t} + \varepsilon\cos\gamma t - \varepsilon\cos\gamma t - \gamma\sin\gamma t\right] C_1' = A\,.\,e^{\varepsilon t}\Phi(t)$$

или

$$C_1' = -\frac{A}{\gamma}\cdot\sin\gamma t\,.\,e^{\varepsilon t}\Phi(t);$$

формула-же (67) даетъ

$$C_2' = \frac{A}{\gamma}\cdot\cos\gamma t\,.\,e^{\varepsilon t}\Phi(t).$$

Взявъ неопредѣленные интегралы отъ этихъ выраженій, и обозначивъ черезъ Γ_1 и Γ_2 двѣ *постоянныя* произвольныя, получимъ

$$C_1 = \Gamma_1 - \frac{A}{\gamma}\int e^{\varepsilon t}\sin\gamma t\,.\,\Phi(t)\,dt$$

и

$$C_2 = \Gamma_2 + \frac{A}{\gamma}\int e^{\varepsilon t}\cos\gamma t\,.\,\Phi(t)\,dt.$$

Такимъ образомъ функціи C_1 и C_2 найдены.

Подставивъ эти величины въ формулу (37), найдемъ окончательно

$$\theta = e^{-\varepsilon t}\left[\Gamma_1\cos\gamma t + \Gamma_2\sin\gamma t\right]$$

$$+\frac{A}{\gamma}e^{-\varepsilon t}\left[-\cos\gamma t\int e^{\varepsilon t}\sin\gamma t\,.\,\Phi(t)\,dt + \sin\gamma t\int e^{\varepsilon t}\cos\gamma t\,.\,\Phi(t)dt\right]\ldots (68)$$

Это выраженіе представляетъ собою общій интегралъ дифференціальнаго уравненія (64), такъ какъ данное значеніе θ ему удовлетворяетъ, и, кромѣ того, выраженіе для θ содержитъ въ себѣ двѣ произвольныя постоянныя Γ_1 и Γ_2, которыя опредѣляются изъ начальныхъ условій движенія.

Въ этомъ выраженіи для θ функція $\Phi(t)$ или $f(t)$ (см. формулы (63) и (14)) совершенно произвольная.

Разсмотримъ теперь частный случай *гармоническаго движенія почвы*.

Согласно этому, положимъ

$$x = x_m\sin(pt + \delta), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (69)$$

гдѣ x_m есть максимальная амплитуда смѣщенія почвы, а δ начальная фаза.

Соотвѣтствующій періодъ сейсмической волны будетъ

$$T_p = \frac{2\pi}{p} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (70)$$

Изъ уравненія (69) находимъ

$$x'' = -x_m p^2 \sin(pt + \delta),$$

а, слѣдовательно, согласно обозначенію (63),

$$A = \frac{p^2}{l} x_m \dots\dots\dots\dots\dots\dots (71)$$

и

$$\Phi(t) = \sin(pt + \delta).$$

Основное дифференціальное уравненіе движенія маятника представится въ этомъ случаѣ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta = A \sin(pt + \delta) \dots\dots\dots\dots (72)$$

Введемъ теперь, для сокращенія письма, слѣдующія обозначенія:

$$\left.\begin{aligned} \gamma t &= \alpha \\ pt + \delta &= \beta \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (73)$$

$$S_1 = \int e^{\varepsilon t} \sin\alpha \,.\, \sin\beta \, dt \dots\dots\dots\dots\dots (74)$$

и

$$S_2 = \int e^{\varepsilon t} \cos\alpha \,.\, \sin\beta \, dt \dots\dots\dots\dots\dots (75)$$

Тогда, на основаніи формулы (68), общій интегралъ уравненія (72) можетъ быть представленъ слѣдующимъ образомъ:

$$\theta = e^{-\varepsilon t}[\Gamma_1 \cos\alpha + \Gamma_2 \sin\alpha] + \frac{A}{\gamma} e^{-\varepsilon t}[-\cos\alpha \,.\, S_1 + \sin\alpha \,.\, S_2] \dots (76)$$

Остается теперь только найти значенія интеграловъ S_1 и S_2.

и

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2}\int e^{\varepsilon t}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]\, dt \\ S_2 &= \frac{1}{2}\int e^{\varepsilon t}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]\, dt \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (77)$$

На основаніи обозначеній (73),

$$\alpha - \beta = (\gamma - p)\,t - \delta$$

и

$$\alpha + \beta = (\gamma + p)\,t + \delta.$$

Положимъ еще

$$\left.\begin{aligned} \gamma - p &= q_1 \\ \gamma + p &= q_2 \end{aligned}\right\} \quad\text{и}\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(78)}$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} \alpha - \beta &= q_1 t - \delta \\ \alpha + \beta &= q_2 t + \delta \end{aligned}\right\} \quad\text{и}\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(79)}$$

При вычисленіи S_1 и S_2 намъ придется имѣть дѣло съ двумя неопредѣленными интегралами слѣдующаго вида:

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \int e^{\varepsilon t} \cos(qt + \sigma)\,dt \\ I_2 &= \int e^{\varepsilon t} \sin(qt + \sigma)\,dt \end{aligned}\right\}, \quad\text{и}\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(80)}$$

гдѣ σ есть нѣкоторая постоянная величина ($\mp \delta$).

Слѣдуя общимъ, извѣстнымъ пріемамъ интегральнаго исчисленія, легко найти для этихъ двухъ неопредѣленныхъ интеграловъ слѣдующія выраженія:

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2 + q^2}\,[q \sin(qt + \sigma) + \varepsilon \cos(qt + \sigma)] \\ I_2 &= \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2 + q^2}\,[\varepsilon \sin(qt + \sigma) - q \cos(qt + \sigma)] \end{aligned}\right\} \quad\text{и}\quad \ldots\ldots\ldots \text{(81)}$$

Въ справедливости этихъ формулъ можно легко убѣдиться непосредственнымъ дифференцированіемъ.

Дѣйствительно,

$$I_1' = \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2 + q^2}\,[\varepsilon q \sin(qt + \sigma) + \varepsilon^2 \cos(qt + \sigma) + q^2 \cos(qt + \sigma) - \varepsilon q \sin(qt + \sigma)]$$

$$= e^{\varepsilon t} \cos(qt + \sigma)$$

и

$$I_2' = \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2 + q^2}\,[\varepsilon^2 \sin(qt + \sigma) - \varepsilon q \cos(qt + \sigma) + \varepsilon q \cos(qt + \sigma) + q^2 \sin(qt + \sigma)]$$

$$= e^{\varepsilon t} \sin(qt + \sigma).$$

Воспользуемся теперь формулами (81) для опредѣленія S_1 и S_2. Согласно предыдущимъ обозначеніямъ, будемъ имѣть:

$$S_1 = \frac{1}{2}\left[\int e^{\varepsilon t}\cos(q_1 t - \delta)\,dt - \int e^{\varepsilon t}\cos(q_2 t + \delta)\,dt\right]$$

$$= \frac{e^{\varepsilon t}}{2}\left[\frac{1}{\varepsilon^2 + q_1^2}\{q_1 \sin(\alpha - \beta) + \varepsilon\cos(\alpha - \beta)\}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\varepsilon^2 + q_2^2}\{q_2 \sin(\alpha + \beta) + \varepsilon\cos(\alpha + \beta)\}\right]$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\left[\int e^{\varepsilon t}\sin(q_2 t + \delta)\,dt - \int e^{\varepsilon t}\sin(q_1 t - \delta)\,dt\right]$$

$$= \frac{e^{\varepsilon t}}{2}\left[\frac{1}{\varepsilon^2 + q_2^2}\{\varepsilon \sin(\alpha + \beta) - q_2\cos(\alpha + \beta)\}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\varepsilon^2 + q_1^2}\{\varepsilon \sin(\alpha - \beta) - q_1\cos(\alpha - \beta)\}\right].$$

Составимъ теперь выраженіе для комбинаціи величинъ

$$S = -\cos\alpha \,.\, S_1 + \sin\alpha \,.\, S_2,$$

входящей въ выраженіе (76).

$$S = -\cos\alpha \,.\, S_1 + \sin\alpha \,.\, S_2 = \frac{e^{\varepsilon t}}{2}\left[\frac{1}{\varepsilon^2 + q_1^2}\{-q_1\cos\alpha\sin(\alpha-\beta) - \varepsilon\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)\right.$$

$$- \varepsilon\sin\alpha\sin(\alpha - \beta) + q_1\sin\alpha\cos(\alpha - \beta)\}$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon^2 + q_2^2}\{q_2\cos\alpha\sin(\alpha + \beta) + \varepsilon\cos\alpha\cos(\alpha + \beta)$$

$$\left. + \varepsilon\sin\alpha\sin(\alpha + \beta) - q_2\sin\alpha\cos(\alpha + \beta)\}\right]$$

$$= \frac{e^{\varepsilon t}}{2}\cdot\left[\frac{1}{\varepsilon^2 + q_1^2}\{q_1\sin\beta - \varepsilon\cos\beta\} + \frac{1}{\varepsilon^2 + q_2^2}\{q_2\sin\beta + \varepsilon\cos\beta\}\right]$$

или

$$S = \frac{e^{\varepsilon t}}{2}\left[\left\{\frac{q_1}{\varepsilon^2 + q_1^2} + \frac{q_2}{\varepsilon^2 + q_2^2}\right\}\sin\beta + \left\{\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + q_2^2} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + q_1^2}\right\}\cos\beta\right].$$

Приведемъ теперь коэффиціенты при $\sin\beta$ и $\cos\beta$ къ одному знаменателю.

$$S = \frac{e^{\varepsilon t}}{2}\cdot\frac{1}{(\varepsilon^2 + q_1^2)(\varepsilon^2 + q_2^2)}\left[\{\varepsilon^2(q_1 + q_2) + q_1 q_2(q_1 + q_2)\}\sin\beta + \varepsilon(q_1^2 - q_2^2)\cos\beta\right]$$

$$= \frac{e^{\varepsilon t}}{2}\cdot\frac{q_1 + q_2}{(\varepsilon^2 + q_1^2)(\varepsilon^2 + q_2^2)}\left[\{\varepsilon^2 + q_1 q_2\}\sin\beta + \varepsilon(q_1 - q_2)\cos\beta\right].$$

Изъ формулъ (78) имѣемъ:

$$q_1 + q_2 = 2\gamma$$

$$q_1 - q_2 = -2p$$

$$q_1 q_2 = \gamma^2 - p^2$$

$$\varepsilon^2 + q_1^2 = \varepsilon^2 + \gamma^2 + p^2 - 2\gamma p$$

$$\varepsilon^2 + q_2^2 = \varepsilon^2 + \gamma^2 + p^2 + 2\gamma p$$

и

$$\varepsilon^2 + q_1 q_2 = \varepsilon^2 + \gamma^2 - p^2.$$

Обозначивъ произведеніе $(\varepsilon^2 + q_1^2)(\varepsilon^2 + q_2^2)$ одной буквой R, и принимая во вниманіе, что

$$\varepsilon^2 + \gamma^2 = n^2, \quad \ldots\ldots\ldots \text{(см. формулу (43))}$$

будемъ имѣть

$$R = (\varepsilon^2 + q_1^2)(\varepsilon^2 + q_2^2) = (n^2 + p^2)^2 - 4\gamma^2 p^2$$

$$= n^4 + p^4 + 2p^2 n^2 - 4p^2 n^2 + 4p^2 \varepsilon^2 = (n^2 - p^2)^2 + (2p\varepsilon)^2 \ldots (82)$$

и

$$\varepsilon^2 + q_1 q_2 = n^2 - p^2.$$

Подставивъ всѣ эти величины въ предыдущее выраженіе для S, получимъ

$$S = \gamma e^{\varepsilon t} \frac{1}{R} [(n^2 - p^2) \sin\beta - 2p\varepsilon \cos\beta] \ldots\ldots\ldots\ldots (83)$$

Теперь умножимъ и раздѣлимъ это выраженіе на $\sqrt{(n^2 - p^2)^2 + (2p\varepsilon)^2}$ и положимъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{2p\varepsilon}{\sqrt{(n^2 - p^2)^2 + (2p\varepsilon)^2}} &= \sin\Delta \\ \text{и} \quad \frac{n^2 - p^2}{\sqrt{(n^2 - p^2)^2 + (2p\varepsilon)^2}} &= \cos\Delta. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (84)$$

Тогда

$$\operatorname{tg}\Delta = \frac{2p\varepsilon}{n^2 - p^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (85)$$

Но, согласно формулѣ (82), предыдущій радикалъ есть ничто иное, какъ $\sqrt{R}$.

Такимъ образомъ, мы будемъ имѣть

$$S = -\cos\alpha . S_1 + \sin\alpha . S_2 = \gamma e^{\varepsilon t} \frac{1}{\sqrt{R}} \cdot \sin(\beta - \Delta).$$

Подставляя это выраженіе въ формулу (76) и замѣняя α и β ихъ значеніями изъ формулъ (73), получимъ окончательно

$$\theta = e^{-\varepsilon t}\left[\Gamma_1 \cos \gamma t + \Gamma_2 \sin \gamma t\right] + \frac{A}{\sqrt{R}} \sin(pt + \delta - \Delta) \ldots\ldots (86)$$

Таково общее выраженіе для θ.

Эту формулу можно еще преобразовать и привести въ болѣе удобный для вычисленія видъ, вводя постоянную затуханія

$$\mu^2 = 1 - h^2 = 1 - \frac{\varepsilon^2}{n^2} \ldots (\text{см. формулы } (57) \text{ и } (56))$$

Изъ этого послѣдняго уравненія имѣемъ

$$\varepsilon = nh = n\sqrt{1-\mu^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (87)$$

Обозначивъ собственный періодъ колебаній маятника (при отсутствіи затуханія) черезъ T, гдѣ

$$T = \frac{2\pi}{n},$$

а отношеніе періода сейсмической волны T_p къ періоду маятника T черезъ u, будемъ имѣть

$$u = \frac{T_p}{T} = \frac{n}{p} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (88)$$

Величина u играетъ въ данной теоріи весьма важную роль.

Принимая во вниманіе эти обозначенія, преобразуемъ выраженія для R и $\operatorname{tg}\Delta$.

Согласно формулѣ (82), будемъ имѣть

$$R = (n^2 - p^2)^2 + (2p\varepsilon)^2 = p^4\left[(u^2-1)^2 + 4\frac{\varepsilon^2}{p^2}\right] = p^4\left[(u^2-1)^2 + 4\frac{n^2}{p^2}(1-\mu^2)\right]$$

или

$$R = p^4\left[(1+u^2)^2 - 4\mu^2 u^2\right]$$

и

$$\sqrt{R} = p^2(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2\left(\frac{2u}{1+u^2}\right)^2}.$$

Введемъ еще, для сокращенія, слѣдующее обозначеніе:

$$f(u) = \left(\frac{2u}{1+u^2}\right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (89)$$

Тогда

$$\sqrt{R} = p^2(1 + u^2)\sqrt{1 - \mu^2 f(u)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (90)$$

Съ другой стороны,

$$\operatorname{tg}\Delta = \frac{2\frac{\varepsilon}{p}}{u^2 - 1} = \sqrt{1 - \mu^2}\cdot\frac{2u}{u^2 - 1}$$

или

$$\Delta = \operatorname{arctg}\left\{\sqrt{1 - \mu^2}\cdot\frac{2u}{u^2 - 1}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (91)$$

Положивъ еще

$$\tau = \frac{\Delta}{p}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (92)$$

и подставивъ эти выраженія для $\sqrt{R}$ и $\Delta = p\tau$ въ формулу (86), а также принимая еще во вниманіе, что

$$A = \frac{p^2}{l}\cdot x_m, \ldots\ldots\ldots \text{(см. формулу (71))}$$

получимъ окончательно

$$\theta = e^{-\varepsilon t}[\Gamma_1 \cos\gamma t + \Gamma_2 \sin\gamma t] + \frac{x_m}{l}\cdot\frac{1}{(1+u^2)\sqrt{1 - \mu^2 f(u)}}\sin\{p(t-\tau)+\delta\} \ldots (93)$$

Таково уравненіе движенія маятника подъ вліяніемъ горизонтальныхъ смѣщеній почвы.

Здѣсь постоянныя Γ_1 и Γ_2 опредѣляются изъ начальныхъ условій движенія.

Это уравненіе показываетъ намъ, что движеніе маятника слагается изъ двухъ частей.

Первая часть

$$e^{-\varepsilon t}[\Gamma_1 \cos\gamma t + \Gamma_2 \sin\gamma t]$$

представляетъ собою *собственное движеніе* маятника.

Оно соотвѣтствуетъ затухающей синусоидѣ съ періодомъ

$$T' = \frac{2\pi}{\gamma}.$$

Вторая часть обуславливается гармоническимъ движеніемъ почвы. Она представляетъ собою простую синусоиду *съ тѣмъ-же періодомъ* T_p, что у данной сейсмической волны, но между обоими движеніями — маятника и почвы — существуетъ нѣкоторая разность фазъ, т.-е. маятникъ въ своемъ движеніи всегда нѣсколько запаздываетъ противъ сейсмической волны, такъ какъ разность временъ τ всегда положительна.

Дѣйствительно, изъ формулъ (92), (91) и (84) видно, что, когда u мѣняется въ предѣлахъ отъ ∞ до 0, Δ мѣняется въ предѣлахъ отъ 0 до π.

Такимъ образомъ, несмотря на то, что движенiе почвы было, по предположенiю, чрезвычайно простое, а именно гармоническое безъ затуханiя, движенiе маятника представляется уже гораздо болѣе сложнымъ, такъ какъ оно слагается изъ двухъ синусоидъ, одной затухающей и одной простой.

Изъ записи такого прибора нельзя, слѣдовательно, сразу выдѣлить искомое, истинное движенiе почвы.

Если-бы истинное движенiе почвы соотвѣтствовало-бы совокупности различныхъ синусоидъ, напримѣръ

$$f(t) = \Sigma x_m \sin(pt + \delta),$$

гдѣ, для каждой отдѣльной волны, x_m, p и δ различны, то, въ виду того, что наше основное дифференцiальное уравненiе (64) *линейное,* общее интегральное выраженiе для θ представилось-бы въ слѣдующемъ видѣ:

$$\theta = e^{-\varepsilon t}[\Gamma_1 \cos\gamma t + \Gamma_2 \sin\gamma t] + \frac{1}{l}\sum\frac{x_m}{(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}}\sin\{p(t-\tau)+\delta\} \ldots (94)$$

Въ этой суммѣ u и τ также различны для различныхъ сейсмическихъ волнъ.

Эта послѣдняя формула (94) обладаетъ уже большою степенью общности.

Формула (93) даетъ намъ сейчасъ указанiе на то, что надо сдѣлать съ маятникомъ, чтобы онъ, по возможности, правильно передавалъ истинное движенiе почвы.

Ясно, что для этой цѣли надо увеличить затуханiе прибора, т.-е. увеличить коеффицiентъ ε. Тогда, съ возрастанiемъ t, первые два члена, содержащiе множителемъ $e^{-\varepsilon t}$ и зависящiе отъ собственнаго движенiя прибора, быстро исчезнутъ, и останется только вторая часть формулы, обуславливаемая движенiемъ самой почвы.

Въ этомъ случаѣ не надо уже вовсе заботиться объ опредѣленiи начальныхъ условiй движенiя и искать значенiя Γ_1 и Γ_2, такъ какъ они все равно, при не слишкомъ малыхъ значенiяхъ t, ровно никакой роли не играютъ.

Тогда мы будемъ просто имѣть

$$\theta = \frac{x_m}{l}\cdot\frac{1}{(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}}\sin\{p(t-\tau)+\delta\} \ldots\ldots\ldots (95)$$

Такимъ образомъ, маятникъ запишетъ простую синусоиду, періодъ которой, въ точности, равенъ періоду соотвѣтствующей сейсмической волны. T_p будетъ, слѣдовательно, извѣстно. Изъ такой кривой, снявши съ нея максимальную амплитуду отклоненія маятника, легко уже можно, зная величины l, μ^2 и $u = \frac{T_p}{T}$, вывести и максимальную амплитуду движенія почвы x_m.

Анализъ этотъ наглядно показываетъ намъ, сколь выгодно увеличивать затуханіе сейсмографа, и какъ просто, въ этомъ случаѣ, исключается, при гармоническихъ колебаніяхъ почвы, вліяніе собственнаго движенія прибора.

Въ теоретическомъ отношеніи выгодно, какъ можно больше увеличивать затуханіе, доводя, напримѣръ, маятникъ до границы апеpіодичности.

Въ этомъ случаѣ $\varepsilon = n$ и $\mu^2 = 0$. Тогда

$$\theta = \frac{x_m}{l} \cdot \frac{1}{1 + u^2} \cdot \sin\{p(t - \tau) + \delta\} \ldots\ldots\ldots\ldots (96)$$

Эта формула чрезвычайно простая.

Чтобы лучше выяснить все значеніе сильнаго затуханія, разсмотримъ, что получилось-бы, если-бы маятникъ вовсе былъ лишенъ затуханія.

Въ этомъ случаѣ

$$\varepsilon = 0,$$

$$\mu^2 = 1$$

и, согласно формулѣ (91),

$$\tau = 0.$$

Кромѣ того,

$$(1 + u^2)\sqrt{1 - \mu^2 f(u)} = \sqrt{(1 + u^2)^2 - 4u^2} = u^2 - 1 \ldots \text{(см. формулу (89))}$$

Тогда изъ формулъ (93) и (43) слѣдуетъ, что

$$\theta = \Gamma_1 \cos nt + \Gamma_2 \sin nt + \frac{x_m}{l} \cdot \frac{1}{u^2 - 1} \sin(pt + \delta) \ldots\ldots (97)$$

Чтобы анализировать это движеніе надо задать теперь начальныя условія движенія.

Для простоты выкладокъ примемъ еще, что $\delta = 0$, т.-е. что мы начинаемъ счетъ времени съ того момента, когда сейсмическая волна достигла мѣста наблюденія.

Предположимъ, что, при $t = 0$,

$$\theta = 0.$$

Въ этотъ моментъ мы не сообщаемъ непосредственно маятнику никакого импульса, но само движеніе почвы даетъ маятнику нѣкоторую начальную скорость θ_0' въ его *относительномъ* движеніи по отношенію къ штативу прибора.

Для опредѣленія θ_0', обратимся къ основному дифференціальному уравненію (25).

Въ данномъ случаѣ мы будемъ имѣть

$$\theta'' + n^2\theta + \frac{x''}{l} = 0.$$

Проинтегрируемъ почленно это уравненіе въ предѣлахъ отъ $t = 0$ до $t = \tau_0$, гдѣ τ_0 чрезвычайно малая величина.

Тогда мы получимъ

$$\theta_0' + n^2\int\limits_0^{\tau_0}\theta dt + \frac{x_0'}{l} = 0,$$

гдѣ x_0' есть начальная скорость движенія почвы въ моментъ $t = 0$, такъ какъ въ предѣлѣ τ_0 равно нулю.

Такъ какъ предѣлы интеграла почти равны между собою, то въ предѣлѣ будемъ просто имѣть

$$\theta_0' = -\frac{x_0'}{l} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (98)$$

Эта формула очевидна сама собою, потому что, когда поверхность земли получаетъ импульсъ, сообщающій ей начальную скорость x_0', напримѣръ, вправо, то центръ качаній, находящійся въ разстояніи l отъ оси вращенія, благодаря инерціи, останется въ первый моментъ на мѣстѣ; такимъ образомъ, угловая скорость *относительнаго* движенія маятника будетъ направлена влѣво, причемъ, очевидно, $\theta_0' = -\frac{x_0'}{l}$.

Изъ уравненія движенія почвы (при $\delta = 0$)

$$x = x_m \sin pt$$

имѣемъ

$$x' = px_m \cos pt;$$

слѣдовательно,

$$x_0' = px_m$$

и

$$\theta_0' = -\frac{p\,x_m}{l} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (99)$$

Для опредѣленія постоянныхъ Γ_1 и Γ_2 обратимся теперь къ уравненію (97), положивши въ немъ $\delta = 0$.

При $t = 0$,

$$\theta_0 = 0 = \Gamma_1.$$

Далѣе

$$\theta' = n\Gamma_2 \cos nt + \frac{px_m}{l} \cdot \frac{1}{u^2 - 1} \cos pt.$$

Второе начальное условіе даетъ намъ, при $t = 0$,

$$\theta_0' = -\frac{px_m}{l} = n\Gamma_2 + \frac{px_m}{l} \cdot \frac{1}{u^2 - 1}$$

или

$$\Gamma_2 = -\frac{p}{n} \cdot \frac{x_m}{l} \left[1 + \frac{1}{u^2 - 1}\right] = -\frac{p}{n} \cdot \frac{x_m}{l} \cdot \frac{u^2}{u^2 - 1},$$

или еще, въ силу соотношенія (88),

$$\Gamma_2 = -\frac{x_m}{l} \cdot \frac{u}{u^2 - 1}.$$

Такимъ образомъ, уравненіе движенія маятника въ этомъ случаѣ будетъ

$$\theta = \frac{x_m}{l} \cdot \frac{1}{u^2 - 1} \cdot [\sin pt - u \sin nt] \dots\dots\dots\dots (100)$$

Уравненіе это представляетъ собою двойную синусоиду съ періодами T_p и T.

Наибольшее, положительное значеніе θ, при $u > 1$, соотвѣтствуетъ такому значенію t, при которомъ $\sin pt = 1$, а $\sin nt = -1$.

Тогда

$$\theta_m = \frac{x_m}{l} \cdot \frac{1}{u^2 - 1} \cdot (u + 1) = \frac{x_m}{l} \cdot \frac{1}{u - 1} \dots\dots\dots\dots (101)$$

Эта формула показываетъ, что отклоненія маятника могутъ достигнуть громадныхъ величинъ, даже при самыхъ ничтожныхъ амплитудахъ смѣщенія почвы x_m, если только u близко къ 1, то-есть вблизи резонанса, когда періодъ сейсмической волны T_p мало отличается отъ собственнаго періода колебаній маятника T.

Такимъ образомъ, маятники безъ затуханія вблизи резонанса даютъ совершенно превратныя записи, по которымъ никоимъ образомъ нельзя, по первому взгляду на сейсмограмму, судить о величинѣ истиннаго смѣщенія почвы. Безъ тщательнаго анализа кривой можно прійти къ совершенно ложнымъ заключеніямъ.

Слѣдовательно, при малыхъ x_m, могутъ получиться очень большіе размахи маятниковъ и, наоборотъ, при значительныхъ величинахъ x_m, если

только u велико, т.-е. T_p значительно больше T, амплитуды размаховъ маятника могутъ быть очень малыми.

Конечно, и при апеperiодическихъ маятникахъ, величина u имѣетъ извѣстное вліяніе на амплитуду размаха маятника, какъ то и видно изъ формулы (96), и это вліяніе надо, при опредѣленіи, изъ наблюденій, величины x_m, непремѣнно учитывать, но явленіе резонанса не играетъ здѣсь больше никакой роли, такъ что сейсмограмма отъ апеperiодическаго маятника въ общихъ чертахъ довольно близко передаетъ характеръ истиннаго движенія почвы.

Посмотримъ теперь, что будетъ при строгомъ резонансѣ, т.-е. когда $u = 1$.

Обратимся для этого къ формулѣ (100).

Въ этомъ случаѣ, при $n = p$, формула эта принимаетъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$, такъ что нельзя утверждать, что θ сразу становится очень большимъ, хотя въ знаменателѣ выраженія для θ и стоитъ 0.

Чтобы анализировать явленіе, положимъ сначала

$$\frac{n}{p} = u = 1 + \xi,$$

гдѣ ξ очень малая величина, а потомъ уже перейдемъ къ предѣлу, положивши $\xi = 0$.

$$\sin nt = \sin(pt + p\xi t) = \sin pt . \cos p\xi t + \sin p\xi t . \cos pt$$

или, разлагая въ рядъ по степенямъ ξ,

$$\sin nt = \sin pt\left[1 - \frac{1}{2}p^2\xi^2t^2\right] + \cos pt . (p\xi t)\left[1 - \frac{p^2\xi^2t^2}{6}\right].$$

Слѣдовательно,

$$\sin pt - u\sin nt = \sin pt - \sin pt\left[1 + \xi - \frac{1}{2}p^2\xi^2t^2\right] - \cos pt . p\xi t\left[1 + \xi - \frac{p^2\xi^2t^2}{6}\right]$$

или, съ точностью до величинъ высшаго порядка,

$$\sin pt - u\sin nt = -\xi\left[1 - \frac{1}{2}p^2\xi t^2\right]\sin pt - p\xi t(1 + \xi)\cos pt.$$

Съ другой стороны,

$$u^2 - 1 = 1 + 2\xi + \xi^2 - 1 = \xi(2 + \xi);$$

слѣдовательно, сокращая на ξ, получимъ

$$\theta = \frac{x_m}{l} \cdot \frac{1}{(2+\xi)} \left[-\left(1 - \frac{1}{2} p^2 \xi t^2\right) \sin pt - pt (1+\xi) \cos pt \right].$$

Перейдемъ теперь къ предѣлу ($\xi = 0$).

Тогда

$$\theta = -\frac{1}{2} \frac{x_m}{l} [\sin pt + pt \cos pt] \dots\dots\dots\dots (102)$$

Изъ этой формулы слѣдуетъ, что, при $t = 0$, $\theta = 0$ и $\theta' = -\frac{px_m}{l}$, какъ и должно быть.

Но, такъ какъ время t вышло теперь уже изъ подъ знака тригонометрической функціи, то мы видимъ, что, съ теченіемъ времени, наибольшіе размахи маятника будутъ непрерывно возрастать.

Практически, такому непрерывному возрастанію θ будетъ, конечно, положенъ предѣлъ, такъ какъ, во-первыхъ, маятники никогда не бываютъ совершенно лишены затуханія, хотя-бы отъ сопротивленія воздуха, а въ такомъ случаѣ, если μ^2 немного меньше 1, то выраженіе $(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}$, входящее въ знаменатель въ формулѣ (93), никогда не обратится въ нуль, а, во-вторыхъ, мы не можемъ распространять наши выводы и заключенія на очень большія значенія θ, такъ какъ всѣ наши формулы были выведены въ предположеніи, что θ мало, такъ что можно было положить $\sin\theta = 0$ и $\cos\theta = 1$.

Изъ всего вышеизложеннаго видно, какими громадными теоретическими преимуществами обладаютъ маятники съ затуханіемъ передъ маятниками безъ затуханія. Записи послѣднихъ мало пригодны для опредѣленія элементовъ истиннаго движенія почвы; по крайней мѣрѣ, безъ довольно сложнаго анализа сейсмограммы, этого трудно достигнуть. Съ маятниками-же съ сильнымъ затуханіемъ вопросъ этотъ, какъ мы увидимъ дальше, рѣшается чрезвычайно просто.

Къ сожалѣнію, въ настоящее время огромное число сейсмическихъ станцій работаетъ еще съ маятниками безъ затуханія, что въ значительной мѣрѣ понижаетъ цѣнность собираемаго сейсмометрическаго матеріала, когда дѣло касается вопроса объ изслѣдованіи характера истиннаго движенія почвы при землетрясеніяхъ.

Чѣмъ сильнѣе затуханіе, тѣмъ меньше вліяетъ собственное движеніе прибора на его запись при землетрясеніяхъ. Поэтому наша Постоянная Центральная Сейсмическая Комиссія и постановила снабдить всѣ русскія сейсмическія станціи, обязательно, маятниками съ затуханіемъ, доводя по-

слѣднее на сейсмическихъ станціяхъ перваго разряда, при наиболѣе чувствительныхъ маятникахъ съ Zöllner'овскимъ подвѣсомъ и гальванометрической регистраціей, по возможности, до границы апеpіодичности.

Справедливость всего вышеизложеннаго можно наглядно показать и подтвердить на простыхъ опытахъ съ подвижной платформой, могущей, при помощи особаго эксцентрическаго вала, двигаться взадъ и впередъ по закону гармоническихъ колебаній, и на которой установленъ простой, малочувствительный, горизонтальный маятникъ, хотя-бы системы Боша, регистрирующій свое движеніе механически на вращающемся барабанѣ, установленномъ на той-же подвижной платформѣ.

Слѣдующій чертежъ 95 представляетъ собою кривую собственнаго движенія самого маятника, когда онъ почти совершенно лишенъ затуханія.

На этомъ чертежѣ представлена также и ось временъ съ секундными марками. Собственный періодъ маятника T былъ при этомъ опытѣ равенъ 10,8 секундамъ.

Слѣдующіе чертежи 96 и 97 представляютъ собою кривыя, записанныя тѣмъ-же маятникомъ при синусоидальномъ движеніи платформы, представленномъ внутренней, правильной, волнистой кривой.

Въ первомъ случаѣ (черт. 96), собственный періодъ маятника T былъ равенъ 10,6 сек., а періодъ платформы $T_p = 7{,}1$ сек., слѣдовательно, $u = \frac{T_p}{T} = 0{,}67$.

Во второмъ случаѣ (черт. 97), $T = 8{,}8$ сек., а $T_p = 9{,}3$ сек., слѣдовательно, $u = 1{,}06$.

Кривыя эти показываютъ, что, хотя движеніе платформы, представляющее собою какъ-бы движеніе поверхности земли при проходѣ правильной поверхностной сейсмической волны, и представляетъ собою случай простой синусоиды, самъ маятникъ даетъ гораздо болѣе сложную запись, имѣющую рядъ второстепенныхъ максимумовъ и минимумовъ, причемъ, по мѣрѣ приближенія періодовъ T_p и T къ равенству, размахи прибора увеличиваются.

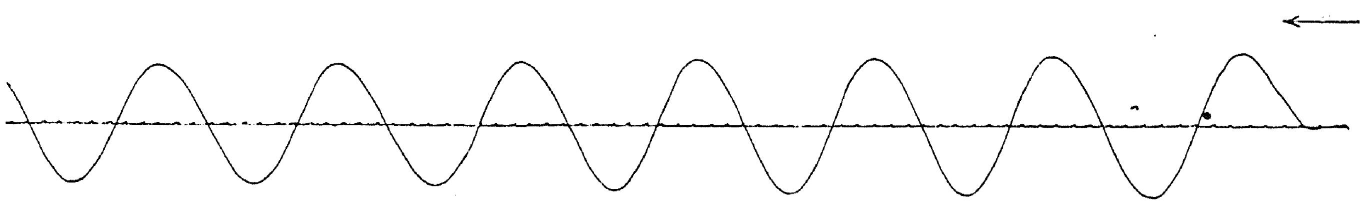
Понятно, что изъ такой записи маятника трудно дѣлать какія-либо непосредственныя заключенія объ амплитудѣ и періодѣ соотвѣтствующей сейсмической волны.

Снабдимъ теперь маятникъ сильнымъ, магнитнымъ затуханіемъ, для чего воспользуемся особымъ электромагнитомъ.

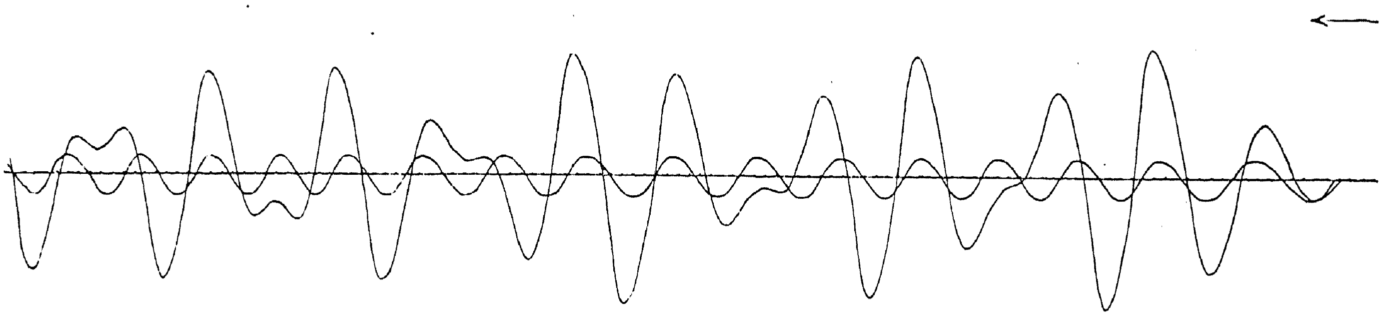
Въ этомъ случаѣ кривая собственнаго движенія маятника будетъ имѣть тотъ видъ, который представленъ на предыдущемъ чертежѣ 75 (см. стр. 260).

Этотъ чертежъ показываетъ, что съ виду движеніе маятника вполнѣ апеpіодическое.

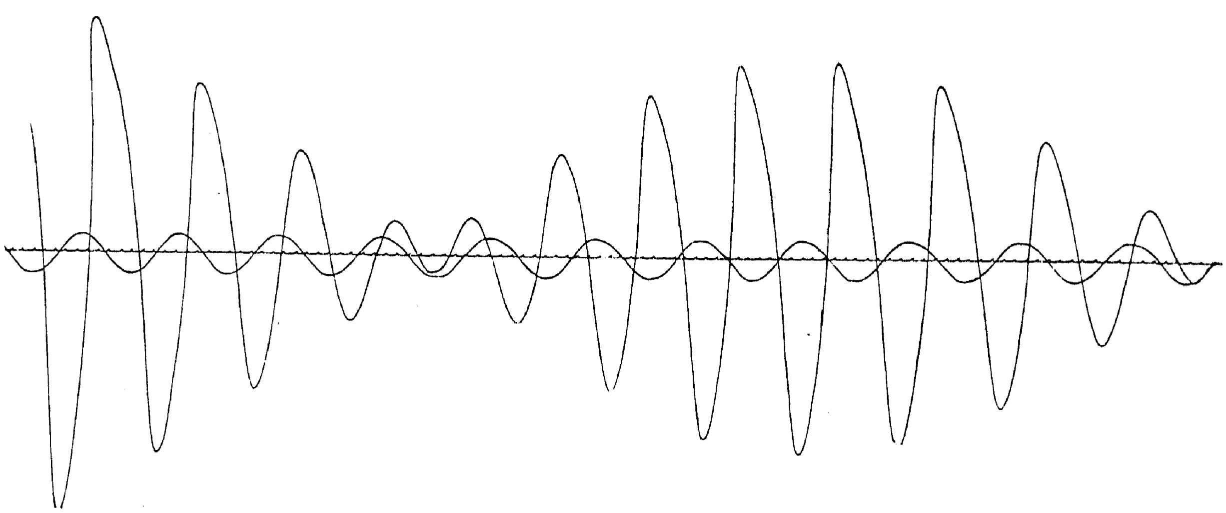
Черт. 95.



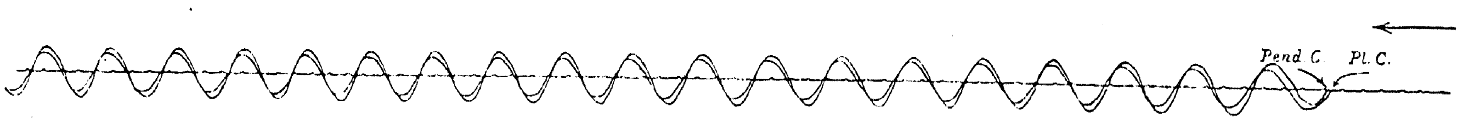
Черт. 96.



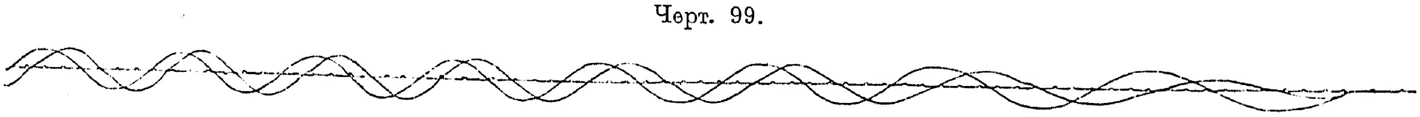
Черт. 97.



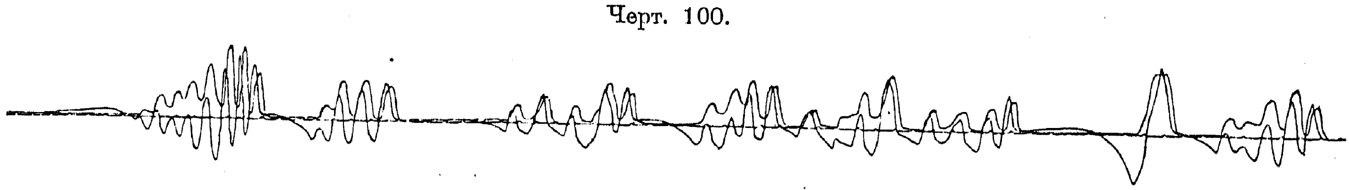
Черт. 98.



Черт. 99.



Черт. 100.



Слѣдующіе два чертежа 98 и 99 даютъ запись такого почти апериодическаго маятника на движущейся платформѣ. Въ первомъ случаѣ періодъ платформы T_p равнялся 3,6 с., а, во второмъ, 7,5 с.

Кривыя эти показываютъ, что теперь уже маятникъ чертитъ совершенно правильную синусоиду, вполнѣ соотвѣтствующую синусоидальному движенію платформы, причемъ періоды обѣихъ синусоидъ въ точности равны между собою. Небольшія неправильности обнаруживаются только въ началѣ кривой, пока движеніе платформы еще не установилось и не приняло вполнѣ правильнаго синусоидальнаго характера.

Тѣ-же чертежи показываютъ, что обѣ синусоиды нѣсколько смѣщены одна по отношенію къ другой, т.-е., что между обоими движеніями — платформы и маятника — существуетъ нѣкоторая разность фазъ, какъ это и слѣдуетъ изъ теоріи. Что-же касается отношенія максимальныхъ амплитудъ кривой маятника и кривой движенія платформы, то это отношеніе, которое характеризуетъ увеличеніе сейсмографа, зависитъ, какъ отъ инструментальныхъ постоянныхъ маятника, такъ и отъ соотвѣтствующаго періода движенія платформы T_p.

Вопросъ этотъ мы разсмотримъ въ слѣдующемъ параграфѣ.

Итакъ, мы видимъ, что запись апериодическаго маятника въ точности воспроизводитъ *характеръ* движенія платформы, а, слѣдовательно, возмущающее вліяніе собственнаго движенія прибора, которое такъ усложняетъ запись при маятникахъ, лишенныхъ затуханія, здѣсь почти совершенно исключено.

Этихъ примѣровъ достаточно, чтобы наглядно убѣдиться въ томъ, насколько выгодно снабжать различные сейсмографы сильнымъ затуханіемъ.

Въ заключеніе приведемъ еще слѣдующій черт. 100.

Онъ соотвѣтствуетъ тому случаю, когда платформѣ давались совершенно произвольныя, неправильныя движенія отъ руки, а на платформѣ стоялъ болѣе или менѣе апериодическій, горизонтальный маятникъ Боша.

Мы видимъ, что и въ этомъ случаѣ запись маятника воспроизводитъ въ общихъ чертахъ довольно вѣрно характеръ движенія платформы.

---

§ 4.

Опредѣленіе максимальной амплитуды смѣщенія почвы. Увеличеніе маятника.

Въ дальнѣйшемъ мы и будемъ предполагать, что маятникъ снабженъ достаточно сильнымъ затуханіемъ, чтобы вліяніемъ собственнаго его движенія можно было пренебречь.

Тогда, при гармоническомъ движеніи почвы

$$x = x_m \sin(pt + \delta),$$

гдѣ

$$p = \frac{2\pi}{T_p},$$

движеніе маятника можетъ быть представлено уравненіемъ (95)

$$\theta = \frac{x_m}{l} \cdot \frac{1}{(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}} \cdot \sin\{p(t-\tau)+\delta\} \quad \ldots\ldots\ldots (95)$$

Регистрировать это движеніе можно или механически, или оптически.

Обозначивъ черезъ L разстояніе пишущаго на закопченной бумагѣ пера до оси вращенія маятника, а черезъ y отклоненіе пера на барабанѣ отъ его нормальнаго положенія при равновѣсіи маятника, будемъ, для малыхъ значеній угла θ, имѣть

$$\theta = \frac{y}{L}.$$

Подставляя это выраженіе въ формулу (95), получимъ:

$$y = \frac{L}{l} \cdot x_m \cdot \frac{1}{(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}} \cdot \sin\{p(t-\tau)+\delta\} \quad \ldots\ldots (103)$$

Въ случаѣ оптической регистраціи, L представляетъ собою, какъ мы видѣли раньше (см. формулу (23) главы IV), удвоенное разстояніе A зеркала, укрѣпленнаго около оси вращенія маятника, до поверхности регистрирнаго барабана въ направленіи нормально падающаго луча

$$L = 2A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (104)$$

Оптическая регистрація представляетъ, какъ мы уже знаемъ, слѣдующія преимущества передъ механической регистраціей:

1) длина рычага удваивается,
2) длину рычага легко увеличивать по желанію,
3) движеніе свѣтовой точки происходитъ почти строго перпендикулярно къ оси временъ,
4) не вводится никакого добавочнаго тренія.

Это послѣднее обстоятельство наиболѣе существенно, такъ какъ главный недостатокъ механическаго способа регистраціи и заключается именно въ томъ, что онъ вводитъ добавочное треніе пишущаго пера о закопченную

бумагу. Вслѣдствіе этого приходится въ основное дифференціальное уравненіе движенія маятника вводить нѣкоторые поправочные члены. Этого вопроса мы теперь, однако, касаться не будемъ, а разсмотримъ его отдѣльно въ главѣ XII.

Слѣдовательно, въ дальнѣйшемъ, мы будемъ предполагать, что движеніе маятника регистрируется оптически, причемъ подъ L мы будемъ подразумѣвать двойное разстояніе A.

Формула (103) показываетъ намъ, что, при гармоническомъ движеніи почвы, маятникъ описываетъ также простую синусоиду съ періодомъ T_p, равнымъ періоду соотвѣтствующей сейсмической волны. Этотъ періодъ можно, слѣдовательно, непосредственно снять съ сейсмограммы.

Обозначимъ максимальную амплитуду размаховъ маятника черезъ y_m. Тогда мы будемъ имѣть

$$y_m = \frac{L}{l} \cdot \frac{1}{(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}}\, x_m \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (105)$$

или

$$x_m = \frac{l}{L} \cdot (1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)} \cdot y_m \; \ldots\ldots\ldots \; (106)$$

Эта послѣдняя формула и служитъ основаніемъ для опредѣленія максимальной амплитуды смѣщенія почвы x_m.

Для этого надо знать слѣдующія четыре постоянныя маятника:

1) приведенную длину маятника l,

2) длину рычага L,

3) постоянную затуханія μ^2 и

4) собственный періодъ маятника безъ затуханія $T = \frac{2\pi}{n}$.

Послѣдняя величина нужна для опредѣленія $u = \frac{T_p}{T}$.

Снявъ T_p и y_m съ сейсмограммы, можно, такимъ образомъ, чрезвычайно просто опредѣлить x_m.

Для облегченія этихъ вычисленій имѣются различныя вспомогательныя таблицы (см. Сборникъ сейсмометрическихъ таблицъ «Seismometrische Tabellen»); вычисленія достаточно производить съ четырехъ-значными логариѳмами.

Таблица II даетъ величины u для различныхъ значеній T, отъ $T = 10{,}1$ с. до $T = 30{,}0$ с., черезъ каждую десятую долю секунды, и для различныхъ значеній T_p, отъ $T_p = 1$ с. до $T_p = 40$ с.

Поправки на десятыя доли T_p опредѣляются интерполированіемъ, для чего служитъ вспомогательная таблица XVII пропорціональныхъ частей. Періоды T и T_p достаточно знать съ точностью до десятыхъ долей секунды.

Таблица III даетъ величины $\mathrm{Log}(1+u^2)$, а таблица IV величины $\mathrm{Log} f(u) = \mathrm{Log}\left[\frac{2u}{1+u^2}\right]^2$ (см. формулу (89)), отъ $u = 0{,}01$ до $u = 4{,}00$.

Для еще бо̀льшаго облегченія вычисленій, имѣется еще таблица V, гдѣ приведены значенія $\mathrm{Log}\, U$, гдѣ

$$U = (1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (107)$$

для различныхъ значеній u, отъ $u = 0{,}01$ до $u = 2{,}00$, и для различныхъ значеній μ^2.

Въ первой части таблицы даны значенія μ^2, отъ $\mu^2 = -0{,}10$ до $\mu^2 = +0{,}20$, а, во второй, отъ $\mu^2 = 0{,}60$ до $\mu^2 = 0{,}90$, черезъ каждую сотую.

Первыя числа соотвѣтствуютъ маятникамъ съ весьма сильнымъ затуханіемъ, причемъ отрицательныя значенія μ^2 и $\mu^2 = 0$ соотвѣтствуютъ апеpіодическимъ маятникамъ, а, при $\mu^2 = +0{,}20$, коеффиціентъ затуханія $v = 536$.

Вторыя числа соотвѣтствуютъ маятникамъ съ болѣе слабымъ затуханіемъ, употребляемымъ преимущественно въ Германіи, а именно, (см. таблицу I «Seismometrische Tabellen»),

при $\mu^2 = 0{,}60$,

$v = 13{,}0$,

а, при $\mu^2 = 0{,}90$,

$v = 2{,}85$.

При помощи этихъ таблицъ, обработка сейсмограммъ, въ цѣляхъ полученія максимальной амплитуды истиннаго смѣщенія почвы x_m, производится очень просто и скоро и не представляетъ никакихъ затрудненій.

Интерполированіе на тысячныя доли въ значеніяхъ u производится при помощи той-же вспомогательной таблицы XVII. Величины μ^2 достаточно знать съ точностью до второго десятичнаго знака.

Если маятникъ установленъ точно на границу апеpіодичности, то $\mu^2=0$, и формула (106) принимаетъ слѣдующій чрезвычайно простой видъ:

$$x_m = \frac{l}{L}(1+u^2)\cdot y_m \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (108)$$

Если граница апеpіодичности перейдена, то $\varepsilon > n$, и, согласно формуламъ (56) и (57), $h > 1$ и $\mu^2 < 0$.

Слѣдовательно, отрицательныя значенія μ^2 соотвѣтствуютъ случаю апеіодическаго собственнаго движенія маятника, когда θ выражается уже не черезъ тригонометрическія, а черезъ показательныя функціи. (См. формулу (28), гдѣ α_1 и α_2 вещественны).

И для этого случая формула (106) сохраняетъ свою силу, только въ ней надо положить, вмѣсто $-\mu^2$, $+\mu^2 = h^2 - 1 = \left(\frac{\varepsilon}{n}\right)^2 - 1$.

Въ этомъ можно легко убѣдиться, повторивъ всѣ выводы § 3 въ предположеніи, что собственное движеніе маятника апеіодическое.

Но можно проще показать справедливость сказаннаго слѣдующимъ образомъ.

Обратимся для этого къ формуламъ (27) и (28) и предположимъ, что $\varepsilon > n$.

Положивши

$$h = \frac{\varepsilon}{n}, \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(см. формулу (56))}$$

будемъ имѣть

$$\alpha_1 = \varepsilon + n\sqrt{h^2 - 1}$$

$$\alpha_2 = \varepsilon - n\sqrt{h^2 - 1}$$

или

$$\alpha_1 = \varepsilon + ni\sqrt{1 - h^2}$$

$$\alpha_2 = \varepsilon - ni\sqrt{1 - h^2}$$

и

$$\theta = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t}.$$

Введя слѣдующее, чисто алгебраическое, обозначеніе:

$$n\sqrt{1 - h^2} = \gamma, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(109)}$$

мы можемъ представить θ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\theta = e^{-\varepsilon t}[C_1 \cos\gamma t + C_2 \sin\gamma t].$$

Мы привели, такимъ образомъ, θ *къ виду* формулы (37), изъ которой мы и исходили при анализѣ движенія маятника подъ вліяніемъ смѣщеній почвы.

Но, согласно обозначенію (58),

$$\frac{\gamma^2}{n^2} = \mu^2.$$

Сравнивая это выраженіе съ формулой (109), находимъ

$$1 - h^2 = \mu^2$$

или

$$\mu^2 = -(h^2 - 1). \qquad (110)$$

Такимъ образомъ, въ случаѣ апеdoіодическаго движенія маятника, когда $h > 1$, μ^2 отрицательно, но окончательный выводъ отъ этого нисколько не измѣнится; придется только въ формулѣ (106), вмѣсто $\mu^2 = 1 - h^2$ (при періодическомъ движеніи маятника), поставить $-\mu^2 = (h^2 - 1)$ (при апеdoіодическомъ движеніи).

Слѣдовательно, формула (106) совершенно общая и сохраняетъ свою силу, безразлично, будетъ-ли собственное движеніе маятника періодическое или аперіодическое, т.-е., будетъ-ли μ^2 больше или меньше нуля. Надо только, конечно, при пользованіи этой формулой, вводить всегда μ^2 съ соотвѣтствующимъ знакомъ.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что по сейсмограммѣ, полученной съ маятникомъ, снабженнымъ затуханіемъ, очень легко опредѣлить элементы истиннаго гармоническаго движенія почвы T_p и x_m.

Если-бы сейсмическія волны долго сохраняли свои элементы (T_p и x_m) постоянными, то не было-бы вовсе надобности прибѣгать къ весьма сильному затуханію, такъ какъ формула (106) сохраняетъ свою силу при малыхъ и большихъ значеніяхъ μ^2.

Но дѣло въ томъ, что сейсмическія волны рѣдко сохраняютъ свою форму въ теченіе нѣсколькихъ періодовъ подрядъ, а потому необходимо пользоваться очень сильнымъ затуханіемъ, чтобы, по возможности, скорѣе исключить вліяніе собственнаго движенія прибора, т.-е. чтобы члены, входящіе въ формулу (93), содержащіе множителемъ $e^{-\varepsilon t}$ и зависящіе отъ этого движенія, по возможности, быстро исчезали бы, уже при малыхъ значеніяхъ времени t.

Для этой цѣли нѣтъ крайней надобности переходить къ отрицательнымъ значеніямъ μ^2, т.-е. дѣлать $\varepsilon > n$, такъ какъ, *при прочихъ равныхъ условіяхъ*, сильное затуханіе, какъ мы увидимъ дальше, нѣсколько уменьшаетъ чувствительность прибора. Достаточно сдѣлать $\mu^2 = 0$, т.-е. поставить маятникъ *на границу аперіодичности*; тогда и различныя формулы и самыя вычисленія становятся значительно проще.

Этому условію и стараются, по возможности, всегда удовлетворить при тѣхъ типахъ сейсмографовъ съ гальванометрической регистраціей, которые установлены на сейсмической станціи въ Пулковѣ.

Измѣривъ амплитуду y_m какого-нибудь максимума M на сейсмограммѣ и соотвѣтствующій періодъ сейсмической волны T_p, опредѣлимъ еще и соотвѣтствующій моментъ t_m (для M). Эта величина также снимается непосредственно съ сейсмограммы.

По формулѣ (95), этотъ моментъ соотвѣтствуетъ тому случаю, когда $\sin\{p(t_m - \tau) + \delta\} = \pm 1$; максимальное-же смѣщеніе x_m *почвы* соотвѣтствуетъ моменту t_{x_m}, когда $\sin(pt_{x_m} + \delta) = \pm 1$.

Слѣдовательно, между обоими моментами существуетъ всегда нѣкоторая разность τ.

Такимъ образомъ,

$$t_{x_m} = t_m - \tau, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (111)$$

гдѣ τ, какъ мы видѣли, всегда положительно.

Принимая во вниманіе, что $p = \frac{2\pi}{T_p}$, мы изъ формулъ (91) и (92) будемъ имѣть

$$\frac{\tau}{T_p} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg}\left\{\sqrt{1-\mu^2} \cdot \frac{2u}{u^2-1}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (112)$$

Это запаздываніе τ зависитъ, такимъ образомъ, не только отъ періода сейсмической волны T_p, но и *отъ постоянныхъ самого сейсмографа* μ^2 и T, такъ какъ $u = \frac{T_p}{T}$.

Поэтому съ различными сейсмическими приборами получаются и *различные моменты* t_m, хотя-бы моментъ t_{x_m} былъ-бы для всѣхъ приборовъ одинъ и тотъ-же.

Изъ этого слѣдуетъ, что, при сравненіи моментовъ наступленія какого-нибудь максимума на сейсмограммахъ, полученныхъ на различныхъ сейсмическихъ станціяхъ или на той-же станціи, но по различнымъ приборамъ, никоимъ образомъ нельзя сравнивать непосредственно между собою моменты t_m, а надо всегда переходить отъ нихъ къ моментамъ t_{x_m} максимума истиннаго смѣщенія почвы и только эти моменты сравнивать между собою. Иначе очень легко, при изслѣдованіи вопросовъ, касающихся распространенія сейсмическихъ волнъ, особенно если станціи находятся въ близкомъ разстояніи другъ отъ друга, придти къ совершенно невѣрнымъ выводамъ и заключеніямъ.

Однако, къ сожалѣнію, нигдѣ до сихъ поръ (1911 г.), кромѣ Пулкова, эта поправка на запаздываніе записи прибора не принимается во вниманіе.

Этой поправкой, однако, въ большинствѣ случаевъ никоимъ образомъ нельзя пренебрегать.

Например, для маятника съ собственнымъ періодомъ колебаній $T = 30$ с., при слабомъ затуханіи $\mu^2 = 0,90$ и при періодѣ сейсмической волны $T_p = 24,1$ с., величина τ достигаетъ 8,4 с. (максимумъ).

Такую поправку, при современной точности сейсмометрическихъ наблюденій, никоимъ образомъ нельзя оставить безъ вниманія.

Такимъ образомъ, въ сейсмическихъ бюллетеняхъ надлежало-бы, на ряду съ величинами T_p и x_m, давать отнюдь не моменты t_m, т.-е. максимумовъ на сейсмограммахъ, но моменты максимумовъ истиннаго смѣщенія почвы t_{x_m}.

Поправка $\frac{\tau}{T_p}$ можетъ легко быть вычислена по величинамъ μ^2 и u по формулѣ (112).

Для облегченія опредѣленія поправки τ, въ томъ-же Сборникѣ сейсмометрическихъ таблицъ дана таблица VI, содержащая величины $\frac{\tau}{T_p}$. Таблица эта имѣетъ два аргумента μ^2 и u.

При этомъ μ^2 измѣняется отъ $-0,2$ до $+0,9$ черезъ каждую 0,1, а u отъ 0,1 до 4,0, также черезъ десятыя доли.

Выбравши величину $\frac{\tau}{T_p}$ изъ таблицы и умноживъ ее на T_p, получимъ тотчасъ-же искомую поправку τ.

Увеличеніе маятника.

Подъ увеличеніемъ всякаго сейсмографа понимаютъ отношеніе максимальной амплитуды кривой, записанной сейсмографомъ, къ соотвѣтствующей максимальной амплитудѣ истиннаго смѣщенія почвы. Это увеличеніе мы обозначимъ черезъ $\mathfrak{V}$.

Согласно этому опредѣленію и на основаніи формулъ (106) и (107), будемъ имѣть

$$\mathfrak{V} = \frac{y_m}{x_m} = \frac{L}{l} \cdot \frac{1}{U} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (113)$$

Чѣмъ больше $\mathfrak{V}$, тѣмъ чувствительнѣе будетъ сейсмографъ.

Изслѣдуемъ теперь свойства количества $\mathfrak{V}$.

Согласно обозначенію (107),

$$U = (1 + u^2) . \sqrt{1 - \mu^2 f(u)} \dots\dots\dots\dots\dots (107)$$

При $T_p = 0$ или $u = 0$, т.-е. для безконечно короткихъ сейсмическихъ волнъ $f(u) = 0$ (см. формулу (89)) и $U = 1$. Соотвѣтствующую величину $\mathfrak{V}$ обозначимъ черезъ $\mathfrak{V}_0$. Тогда

$$\mathfrak{V}_0 = \frac{L}{l} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (114)$$

Это отношеніе $\frac{L}{l}$ называется *нормальнымъ увеличеніемъ* маятника. Оно соотвѣтствуетъ чрезвычайно быстрымъ колебаніямъ почвы (впередъ и назадъ), при которыхъ можно принять, что центръ качанія маятника остается какъ-бы все время неподвижнымъ. Въ этомъ случаѣ, какъ мы видѣли раньше (см. формулу (3) § 2 главы IV и черт. 44), увеличеніе прибора, т.-е. отношеніе амплитуды размаха прибора на регистрирномъ аппаратѣ къ истинному смѣщенію почвы, дѣйствительно, равно какъ разъ $\frac{L}{l}$. Правда, что черт. 44 относился къ простому вертикальному маятнику, но онъ, очевидно, сохраняетъ силу и для случая горизонтальнаго маятника.

Такимъ образомъ, чтобы повысить нормальное увеличеніе прибора, надо, или увеличить L, или уменьшить приведенную длину маятника l.

Формула (113) показываетъ намъ, что вообще увеличеніе прибора $\mathfrak{V}$ не есть величина постоянная, а, при заданной величинѣ постоянной затуханія μ^2, является функціей отъ u, т.-е. увеличеніе $\mathfrak{V}$ измѣняется вмѣстѣ съ періодомъ T_p соотвѣтствующей сейсмической волны. Эта зависимость увеличенія отъ періода T_p представляетъ собою несомнѣнно недостатокъ горизонтальнаго маятника, но этотъ недостатокъ присущъ рѣшительно всѣмъ типамъ сейсмографовъ, имѣющихъ опредѣленный собственный періодъ колебаній, и отъ него никоимъ образомъ избавиться нельзя. Но, зная постоянныя прибора, легко это обстоятельство учесть, и, при обработкѣ сейсмограммъ, принять во вниманіе именно то увеличеніе, которое соотвѣтствуетъ данному періоду сейсмической волны.

Измѣняемость $\mathfrak{V}$ обуславливается ходомъ функціи U. $\mathfrak{V}$ будетъ максимумъ ($\mathfrak{V}_m$), когда U минимумъ (U_m). Найдемъ эту величину.

Принимая во вниманіе соотношеніе (89), по которому

$$f(u) = \left(\frac{2u}{1+u^2}\right)^2,$$

будемъ имѣть

$$U = \sqrt{(u^2+1)^2 - 4\mu^2 u^2} \dots\dots\dots\dots (115)$$

или

$$U = \sqrt{(u^2-1)^2 + 4(1-\mu^2)u^2} \dots\dots\dots\dots (116)$$

Опредѣлимъ производную $\frac{\partial U}{\partial u}$ и положимъ ее затѣмъ равной нулю.

$$\frac{\partial U}{\partial u} = \frac{2(u^2-1)u + 4(1-\mu^2)u}{\sqrt{(u^2-1)^2+4(1-\mu^2)u^2}} = \frac{2u}{\sqrt{(u^2-1)^2+4(1-\mu^2)u^2}}[u^2+1-2\mu^2] \dots (117)$$

Обозначивъ корень уравненія $\frac{\partial U}{\partial u} = 0$ черезъ u_m, будемъ имѣть

$$u_m = \sqrt{2\mu^2-1} \dots\dots\dots\dots (118)$$

Слѣдовательно,

$$u_m^2 + 1 = 2\mu^2$$

и, по формулѣ (115),

$$U_m = \sqrt{4\mu^4 - 4\mu^2(2\mu^2 - 1)}$$

или

$$U_m = 2\mu\sqrt{1-\mu^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (119)$$

Формула (118) показываетъ намъ, что функція U можетъ имѣть минимумъ, а, слѣдовательно, $\mathfrak{V}$ максимумъ, только въ тѣхъ случаяхъ, когда

$$\mu^2 \geqslant \frac{1}{2}.$$

Этому критическому значенію $\mu^2 = \frac{1}{2}$ соотвѣтствуетъ, согласно таблицѣ I Сборника сейсмометрическихъ таблицъ, слѣдующее значеніе коэффиціента затуханія:

$$v = 23{,}1.$$

Въ этомъ случаѣ

$$u_m = 0.$$

и

$$U_m = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = 1.$$

При значеніяхъ $\mu^2 < \frac{1}{2}$, т.-е., при болѣе сильномъ затуханіи, производная $\frac{\partial U}{\partial u}$, согласно формулѣ (117), будетъ всегда положительна, а потому $\mathfrak{V}$, съ возрастаніемъ u, будетъ непрерывно убывать.

При значеніяхъ $\mu^2 > \frac{1}{2}$, т.-е., въ приборахъ съ болѣе слабымъ затуханіемъ, $\mathfrak{V}$ переходитъ, такимъ образомъ, черезъ нѣкоторый максимумъ $\mathfrak{V}_m$, причемъ

$$\mathfrak{V}_m = \frac{\mathfrak{V}_0}{2\mu\sqrt{1-\mu^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (120)$$

Чѣмъ ближе μ^2 къ 1, т.-е. чѣмъ слабѣе затуханіе, тѣмъ больше будетъ $\mathfrak{V}_m$.

Въ предѣлѣ, при $\mu^2 = 1$, когда приборъ совершенно лишенъ затуханія, $\mathfrak{V}_m = \infty$.

Въ этомъ случаѣ, согласно формулѣ (118),

$$u_m = 1.$$

Этотъ случай соотвѣтствуетъ полному резонансу.

Кромѣ того, такъ какъ, при $u = 0$, $f(u) = 0$, то, согласно формулѣ (115), при очень короткихъ волнахъ, $U = 1$ и $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_0$ *при любомъ значеніи* постоянной затуханія μ^2.

Формула (115) показываетъ намъ еще, что, *при заданной величинѣ u*, *U*, съ уменьшеніемъ μ^2, т.-е. съ увеличеніемъ затуханія, увеличивается, а, слѣдовательно, $\mathfrak{V}$ уменьшается. При отрицательныхъ значеніяхъ μ^2, т.-е., при апеdoдическихъ маятникахъ, $\mathfrak{V}$ будетъ еще меньше. Слѣдовательно, *при прочихъ равныхъ условіяхъ*, т.-е., при одинаковыхъ значеніяхъ L, l и T и при томъ-же періодѣ сейсмической волны T_p, маятники съ сильнымъ затуханіемъ менѣе чувствительны.

Въ этомъ заключается отрицательная сторона сильнаго затуханія, но, такъ какъ, съ другой стороны, сильное затуханіе имѣетъ, какъ мы видѣли раньше, столько неоспоримыхъ теоретическихъ и практическихъ преимуществъ, главнымъ образомъ въ смыслѣ быстраго исключенія вліянія собственнаго движенія прибора, то этой недостачей въ чувствительности можно вполнѣ поступиться. Если-же къ горизонтальному маятнику приспособить гальванометрическій методъ регистраціи, то потеря въ чувствительности, вызванная введеніемъ сильнаго затуханія, можно съ лихвой компенсировать, и, при полной даже апеpіодичности инструмента, достигнуть громадныхъ значеній для увеличенія $\mathfrak{V}$. Къ этому вопросу мы еще вернемся въ слѣдующей главѣ.

Чтобы лучше выяснить зависимость увеличенія $\mathfrak{V}$, какъ отъ постоянной затуханія μ^2, такъ и отъ періода сейсмической волны T_p, возьмемъ конкретный случай маятника съ собственнымъ періодомъ колебаній (безъ затуханія) T въ 12 секундъ и прослѣдимъ, какъ измѣняется $\mathfrak{V}$ съ измѣненіемъ T_p отъ 1 с. до 40 с. при слѣдующихъ 5 значеніяхъ μ^2, которымъ соотвѣтствуютъ нижеприведенныя величины *коеффиціента* затуханія v.

μ^2	v
0,90	2,85
0,79	5,05
0,67	9,07
0,50 (критическое значеніе)	23,1
0 (апеpіодическій маятникъ)	∞.

Такъ какъ $\mathfrak{V}$ зависитъ еще отъ отношенія $\frac{L}{l}$, то, чтобы прослѣдить измѣняемость $\mathfrak{V}$ съ T_p при различныхъ значеніяхъ μ^2, цѣлесообразно сравнивать между собою непосредственно величины $\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}_0}$ или $\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}_1}$, гдѣ $\mathfrak{V}_1$ пред-

ставляетъ собою значеніе $\mathfrak{V}$ при $T_p = 1$ с. Соотвѣтствующую величину U обозначимъ черезъ U_1 (при $T_p = 1$ с.).

Тогда, на основаніи формулы (113), будемъ имѣть

$$\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}_1} = \frac{U_1}{U}.$$

U_1 отличается очень мало отъ 1, какъ это видно изъ слѣдующихъ чиселъ, соотвѣтствующихъ $T_p = 1$ с. при $T = 12$ секундамъ.

μ^2	U_1
0,90	0,995
0,79	0,996
0,67	0,997
0,50	1,000
0	1,007.

Наибольшія, возможныя значенія отношенія $\frac{\mathfrak{V}_m}{\mathfrak{V}_1}$ и соотвѣтствующія величины $(T_p)_m$ опредѣлятся по ранѣе приведеннымъ формуламъ для U_m и u_m, гдѣ $u = \frac{T_p}{12}$ (см. формулы (119) и (118)).

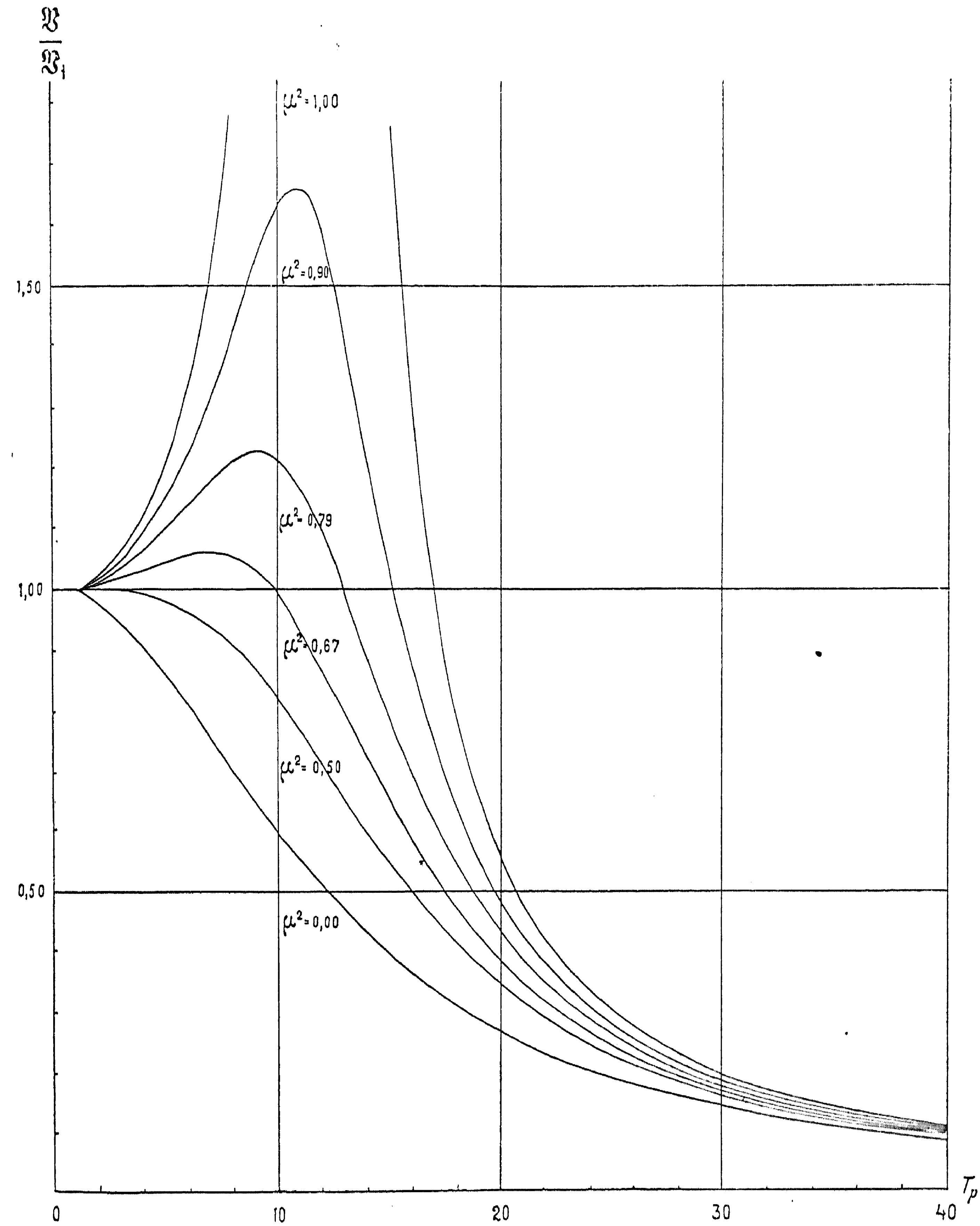
Произведя вычисленія, получимъ слѣдующія числа:

μ^2	$\frac{\mathfrak{V}_m}{\mathfrak{V}_1}$	$(T_p)_m$
0,90	1,658	10,7 с.
0,79	1,223	9,1
0,67	1,060	7,0
0,50	1,000	1
0	1,000	1

Въ слѣдующей таблицѣ VI приведены различныя значенія отношенія $\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}_1}$ для 40 различныхъ значеній T_p. Эта таблица наглядно показываетъ, какъ измѣняется увеличеніе прибора въ зависимости отъ періода сейсмической волны и величины постоянной затуханія μ^2.

Чтобы нагляднѣе представить ходъ функціи $\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}_1}$ въ зависимости отъ T_p и μ^2, на основаніи чиселъ таблицы VI, вычерчены слѣдующія кривыя, пред-

Черт. 101.



$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_1}$
$\mu^2 = 1,00$
$\mu^2 = 0,90$
$\mu^2 = 0,79$
$\mu^2 = 0,67$
$\mu^2 = 0,50$
$\mu^2 = 0,00$
1,50
1,00
0,50
0
10
20
30
40
T_p

Таблица VI.

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_1}.$$

Tp \ μ^2	0,90	0,79	0,67	0,50	0,00
1^c	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
2	1,017	1,012	1,006	1,000	0,980
3	1,046	1,032	1,017	0,998	0,948
4	1,088	1,060	1,030	0,994	0,906
5	1,146	1,094	1,044	0,985	0,858
6	1,222	1,134	1,056	0,970	0,806
7	1,314	1,173	1,060	0,947	0,752
8	1,426	1,206	1,054	0,914	0,697
9	1,539	1,222	1,031	0,872	0,644
10	1,635	1,210	0,992	0,822	0,594
11	1,652	1,164	0,936	0,765	0,547
12	1,573	1,087	0,868	0,707	0,504
13	1,406	0,989	0,794	0,649	0,463
14	1,213	0,883	0,719	0,593	0,427
15	1,023	0,780	0,647	0,539	0,393
16	0,866	0,688	0,581	0,491	0,363
17	0,737	0,605	0,521	0,446	0,335
18	0‘634	0,536	0,468	0,406	0,310
19	0,550	0,476	0,422	0,371	0,287
20	0,480	0,425	0,382	0,339	0,266
21	0,425	0,381	0,346	0,310	0,248
22	0,378	0,344	0,315	0,285	0,231
23	0,338	0,311	0,288	0,263	0,215
24	0,305	0,283	0,264	0,243	0,201
25	0,277	0,259	0,243	0,225	0,189
26	0,252	0,237	0,224	0,208	0,177
27	0,231	0,219	0,207	0,194	0,166
28	0,212	0,202	0,192	0,181	0,156
29	0,196	0,187	0,179	0,169	0,147
30	0,181	0,174	0,167	0,158	0,139
31	0,168	0,162	0,156	0,148	0,131
32	0,157	0,151	0,146	0,139	0,124
33	0,146	0,142	0,137	0,131	0,118
34	0,137	0,133	0,129	0,124	0,112
35	0,129	0,125	0,121	0,117	0,106
36	0,121	0,118	0,114	0,110	0,101
37	0,114	0,111	0,108	0,105	0,096
38	0,108	0,105	0,102	0,099	0,091
39	0,102	0,099	0,097	0,094	0,087
40	0,096	0,094	0,092	0,090	0,083

ставленныя на чертежѣ 101. Къ нимъ прибавлена еще одна кривая для случая $\mu^2 = 1$ (маятникъ совершенно безъ затуханія).

На основаніи этихъ данныхъ можно придти къ слѣдующимъ выводамъ и заключеніямъ.

Въ началѣ, при очень малыхъ значеніяхъ T_p, чувствительность маятниковъ съ различной степенью затуханія, одинакова ($\mathfrak{V}_1$ можно принять почти одинаковымъ для всѣхъ значеній μ^2 (см. предыдущія значенія U_1)).

Съ увеличеніемъ T_p, чувствительность маятниковъ со слабымъ затуханіемъ $\left(\text{при } \mu^2 > \frac{1}{2}\right)$ увеличивается, достигаетъ нѣкотораго максимума, а потомъ непрерывно убываетъ, причемъ, по мѣрѣ уменьшенія μ^2 отъ 1 до $\frac{1}{2}$, положеніе этого максимума смѣщается отъ $u_m = 1$ до $u_m = 0$, гдѣ этотъ максимумъ въ сущности уже исчезаетъ (критическое значеніе коеффиціента затуханія $v = 23,1$).

При болѣе сильномъ затуханіи, т.-е., при $\mu^2 \leqslant \frac{1}{2}$, чувствительность прибора, съ возрастаніемъ T_p, непрерывно убываетъ.

При болѣе значительныхъ величинахъ T_p, значенія увеличенія маятниковъ съ различной степенью затуханія мало отличаются другъ отъ друга, причемъ, вообще, при большихъ значеніяхъ T_p, чувствительность маятниковъ значительно меньше, и степень затуханія не имѣетъ уже большого вліянія на соотвѣтствующую величину увеличенія $\mathfrak{V}$.

Въ маятникахъ совершенно безъ затуханія или со слабымъ затуханіемъ, увеличеніе $\mathfrak{V}$, для извѣстныхъ значеній T_p, въ сильнѣйшей мѣрѣ зависитъ отъ періода сейсмической волны. Это обстоятельство чрезвычайно неудобно, такъ какъ оно можетъ совершенно исказить сейсмограмму (не говоря уже о вліяніи собственнаго движенія прибора на запись). Въ этомъ случаѣ весьма трудно, по одному взгляду на сейсмограмму, дѣлать какія-либо заключенія объ амплитудахъ истиннаго смѣщенія почвы.

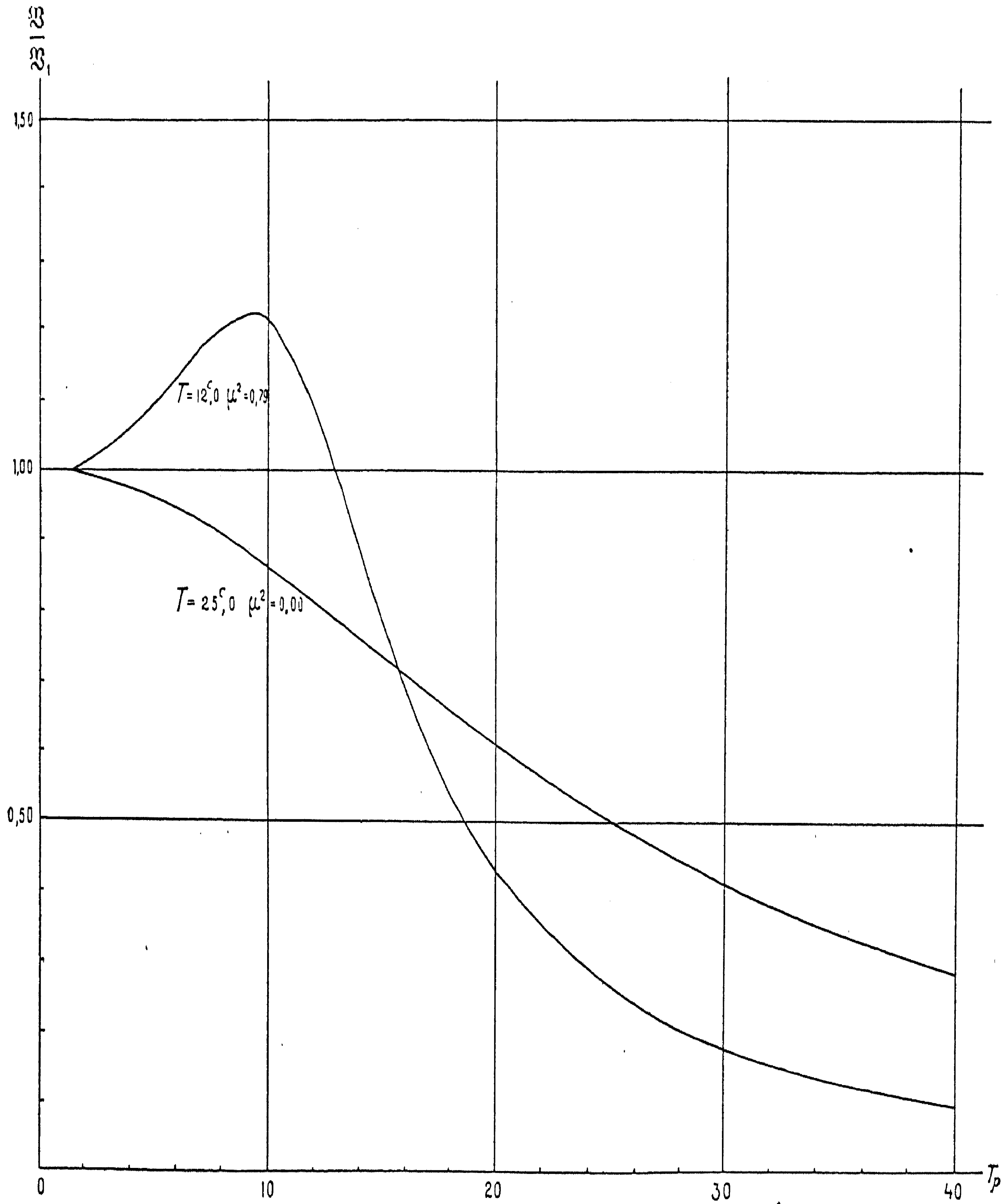
Сравнимъ еще маятникъ съ сравнительно слабымъ затуханіемъ ($v = 5,05$ или $\mu^2 = 0,79$) съ апеbecause періодическимъ маятникомъ, для котораго $v = \infty$ и $\mu^2 = 0$.

Числа предыдущей таблицы показываютъ намъ, что, въ худшемъ случаѣ, чувствительность аперіодическаго маятника будетъ, примѣрно, только въ два раза меньше чувствительности перваго, но, при большихъ значеніяхъ T_p, разница въ чувствительности очень незначительна, а именно, при $T_p = 30$ с., чувствительность второго маятника будетъ въ 1,25, а, при $T_p = 40$ с., всего только въ 1,13 разъ меньше чувствительности перваго.

Нельзя *вообще* утверждать, какъ это иногда дѣлается, что аперіодическіе маятники менѣе чувствительны, чѣмъ маятники періодическіе. Все зависитъ отъ величины собственнаго періода прибора безъ затуханія T.

Сравнимъ для примѣра маятникъ съ 12-ти секунднымъ собственнымъ періодомъ T при $v = 5,05$ съ аперіодическимъ маятникомъ, для котораго T

Черт. 102.



$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_1}$
1,50
1,00
0,50
$T = 12^c,0 \quad \mu^2 = 0,79$
$T = 25^c,0 \quad \mu^2 = 0,00$
0
10
20
30
40
T_p

(при отсутствіи затуханія) равно 25 с., что соотвѣтствуетъ, приблизительно, случаю Пулковскихъ горизонтальныхъ сейсмографовъ, и вычислимъ для этого послѣдняго случая величины $\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}_1}$ при нѣкоторыхъ значеніяхъ T_p.

Мы получимъ слѣдующія величины:

T_p	$\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}_1}$ (при $T = 25$ с.)
16 с.	0,711
20	0,611
25	0,501
30	0,410
35	0,338
40	0,281

Ходъ измѣняемости $\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}_1}$ съ T_p для обоихъ этихъ маятниковъ ($T = 25$ с. и $v = \infty$, и $T = 12$ с. и $v = 5{,}05$) представленъ графически на слѣдующемъ чертежѣ 102.

Эти кривыя, а также сравненіе только что приведенныхъ чиселъ съ числами 3-го столбца таблицы VI (для $\mu^2 = 0{,}79$), наглядно показываютъ намъ, что, начиная, примѣрно, отъ періода $T_p = 16$ с., апеpіодическій маятникъ (при $T = 25$ с.) становится *чувствительнѣе* маятника со сравнительно слабымъ затуханіемъ (при $T = 12$ с.). При $T_p = 25$ с. чувствительность его почти вдвое, а при $T_p = 40$ с. даже втрое *больше*.

Изъ этого ясно, что, когда желаютъ ввести сильное затуханіе, что, какъ мы видѣли, въ теоретическомъ и практическомъ отношеніяхъ весьма цѣлесообразно, то надо стремиться къ тому, чтобы увеличить собственный періодъ колебаній сейсмографа T.

Въ заключеніе этого § разсмотримъ еще слѣдующій вопросъ.

Мы только что видѣли, что увеличеніе $\mathfrak{V}$ измѣняется съ величиной $u = \frac{T_p}{T}$, причемъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ это измѣненіе очень значительно.

Предложимъ себѣ теперь найти то значеніе постоянной затуханія μ^2, при которомъ $\mathfrak{V}$, между *заданными предѣлами для u*, напримѣръ, между $u = 0$ и $u = u_0$, гдѣ u_0 пока остается произвольнымъ, было-бы менѣе всего подвержено измѣненіямъ.

При $u = 0$, $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_0 = \frac{L}{l}$ (см. формулу (114)).

Вообще-же, по формулѣ (113),

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{B}_0}{U}.$$

Слѣдовательно,

$$\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}_0\left(\frac{1}{U} - 1\right),$$

гдѣ

$$U = \sqrt{(u^2 + 1)^2 - 4\mu^2 u^2} \ldots \text{ (см. формулу (115))}$$

Такъ какъ, въ зависимости отъ величины u, разность $\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_0$ можетъ быть или положительной, или отрицательной, то вопросъ сводится къ тому, чтобы найти то значеніе μ^2, при которомъ, между заданными предѣлами $u = 0$ и $u = u_0$, сумма

$$S = \Sigma(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_0)^2 . \Delta u$$

была-бы минимумъ.

Переходя отъ знака суммированія къ знаку интегрированія, будемъ, на основаніи предыдущаго, имѣть

$$S = \mathfrak{B}_0{}^2 \int_0^{u_0} \left[\frac{1}{U} - 1\right]^2 du.$$

Этотъ интегралъ приводится къ эллиптическому интегралу и не берется въ конечномъ видѣ.

Чтобы S было минимумъ надо, чтобы

$$\frac{\partial}{\partial\mu^2} \cdot \int_0^{u_0} \left[\frac{1}{U} - 1\right]^2 du = 0.$$

Изъ этого условія находимъ

$$2\int_0^{u_0} \left[\frac{1}{U} - 1\right] \cdot \frac{-\frac{\partial U}{\partial\mu^2}}{U^2} du = 2\int_0^{u_0} \left[\frac{1}{U} - 1\right] \frac{2u^2}{U^3} du = 0$$

или

$$\int_0^{u_0} \left[\frac{1}{U} - 1\right] \frac{u^2}{U^3} du = 0.$$

Изъ этого уравненія найдется искомая величина μ^2.

Интегралъ этотъ также не берется въ конечномъ видѣ, но, задавъ численныя значенія u_0, можно, при помощи обыкновенныхъ квадратуръ,

вычислить величину этого интеграла для различныхъ численныхъ значеній μ^2, и тогда, интерполированіемъ между двумя близкими величинами μ^2, легко найти то значеніе μ^2, при которомъ этотъ интегралъ обращается въ нуль.

Произведя вычисленія, найдемъ слѣдующія значенія для μ^2 и v, при которыхъ S будетъ минимумъ.

Предѣлы для u	μ^2	v
0 и $u_0 = 1{,}5$	0,765	5,7
0 и $u_0 = 1$	0,665	9,3
0 и $u_0 = 0{,}5$	0,547	17,4.

Такимъ образомъ, наивыгоднѣйшая величина для μ^2, въ смыслѣ наибольшаго постоянства $\mathfrak{V}$, зависитъ всецѣло отъ заданныхъ предѣловъ интегрированія.

Глава VI.

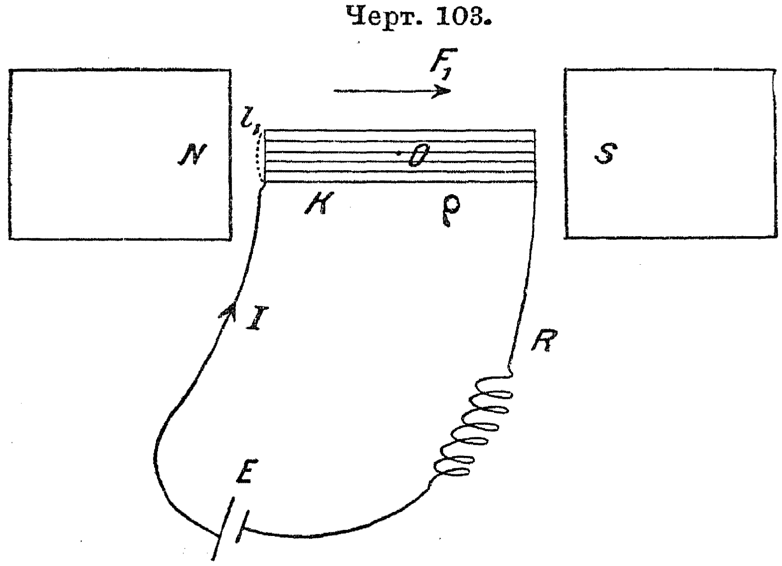
Гальванометрическій методъ регистраціи.

§ 1.

Теорія гальванометра.

Для увеличенія чувствительности сейсмографовъ, въ цѣляхъ изслѣдованія слабыхъ дальнихъ землетрясеній, особенно при примѣненіи апеespecially періодическихъ приборовъ, цѣлесообразно пользоваться гальванометрическимъ методомъ регистраціи. Въ чемъ этотъ методъ заключается и какія его преимущества передъ другими способами регистраціи, мы уже разсмотрѣли раньше въ § 3 главы IV. Теперь разсмотримъ подробнѣе самую теорію этого способа регистрированія движенія сейсмографа.

Черт. 103.



Мы разсмотримъ эту теорію опять-таки примѣнительно къ горизонтальному маятнику, хотя тотъ-же методъ регистраціи можетъ быть, безъ всякаго затрудненія, приспособленъ и къ любому, другому типу сейсмографа.

Для гальванометрической регистраціи примѣняется, въ виду его большой чувствительности, гальванометръ съ подвижной обмоткой (Drehspul-Galvanometer). Схематическій чертежъ такого гальванометра представленъ на слѣдующемъ чертежѣ 103 (видъ сверху).

Между полюсами N и S сильнаго, подковообразнаго, постояннаго магнита, дающаго болѣе или менѣе постоянное магнитное поле, силу котораго мы обозначимъ черезъ F_1, подвѣшена въ O, на тонкой проволокѣ или на узкой, весьма тонкой пластинкѣ, подвижная рама K съ большимъ числомъ обмотокъ тонкой изолированной проволоки. Такая рама представляетъ собою какъ-бы короткій соленоидъ. При отсутствіи тока плоскость обмотокъ параллельна силѣ магнитнаго поля.

Обозначимъ длину этого соленоида черезъ l_1, площадь одного завитка черезъ S_1, число обмотокъ черезъ N_1, а силу тока, идущаго по обмоткамъ, черезъ I. Такой соленоидъ можетъ быть, какъ извѣстно изъ теоріи электромагнетизма, уподобленъ идеальному магниту, у котораго магнитныя массы сконцентрированы у концовъ соленоида (полюсы магнита), причемъ масса магнетизма M_1 въ каждомъ такомъ полюсѣ равна произведенію изъ силы тока на площадь одной обмотки и на число обмотокъ, приходящихся *на единицу длины*, т.-е.

$$M_1 = I S_1 \frac{N_1}{l_1}.$$

Магнитный моментъ $\mathfrak{M}_1$ такого соленоида или равноцѣннаго ему магнита будетъ $M_1 l_1$, или

$$\mathfrak{M}_1 = N_1 S_1 I \dots\dots\dots (1)$$

Если рама K имѣетъ нѣсколько слоевъ обмотокъ, то подъ S_1 надо подразумѣвать *среднюю* площадь одной обмотки, а подъ N_1 *общее число* обмотокъ.

Концы проволоки подвижной катушки соединены съ внѣшней цѣпью при помощи весьма тонкихъ металлическихъ листочковъ (не показанныхъ на чертежѣ).

Обозначивъ сопротивленіе обмотокъ подвижной катушки черезъ ρ, сопротивленіе внѣшней цѣпи черезъ R, внѣшнюю электродвижущую силу (напр., отъ какого-нибудь гальваническаго элемента) черезъ E, а черезъ I соотвѣтствующую силу тока въ цѣпи, будемъ имѣть

$$I = \frac{E}{R + \rho} \dots\dots\dots (2)$$

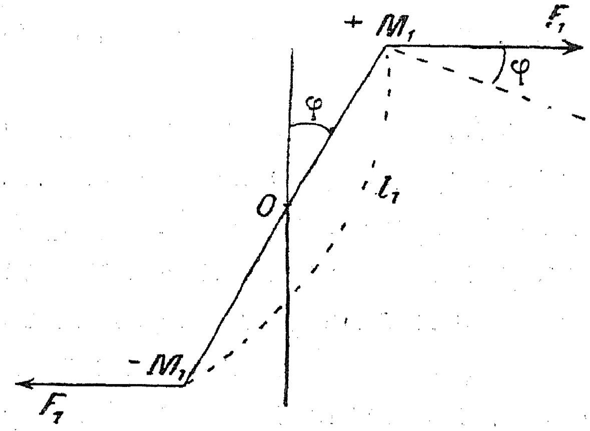
Подъ вліяніемъ такого тока, катушка повернется на нѣкоторый уголъ φ, и равновѣсіе наступитъ тогда, когда моментъ электромагнитныхъ силъ уравновѣсится моментомъ крученія нити.

Обозначивъ черезъ D постоянную крученія нити, и, принимая во вниманіе, что для силъ крученія моментъ крутящихъ силъ всегда пропорціо-

наленъ самому *углу* поворота, будемъ имѣть для соотвѣтствующаго момента $D\varphi$.

Изъ чертежа 104 видно, что отклоняющій моментъ электромагнитныхъ силъ, дѣйствующихъ на подвижную катушку или на равноцѣнный ей магнитъ, у котораго положительный полюсъ находится, напримѣръ, въ M_1, будетъ

Черт. 104.



$$F_1 M_1 l_1 \cos\varphi = F_1 \mathfrak{M}_1 \cos\varphi \ldots (3)$$

Ограничиваясь малыми углами отклоненія φ, мы можемъ положить

$$\cos\varphi = 1.$$

Сравнивая оба момента, получимъ

$$F_1 \mathfrak{M}_1 = D\varphi$$

или, замѣняя $\mathfrak{M}_1$ его выраженіемъ изъ формулы (1),

$$I = \frac{D}{F_1 N_1 S_1} \cdot \varphi.$$

Комбинація величинъ, стоящая передъ φ, называется *постоянной гальванометра*. Обозначимъ ее черезъ C:

$$C = \frac{D}{F_1 N_1 S_1} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Тогда

$$I = C\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Зная численное значеніе C, можемъ, по углу отклоненія φ, опредѣлять силу тока I.

C можно легко опредѣлить, пропуская черезъ гальванометръ токъ опредѣленной силы, причемъ, для уменьшенія силы тока, цѣлесообразно пользоваться шунтомъ.

Чѣмъ меньше C, т.-е., чѣмъ меньше D и чѣмъ больше F_1, N_1 и S_1, тѣмъ чувствительнѣе будетъ гальванометръ.

Такіе гальванометры съ подвижной обмоткой обладаютъ, при подходящемъ выборѣ входящихъ въ выраженіе C величинъ, весьма большой чувствительностью, а потому они являются особенно пригодными для гальванометрической регистраціи движенія сейсмографовъ.

Мы разсмотрѣли, такимъ образомъ, условіе равновѣсія гальванометра.

Выведемъ теперь уравненіе его движенія.

Такой гальванометръ представляетъ собою твердую систему, имѣющую опредѣленную (вертикальную) ось вращенія.

Мы можемъ, слѣдовательно, примѣнить къ этому случаю нашу основную теорему механики (см. формулу (4) предыдущей главы), по которой моментъ инерціи системы, умноженный на угловое ускореніе, долженъ быть равенъ моменту всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на систему.

Обозначивъ моментъ инерціи подвижной катушки относительно оси вращенія черезъ K_1, а моментъ *всѣхъ* силъ черезъ $\mathfrak{M}$, будемъ имѣть

$$K_1 \varphi'' = \mathfrak{M}. \qquad \ldots\ldots (6)$$

Въ выраженіе $\mathfrak{M}$ входитъ, во-первыхъ, моментъ $F_1 \mathfrak{M}_1$, обусловливаемый внѣшней электродвижущей силой E. На основаніи формулъ (1) и (2) имѣемъ

$$F_1 \mathfrak{M}_1 = F_1 N_1 S_1 \frac{E}{R + \rho}. \qquad \ldots\ldots (7)$$

Моментъ этотъ положительный, т.-е. онъ стремится увеличить угловую скорость φ'.

Во-вторыхъ, входитъ моментъ крученія нити $D\varphi$, который всегда отрицательный, такъ какъ онъ стремится вернуть катушку въ положеніе равновѣсія.

Но, кромѣ того, общій моментъ $\mathfrak{M}$ содержитъ въ себѣ еще другой отрицательный членъ.

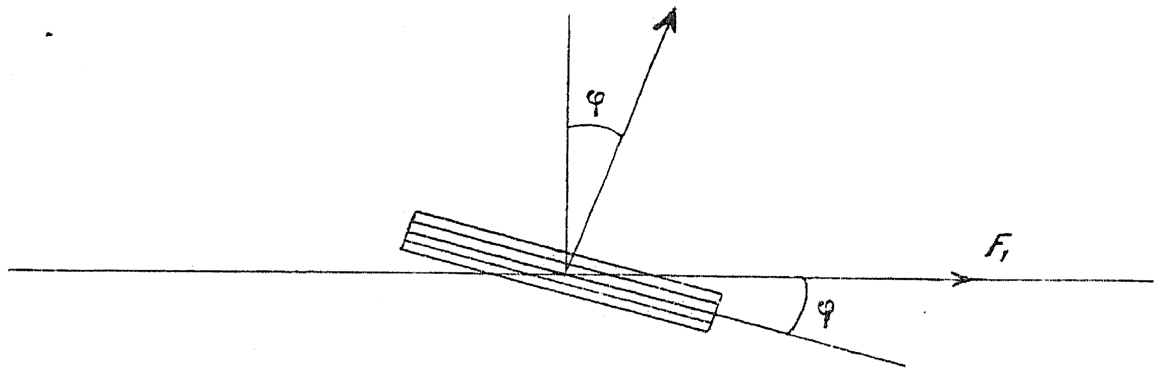
Дѣйствительно, когда катушка отклонена отъ своего положенія равновѣсія на уголъ φ, то потокъ Q_1 магнитной силы F_1 (отъ постояннаго магнита гальванометра), проникающій черезъ общій контуръ катушки, будетъ равенъ произведенію общей площади катушки $N_1 S_1$ на проэкцію силы F_1 на направленіе, перпендикулярное къ площадкамъ S_1.

Изъ чертежа 105 видно, что

$$Q_1 = F_1 N_1 S_1 \sin \varphi.$$

Изъ основной теоремы теоріи электромагнитной индукціи мы знаемъ, что, когда въ какой-нибудь замкнутой цѣпи измѣняется потокъ силы, проникающій черезъ какую-либо часть его общаго контура, то появляется въ цѣпи нѣкоторая добавочная электродвижущая сила E_1, пропорціональная скорости измѣненія этого потока, т.-е. первой производной отъ Q_1 по времени, причемъ, по закону Ленца, направленіе соотвѣтствующаго индукціон-

Черт. 105.



наго тока I_1 таково, что онъ всегда противодѣйствуетъ тѣмъ причинамъ, которыя его вызвали, иначе говоря, работа индукціоннаго тока, а, слѣдовательно, и соотвѣтствующій вращательный моментъ, будутъ всегда отрицательны.

Такимъ образомъ,

$$I_1 = -\frac{E_1}{R+\rho} = -\frac{\frac{\partial Q_1}{\partial t}}{R+\rho}$$

или, полагая $\cos\varphi = 1$,

$$I_1 = -\frac{F_1 N_1 S_1}{R+\rho}\cdot\varphi'.$$

Такимъ образомъ, соотвѣтствующій моментъ этого добавочнаго индукціоннаго тока представится, на основаніи формулъ (1) и (3) (полагая $\cos\varphi = 1$), въ слѣдующемъ видѣ:

$$-F_1^2\frac{[N_1 S_1]^2}{R+\rho}\cdot\varphi'.$$

Этотъ моментъ строго пропорціоналенъ угловой скорости φ'.

Слѣдовательно, общій вращательный моментъ будетъ

$$\mathfrak{M} = F_1 N_1 S_1\frac{E}{R+\rho} - D\varphi - F_1^2\frac{[N_1 S_1]^2}{R+\rho}\varphi'.$$

Къ этому моменту слѣдуетъ присоединить еще моментъ другихъ силъ сопротивленія, напр., тренія или сопротивленія воздуха, который, для малыхъ скоростей φ', мы можемъ принять пропорціональнымъ φ'.

Этотъ моментъ, который также всегда отрицательный, во всякомъ случаѣ чрезвычайно малъ по сравненію съ моментомъ другихъ дѣйствующихъ силъ. Положимъ его равнымъ

$$-b_0\varphi',$$

гдѣ b_0 есть нѣкоторая постоянная величина.

Пополнивъ выраженіе момента $\mathfrak{M}$ этимъ новымъ членомъ, и, подставивъ затѣмъ $\mathfrak{M}$ въ общую формулу (6), получимъ, пренебрегая самоиндукціей, вліяніе которой совершенно ничтожно, слѣдующее основное уравненіе:

$$K_1\varphi'' = F_1 N_1 S_1 \frac{E}{R+\rho} - D\varphi - \left[b_0 + F_1^2\frac{(N_1 S_1)^2}{R+\rho}\right]\varphi'.$$

Таково общее дифференціальное уравненіе движенія гальванометра.

Раздѣлимъ теперь это уравненіе на K_1 и введемъ слѣдующія обозначенія:

$$n_1^2 = \frac{D}{K_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

$$c_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{b_0}{K_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

$$c = \frac{1}{2}\cdot\frac{F_1^2}{K_1}[N_1 S_1]^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

и

$$\varepsilon_1 = c_0 + \frac{c}{R+\rho} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Тогда мы получимъ окончательно

$$\varphi'' + 2\varepsilon_1\varphi' + n_1^2\varphi = \frac{F_1 N_1 S_1}{K_1}\cdot\frac{E}{R+\rho} \ldots\ldots\ldots (12)$$

Дифференціальное уравненіе движенія гальванометра приведено, такимъ образомъ, къ извѣстной канонической формѣ.

При равновѣсіи, т.-е., когда $\varphi' = 0$ и $\varphi'' = 0$, формула (12) даетъ

$$\frac{E}{R+\rho} = I = \frac{n_1^2 K_1}{F_1 N_1 S_1}\varphi = \frac{D}{F_1 N_1 S_1}\varphi,$$

т.-е. мы приходимъ къ той-же формулѣ для I, которую мы имѣли раньше (см. формулы (4) и (5)).

Предположимъ теперь, что внѣшней электродвижущей силы E не существуетъ, и что гальванометръ замкнутъ, черезъ внѣшнюю цѣпь съ сопротивленіемъ R, самъ на себя.

Тогда мы будемъ имѣть

$$\varphi'' + 2\varepsilon_1\varphi' + n_1^2\varphi = 0. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Это есть дифференціальное уравненіе *собственнаго движенія* гальванометра; оно вполнѣ тождественно съ дифференціальнымъ уравненіемъ соб-

ственнаго движенія горизонтальнаго маятника. Мы можемъ, слѣдовательно, прямо воспользоваться различными выводами и формулами предыдущей главы, а именно:

если $\varepsilon_1 > n_1$, то движеніе гальванометра будетъ апеpiодическое;
если $\varepsilon_1 < n_1$, то движеніе будетъ періодическое съ затуханіемъ (затухающая синусоида);
если $\varepsilon_1 = n_1$, то гальванометръ будетъ находиться строго на границѣ апеpiодичности.

Обозначивъ собственный, полный періодъ колебаній гальванометра при отсутствіи затуханія черезъ T_1, будемъ имѣть

$$T_1 = \frac{2\pi}{n_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Постоянная затуханія ε_1 зависитъ, не только отъ значеній постоянныхъ c_0 и c, но и отъ общаго сопротивленія всей цѣпи $R + \rho$.

Такимъ образомъ, свойства гальванометра могутъ быть охарактеризованы тремя постоянными величинами T_1, c_0 и c, которыя и нужно опредѣлить изъ опыта, и величиной общаго сопротивленія всей цѣпи $R + \rho$.

---

§ 2.

Опредѣленіе постоянныхъ гальванометра.

Для регистраціи движенія подвижной катушки гальванометра по обыкновенному, ранѣе описанному, оптическому методу, а также и для непосредственныхъ визуальныхъ наблюденій, къ подвижной рамѣ гальванометра прикрѣплено небольшое, плоское зеркальце.

Въ цѣляхъ опредѣленія постоянныхъ гальванометра, противъ этого зеркальца ставятъ трубу съ горизонтальной, хорошо освѣщенной шкалой, у которой нулевое дѣленіе находится посрединѣ шкалы надъ объективомъ трубы. Для удобства нѣкоторыхъ редукцій, о которыхъ рѣчь будетъ впереди, ставятъ шкалу ровно въ разстояніи *одного метра* отъ зеркальца и устанавливаютъ трубу такъ, чтобы, при равновѣсіи прибора (т.-е., при отсутствіи токовъ въ катушкѣ), нуль дѣленій шкалы приходился-бы какъ разъ на вертикальной нити трубы.

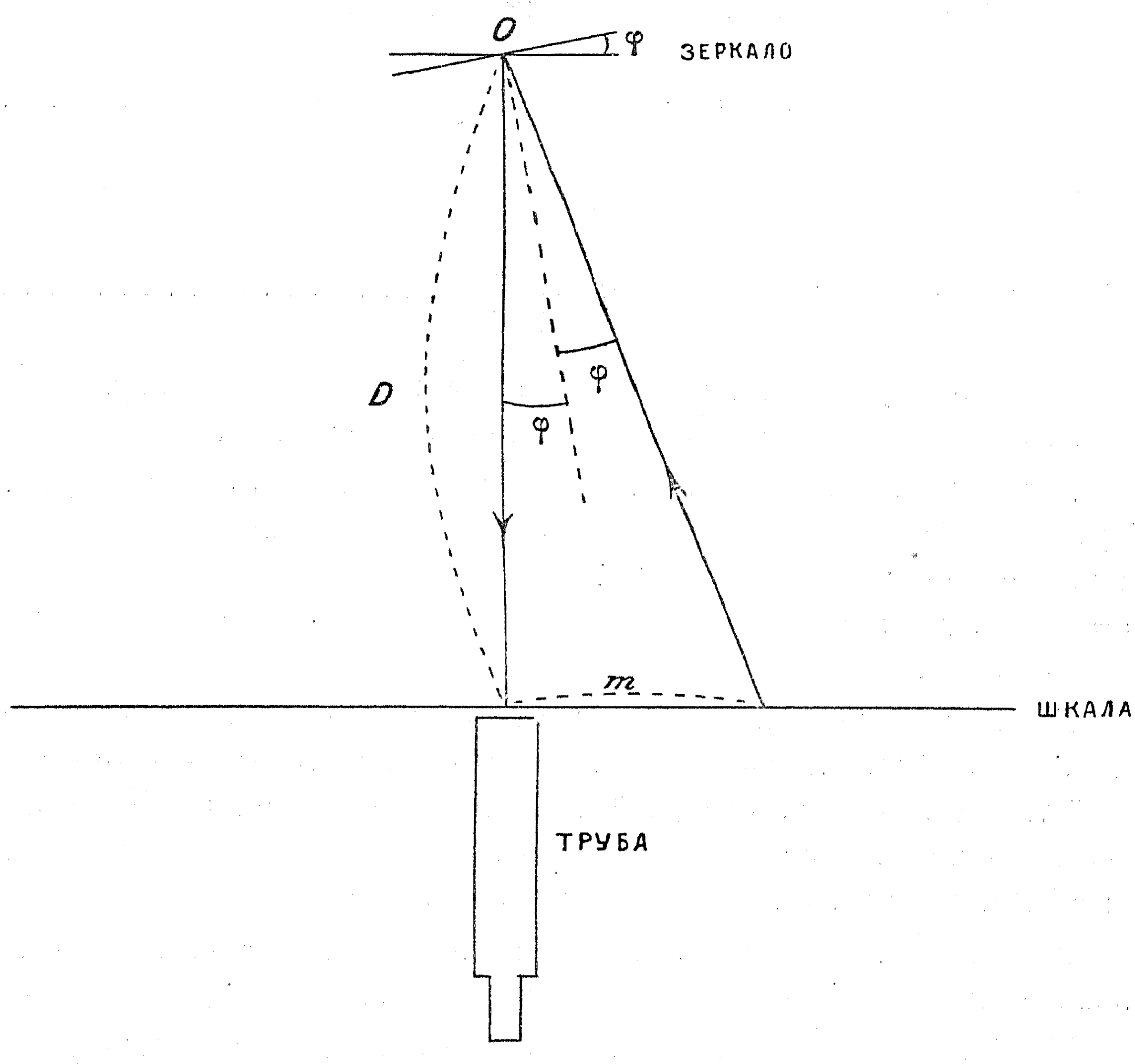
Если теперь катушка гальванометра отклонена отъ своего положенія равновѣсія на уголъ φ, то мы увидимъ на вертикальной нити трубы, поло-

жимъ, *m*-ое дѣленіе шкалы. Отсчетъ *m* надо дѣлать съ точностью до *десятыхъ долей миллиметра*, оцѣнивая десятыя доли дѣленій на глазъ.

Этотъ методъ называется зеркальнымъ методомъ измѣренія малыхъ угловъ. Имъ постоянно пользуются при различныхъ физическихъ измѣреніяхъ.

Зависимость между *m* и φ опредѣлится очень просто изъ слѣдующаго чертежа 106.

Черт. 106.



Обозначивъ въ общемъ случаѣ разстояніе зеркала до шкалы черезъ D, будемъ имѣть

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{m}{D}.$$

Если φ мало, то можно просто положить

$$\varphi = \frac{m}{2D} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{(15)}$$

Въ общемъ-же случаѣ

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{m}{D}.$$

Разлагая arctg малой величины по извѣстной формулѣ въ рядъ, будемъ имѣть

$$\varphi = \frac{1}{2} \left[\frac{m}{D} - \frac{1}{3} \frac{m^3}{D^3} + \frac{1}{5} \frac{m^5}{D^5} - \frac{1}{7} \frac{m^7}{D^7} + \dots \right].$$

Обозначимъ черезъ Δm слѣдующую величину:

$$\Delta m = \frac{1}{3} \frac{m^3}{D^2} - \frac{1}{5} \frac{m^5}{D^4} + \frac{1}{7} \cdot \frac{m^7}{D^6} \dots \dots \dots (16)$$

Тогда мы можемъ положить

$$\varphi = \frac{m - \Delta m}{2D} \dots \dots \dots (17)$$

Такимъ образомъ, для того, чтобы получить истинную величину φ, надо изъ сдѣланнаго отсчета m *вычесть* поправку Δm.

Для опредѣленія этихъ поправокъ имѣется, въ ранѣе упомянутомъ Сборникѣ сейсмометрическихъ таблицъ, особая таблица VIII, въ которой приведены, съ округленіемъ до 0,1 миллиметра, различныя значенія Δm, отъ $m = 50\,^{\text{м}}/_{\text{м}}$ до $m = 400\,^{\text{м}}/_{\text{м}}$, вычисленныя по формулѣ (16) для случая $D = 1000\,^{\text{м}}/_{\text{м}}$.

Такая поправка становится ощутительной только начиная съ $m = 54\,^{\text{м}}/_{\text{м}}$, когда $\Delta m = 0{,}1\,^{\text{м}}/_{\text{м}}$; но за то, при $m = 400\,^{\text{м}}/_{\text{м}}$, поправка эта составляетъ уже $19{,}5\,^{\text{м}}/_{\text{м}}$. Въ виду значительной величины поправокъ при большихъ значеніяхъ m, лучше вообще, при производствѣ различныхъ измѣреній, ограничиваться величинами m, не превышающими $300\,^{\text{м}}/_{\text{м}}$ (при $D = 1$ метру).

Предположимъ теперь, что у гальванометра $\varepsilon_1 < n_1$, т.-е., что собственное его движеніе представляетъ собою затухающую синусоиду.

Чтобы опредѣлить въ этомъ случаѣ періодъ гальванометра T_1' (при наличіи затуханія) и соотвѣтствующій логариѳмическій декрементъ Λ_1, сообщаютъ подвижной катушкѣ нѣкоторый начальный импульсъ и опредѣляютъ затѣмъ, при помощи хорошаго секундомѣра, поправка котораго точно извѣстна, полный періодъ колебаній гальванометра, наблюдая извѣстное число его прохожденій черезъ положеніе равновѣсія. Пуская секундомѣръ въ ходъ при начальномъ прохожденіи нулеваго дѣленія шкалы черезъ нить трубы (нулевое прохожденіе) и останавливая его на k-вомъ прохожденіи (при движеніи въ *ту-же сторону*), и раздѣливъ протекшее время на число

прохожденій k, получимъ довольно надежную величину собственнаго періода колебаній гальванометра T_1' (при наличіи слабаго затуханія).

Наблюдая одновременно рядъ максимальныхъ отклоненій гальванометра вправо и влѣво, можно получить и соотвѣтствующую величину логариѳмическаго декремента Λ_1. Каждый отсчетъ m надо первымъ дѣломъ исправить на соотвѣтствующую поправку Δm. Въ дальнѣйшемъ мы и будемъ уже подъ отдѣльными величинами m подразумѣвать *исправленные* отсчеты по шкалѣ.

Возьмемъ *абсолютныя значенія* двухъ какихъ-либо послѣдовательныхъ максимальныхъ угловъ отклоненія гальванометра φ_k и φ_{k+1}.

Тогда

$$\Lambda_1 = \operatorname{Log}\frac{\varphi_k}{\varphi_{k+1}} = \operatorname{Log}\frac{m_k}{m_{k+1}}.$$

При опредѣленіи Λ_1 изъ опыта, лучше пользоваться слѣдующимъ пріемомъ.

Изъ пропорціи

$$\frac{m_k}{m_{k+1}} = \frac{m_{k+1}}{m_{k+2}} = \frac{m_{k+2}}{m_{k+3}} = \cdots = \text{Const.}$$

имѣемъ

$$\frac{m_k}{m_{k+1}} = \frac{m_k + m_{k+1}}{m_{k+1} + m_{k+2}}$$

и

$$\Lambda_1 = \operatorname{Log}(m_k + m_{k+1}) - \operatorname{Log}(m_{k+1} + m_{k+2}). \quad \ldots\ldots (18)$$

Взявши сумму абсолютныхъ значеній сосѣднихъ отклоненій вправо и влѣво, мы исключаемъ возможную ошибку въ положеніи нуль-пункта прибора, такъ какъ $m_k + m_{k+1}$ представляетъ собою ничто иное, какъ полный размахъ прибора отъ крайняго положенія вправо до крайняго положенія влѣво, и въ этомъ случаѣ не требуется вовсе, чтобы отсчетъ, соотвѣтствующій положенію равновѣсія гальванометра, совпадалъ-бы точно съ нулемъ дѣленій шкалы.

Наблюдая рядъ послѣдующихъ значеній m_k, вычислимъ, по формулѣ (18), соотвѣтствующія величины Λ_1, изъ которыхъ потомъ возьмемъ среднее. Этотъ способъ опредѣленія логариѳмическаго декремента Λ_1 тѣмъ удобенъ, что, по согласію отдѣльныхъ величинъ Λ_1, можно судить о томъ, насколько самыя наблюденія вообще надежны.

Но можно ограничиться только первой и послѣдней суммой и отсюда прямо получить Λ_1.

Дѣйствительно, предположимъ, что у насъ пронаблюдено s различныхъ отклоненій.

Тогда

$$\Lambda_1 = \mathrm{Log}\,(m_1 + m_2) - \mathrm{Log}\,(m_2 + m_3)$$

$$\Lambda_1 = \mathrm{Log}\,(m_2 + m_3) - \mathrm{Log}\,(m_3 + m_4)$$

$$\Lambda_1 = \mathrm{Log}\,(m_3 + m_4) - \mathrm{Log}\,(m_4 + m_5)$$

$$\vdots$$

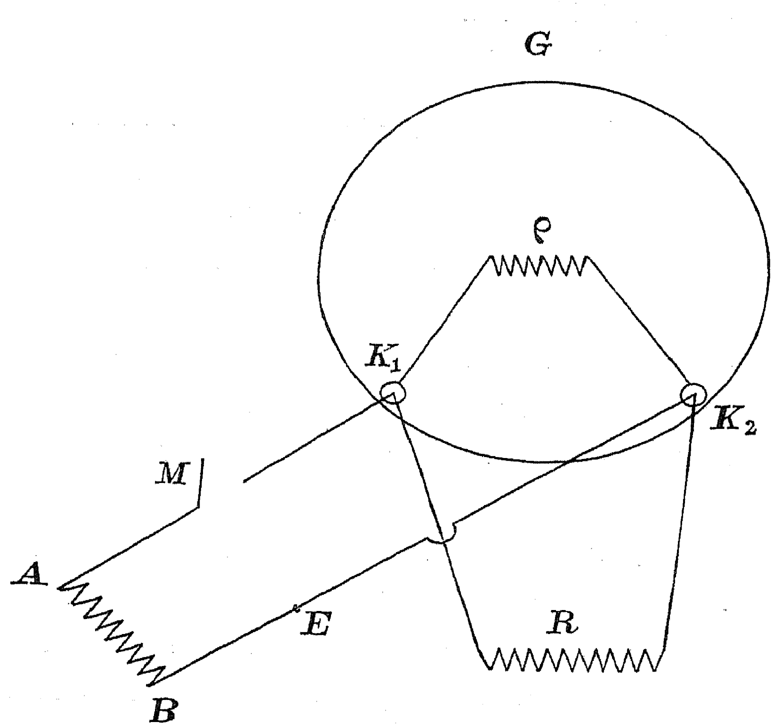
$$\Lambda_1 = \mathrm{Log}\,(m_{s-2} + m_{s-1}) - \mathrm{Log}\,(m_{s-1} + m_s).$$

Взявши сумму этихъ выраженій, получимъ

$$\Lambda_1 = \frac{\mathrm{Log}\,(m_1 + m_2) - \mathrm{Log}\,(m_{s-1} + m_s)}{s-2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Этотъ способъ опредѣленія Λ_1, очевидно, тождественъ съ предыдущимъ, такъ какъ, при опредѣленіи ариѳметическаго средняго, всѣ промежуточныя значенія $\mathrm{Log}\ (m_k + m_{k+1})$ взаимно сократятся; но, при пользованіи формулой (19) для вычисленія Λ_1, нѣтъ уже никакого критерія для сужденія о согласіи результатовъ отдѣльныхъ наблюденій.

Черт. 107.



Чтобы сообщить гальванометру начальный импульсъ и вывести его изъ положенія равновѣсія, можно воспользоваться слѣдующимъ простымъ приспособленіемъ, показаннымъ на слѣдующемъ схематическомъ чертежѣ (107).

G представляетъ собою гальванометръ, а K_1 и K_2 его наружные зажимы, къ которымъ прикрѣпляются концы проволоки наружной цѣпи съ сопротивленіемъ R.

Между тѣми-же зажимами располагаютъ отвѣтвленную цѣпь $K_1\,A\,B\,K_2$, въ которую вводятъ плоскую катушку AB и выключатель M.

Закрывъ M, кладутъ на катушку AB полюсъ какого-нибудь плоскаго, стального магнита. Тогда черезъ обмотки гальванометра пойдетъ индукціонный токъ, который и выведетъ раму съ обмоткой изъ положенія равно-

вѣсія. Послѣ этого открываютъ выключатель M. Тогда сопротивленіе наружной цѣпи будетъ по прежнему равно R.

Если, по окончаніи наблюденій надъ декрементомъ, закрыть M и снять магнитъ, то гальванометръ получитъ импульсъ въ противоположную сторону.

Можно поступить, однако, проще.

Катушку AB и выключатель M снимаютъ совсѣмъ, а въ соотвѣтствующую отвѣтвленную цѣпь вводятъ гдѣ-нибудь, напримѣръ въ E, какую-нибудь электродвижущую силу, хотя-бы отъ сухого элемента; концы-же A и B оставляютъ свободными.

Взявъ затѣмъ эти концы между пальцами двухъ рукъ, мы замкнемъ тѣмъ самымъ цѣпь гальванометра черезъ себя, и, такъ какъ сопротивленіе человѣческаго тѣла чрезвычайно велико, то черезъ гальванометръ пойдетъ очень слабый токъ. Силу этого тока можно, до извѣстной степени, регулировать, сжимая сильнѣе или слабѣе концы проволоки между пальцами, и, такимъ образомъ, получить желаемый начальный уголъ отклоненія гальванометра. Послѣ этого бросаютъ концы A и B.

Такимъ образомъ можно опредѣлить T_1' и Λ_1.

Самыя наблюденія надо производить въ слѣдующемъ порядкѣ.

Сначала совершенно размыкаютъ наружную цѣпь гальванометра. Тогда $R = \infty$.

Обозначимъ соотвѣтственную величину постоянной затуханія ε_1 черезъ ε_0, а логариѳмическій декрементъ черезъ Λ_0. Тогда, по формулѣ (11),

$$\varepsilon_0 = c_0.$$

Опредѣливъ изъ опыта соотвѣтствующія величины T_1' и Λ_0, найдемъ, по формуламъ (52) и (54) предыдущей главы,

$$T_1 = \frac{T_1'}{\sqrt{1 + 0{,}53720\,\Lambda_0^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

и

$$\varepsilon_0 = c_0 = 4{,}6052 \cdot \frac{\Lambda_0}{T_1'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

Двѣ постоянныя гальванометра T_1 и c_0 будутъ, такимъ образомъ, опредѣлены, причемъ Λ_0 бываетъ обыкновенно столь мало, что T_1 практически не отличается отъ T_1'.

Послѣ этого замыкаютъ наружную цѣпь черезъ какое-нибудь извѣстное сопротивленіе R и опредѣляютъ *только* соотвѣтствующій логариѳмическій декрементъ Λ_1, такъ какъ собственный періодъ колебаній гальванометра (при отсутствіи затуханія) $T_1 = \frac{2\pi}{n_1}$ уже извѣстенъ.

Тогда, по формулѣ (55) предыдущей главы, будемъ имѣть

$$\varepsilon_1 = 4{,}6052 \cdot \frac{1}{T_1} \cdot \frac{\Lambda_1}{\sqrt{1 + 0{,}53720\, \Lambda_1^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

По этой формулѣ опредѣлится ε_1.

Такимъ образомъ, изъ уравненія (11) будемъ имѣть

$$c = (\varepsilon_1 - c_0)(R + \rho). \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

Такъ какъ сопротивленіе ρ самого гальванометра извѣстно, хотя-бы изъ опредѣленій съ мостикомъ Wheatstone'а, то по формулѣ (23) можно легко найти и третью постоянную гальванометра c.

При этихъ наблюденіяхъ надо учитывать, въ случаѣ надобности, и сопротивленіе соединительныхъ проволокъ, входящихъ въ составъ R.

Для облегченія этихъ вычисленій, въ Сборникѣ сейсмометрическихъ таблицъ въ таблицѣ IX приведены величины $\mathrm{Log}\sqrt{1 + 0{,}53720\,\Lambda^2}$ съ пятью десятичными знаками, для различныхъ значеній Λ, отъ $\Lambda = 0{,}001$ до $\Lambda = 0{,}800$, что соотвѣтствуетъ коэффиціенту затуханія v равному, примѣрно, 6,3 ($\mathrm{Log}\, v = \Lambda$).

Λ (или Λ_1) слѣдуетъ опредѣлять изъ опыта съ точностью до четвертаго десятичнаго знака, а потому, при пользованіи таблицей IX, поправку на четвертый десятичный знакъ въ величинѣ Λ опредѣляютъ уже интерполированіемъ, при помощи таблицы XVII пропорціональныхъ частей.

c слѣдуетъ опредѣлять при различныхъ значеніяхъ R или ε_1, и изъ всѣхъ полученныхъ, такимъ образомъ, величинъ взять среднее.

При выборѣ соотвѣтствующихъ величинъ R, надо руководствоваться тѣмъ, чтобы коэффиціентъ затуханія v_1 ($\Lambda_1 = \mathrm{Log}\, v_1$) не былъ-бы, ни слишкомъ малъ, ни слишкомъ великъ, такъ какъ иначе опредѣленіе c будетъ неточно. Наивыгоднѣйшія значенія для v_1 заключены, примѣрно, въ предѣлахъ между 1,5 и 6.

Опредѣливъ постоянныя c_0 и c, можно сейчасъ-же рѣшить и такой вопросъ: какое должно быть сопротивленіе внѣшней цѣпи R_a, чтобы гальванометръ находился строго на границѣ апеþіодичности?

Въ этомъ случаѣ

$$\varepsilon_1 = n_1 = \frac{2\pi}{T_1}.$$

Тогда изъ формулы (23) будемъ имѣть

$$R_a = \frac{c}{n_1 - c_0} - \rho. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

При пользованіи гальванометрическимъ методомъ регистраціи, слѣдуетъ всегда устанавливать гальванометръ строго на границу апеpіодичности, что практически очень легко осуществить, такъ какъ весь вопросъ сводится только къ выбору подходящаго внѣшняго сопротивленія цѣпи R_a.

Въ этомъ случаѣ затуханіе гальванометра будетъ очень сильное и вліяніе собственнаго его движенія на запись будетъ почти совершенно исключено; кромѣ того, при границѣ апеpіодичности, самыя формулы принимаютъ, какъ мы увидимъ дальше, болѣе простой и изящный видъ.

Опытъ показываетъ, что постоянныя гальванометра n_1, c_0 и c почти не зависятъ отъ температуры. Что-же касается сопротивленія мѣдныхъ проволокъ, то оно увеличивается съ возрастаніемъ температуры t, причемъ соотвѣтствующій термическій коэффиціентъ можно въ среднемъ принять равнымъ 0,004. Такимъ образомъ, сопротивленіе при температурѣ t, а именно R_t, связано съ сопротивленіемъ R_0 при 0° С. слѣдующимъ соотношеніемъ:

$$R_t = R_0(1 + 0{,}004\,t) \dots\dots\dots\dots\dots\dots (25)$$

Съ этой зависимостью сопротивленія отъ температуры приходится считаться при выборѣ проволокъ для предѣльнаго сопротивленія R_a, которое должно быть всегда пріурочено къ средней температурѣ того помѣщенія, гдѣ соотвѣтствующій сейсмографъ долженъ быть установленъ.

Если-бы мы, кромѣ постоянныхъ n_1 и c, опредѣлили-бы еще изъ опыта, пропуская черезъ гальванометръ токъ опредѣленной силы, еще такъ называемую *постоянную* гальванометра C (см. формулу (5)), чего, однако, для сейсмометрическихъ цѣлей вовсе не требуется, то мы могли-бы, по этимъ тремъ величинамъ, опредѣлить еще моментъ инерціи подвижной катушки K_1 и постоянную крученія D.

Дѣйствительно, формулы (4), (8) и (9) даютъ намъ:

$$C = \frac{D}{F_1 N_1 S_1} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

$$n_1^2 = \frac{D}{K_1} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (8)$$

$$c = \frac{F_1^2}{2K_1} \cdot [N_1 S_1]^2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (10)$$

Возводя выраженіе для C въ квадратъ и умноживъ его на выраженіе (10), получимъ

$$C^2 c = \frac{D^2}{2K_1}.$$

Но изъ формулы (8)

$$D = n_1^2 K_1;$$

слѣдовательно,

$$C^2 c = \frac{n_1^4 K_1}{2}$$

или

$$K_1 = \frac{2c\,C^2}{n_1^4} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (26)$$

и

$$D = \frac{2c\,C^2}{n_1^2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (27)$$

Если-бы мы знали еще отдѣльно общую площадь обмотокъ подвижной катушки $N_1 S_1$, то, по формуламъ (4) и (27), могли-бы вычислить и силу магнитнаго поля гальванометра F_1:

$$F_1 = \frac{2c\,C}{n_1^2 (N_1 S_1)} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (28)$$

Для лучшаго уясненія вопроса объ опредѣленіи постоянныхъ гальванометра (T_1, c_0 и c), приведемъ слѣдующіе численные примѣры, заимствованные изъ практики (гальванометръ № VI, установленный при горизонтальномъ, апеand періодическомъ сейсмографѣ въ Парижѣ, и гальванометръ № VII, установленный при такомъ же сейсмографѣ въ Пулковѣ).

Гальванометръ № VI.

I) $R = \infty$.

m_k (исправленное)	$m_k + m_{k+1}$	Log $\{m_k + m_{k+1}\}$	Λ_0
133,9 м/м			
	258,1 м/м	2,4118	
124,2			0,0301
	240,8	2,3817	
116,6			0,0305
	224,5	2,3512	
107,9			0,0300
	209,5	2,3212	
101,6			0,0300
	195,5	2,2912	
93,9			0,0297
	182,6	2,2615	
88,7			0,0298
	170,5	2,2317	
81,8			0,0295
	159,3	2,2022	
77,5			0,0296
	148,8	2,1726	
71,3			0,0296
	139,0	2,1430	
67,7			

Въ среднемъ $\Lambda_0 = 0{,}0299$.

m_k (поправка не требуется)	$m_k + m_{k+1}$	$\mathrm{Log}\,\{m_k + m_{k+1}\}$	Λ_0
51,4 м/м			
	98,4 м/м	1,9930	
47,0			0,0292
	92,0	1,9638	
45,0			0,0293
	86,0	1,9345	
41,0			0,0309
	80,1	1,9036	
39,1			0,0297
	74,8	1,8739	
35,7			0,0294
	69,9	1,8445	
34,2			0,0303
	65,2	1,8142	
31,0			0,0289
	61,0	1,7853	
30,0			0,0294
	57,0	1,7559	
27,0			0,0300
	53,2	1,7259	
26,2			

Въ среднемъ

$$\Lambda_0 = 0{,}0297.$$

Общее среднее

$$\Lambda_0 = 0{,}0298,\quad v_1 = 1{,}07\quad [v_1 = \mathrm{Log}\,\Lambda_0].$$

Кромѣ того,

$$T_1' = 24{,}^\circ 69.$$

Слѣдовательно,

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= 24{,}^\circ 68 \\ n_1 &= 0{,}2546 \\ \varepsilon_0 = c_0 &= 0{,}00556 \end{aligned}\right\}\quad \text{(см. формулы (20), (14) и (21)).}$$

и

II) $R = 160\,\Omega$.

m_k (исправленное)	$m_k + m_{k+1}$	Log $\{m_k + m_{k+1}\}$	Λ_1
207,7 м/м			
	327,2 м/м	2,5148	
119,5			0,2399
	188,3	2,2749	
68,8			0,2391
	108,6	2,0358	
39,8			0,2385
	62,7	1,7973	
22,9			0,2410
	36,0	1,5563	
13,1			
		Въ среднемъ	0,2396
222,5			
	350,9	2,5452	
128,4			0,2394
	202,2	2,3058	
73,8			0,2389
	116,65	2,0669	
42,85			0,2395
	67,20	1,8274	
24,35			0,2414
	38,55	1,5860	
14,2			
		Въ среднемъ	0,2398

Общее среднее

$$\Lambda_1 = 0,2397, \quad v_1 = 1,74.$$

$$\varepsilon_1 = 0,04406.$$

III) $R = 80\,\Omega$.

m_k (исправленное)	$m_k + m_{k+1}$	Log $\{m_k + m_{k+1}\}$	Λ_1
134,2 м/м 48,0 16,0	182,2 м/м 64,0	2,2606 1,8062	0,4544
			0,4544
319,8 112,3 39,0 14,0	432,1 151,3 53,0	2,6356 2,1798 1,7243	0,4558 0,4555
		Въ среднемъ	0,4557
352,9 123,3 43,9 14,6	476,2 167,2 58,5	2,6778 2,2232 1,7672	0,4546 0,4560
		Въ среднемъ	0,4553

Общее среднее

$$\Lambda_1 = 0{,}4551, \quad v_1 = 2{,}85.$$

$$\varepsilon_1 = 0{,}08056.$$

IV) $R = 50\,\Omega$.

m_k (исправленное)	$m_k + m_{k+1}$	$\mathrm{Log}\,\{m_k + m_{k+1}\}$	Λ_1
302,9 м/м 55,0 8,9	357,9 м/м 63,9	2,5538 1,8055	0,7483
332,2 58,3 11,9	390,5 70,2	2,5916 1,8463	0,7453
80,3 15,6 1,8[1])	95,9 17,4	1,9818 1,2405	0,7413
354,0 64,1 10,9	418,1 75,0	2,6213 1,8751	0,7462

Общее среднее

$$\Lambda_1 = 0{,}7453, \quad v_1 = 5{,}56.$$

$$\varepsilon_1 = 0{,}1220.$$

Для сопротивленія гальванометра имѣемъ

$$\rho = 4{,}12\,\Omega \qquad \text{(при } 19^\circ\text{ C.)}$$

На основаніи этихъ данныхъ получаются, по формулѣ (23), слѣдующія значенія постоянной c.

---

1) Не слѣдуетъ, въ сущности, брать такія малыя значенія m_k.

$R+\rho$	Λ_1	ε_1	c
164,12 Ω	0,2397	0,04406	6,320
84,12	0,4551	0,08056	6,310
54,12	0,7453	0,1220	6,300

Въ среднемъ

$$c = 6,310.$$

Такъ какъ, кромѣ того,

$$c_0 = 0,00556$$

и

$$n_1 = 0,2546,$$

то для внѣшняго сопротивленія R_a, при которомъ гальванометръ будетъ находиться строго на границѣ аперіодичности ($\varepsilon_1 = n_1$), будемъ имѣть

$$R_a = 21,22\,\Omega. \qquad \text{(при } 19°\text{ C.)}$$

Если-бы гальванометръ былъ замкнутъ самъ на себя, то онъ уже былъ-бы сильно аперіодиченъ съ весьма значительнымъ затуханіемъ.

Дѣйствительно, для $R = 0$,

$$\varepsilon_1 = 1,5371,$$

а, слѣдовательно,

$$h_1 = \frac{\varepsilon_1}{n_1} = 6,037.$$

Для другого гальванометра № VII получились слѣдующія данныя:

$$c_0 = 0,00538$$

$$T_1 = 24{,}^s59$$

$$n_1 = 0,2556$$

$$\rho = 4,12\,\Omega \qquad \text{(при } 19°\text{ C.)}$$

$R + \rho$	A_1	ε_1	c
164,12 Ω	0,2490	0,04589	6,648
114,12	0,3507	0,06362	6,647
84,12	0,4765	0,08428	6,638
54,12	0,7917	0,1283	6,653

Въ среднемъ

$$c = 6,647.$$

Отсюда находимъ

$$R_a = 22,44\,\Omega. \qquad \text{(при 19° C.)}$$

Мы видимъ, такимъ образомъ, что опредѣленіе постоянныхъ гальванометра не представляетъ на практикѣ никакихъ затрудненій.

Для *сейсмометрическихъ цѣлей* достаточно знать собственный періодъ гальванометра T_1 (безъ затуханія) съ точностью до 0,1 секунды.

---

§ 3.

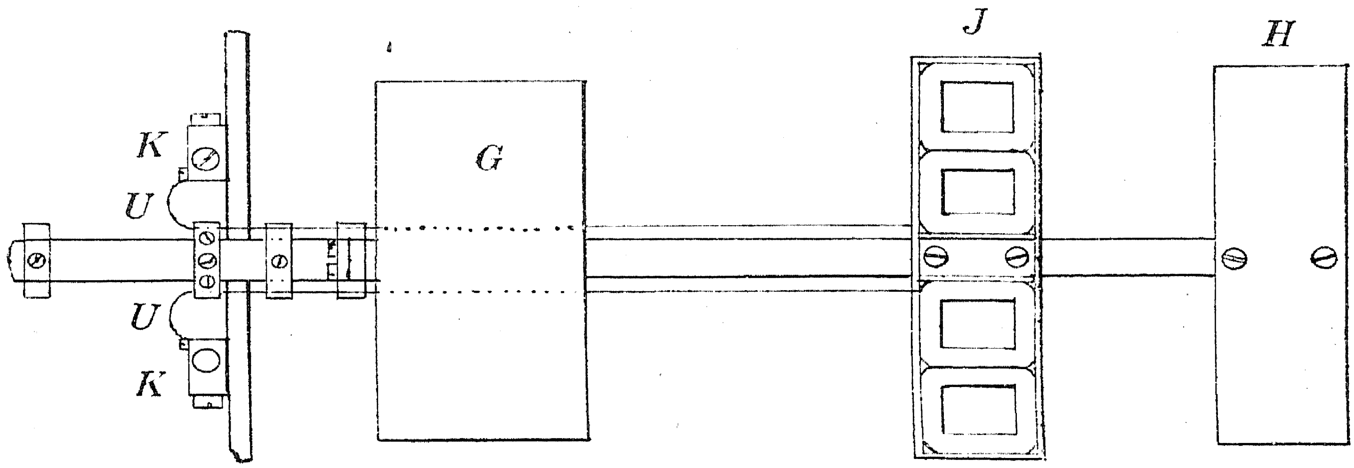
Теорія гальванометрической регистраціи.

Слѣдующій чертежъ 108 представляетъ собою устройство приспособленія для гальванометрической регистраціи (видъ сверху).

G есть тяжелая масса горизонтальнаго маятника, H — мѣдная пластинка для магнитнаго затуханія, J — целлулоидная рама съ четырьмя индукціонными катушками, K — наружные зажимы, U — тонкіе, металлическіе, серебрянные листочки, соединяющіе концы проволокъ системы индукціонныхъ катушекъ съ неподвижными зажимами K. Магниты не показаны на чертежѣ.

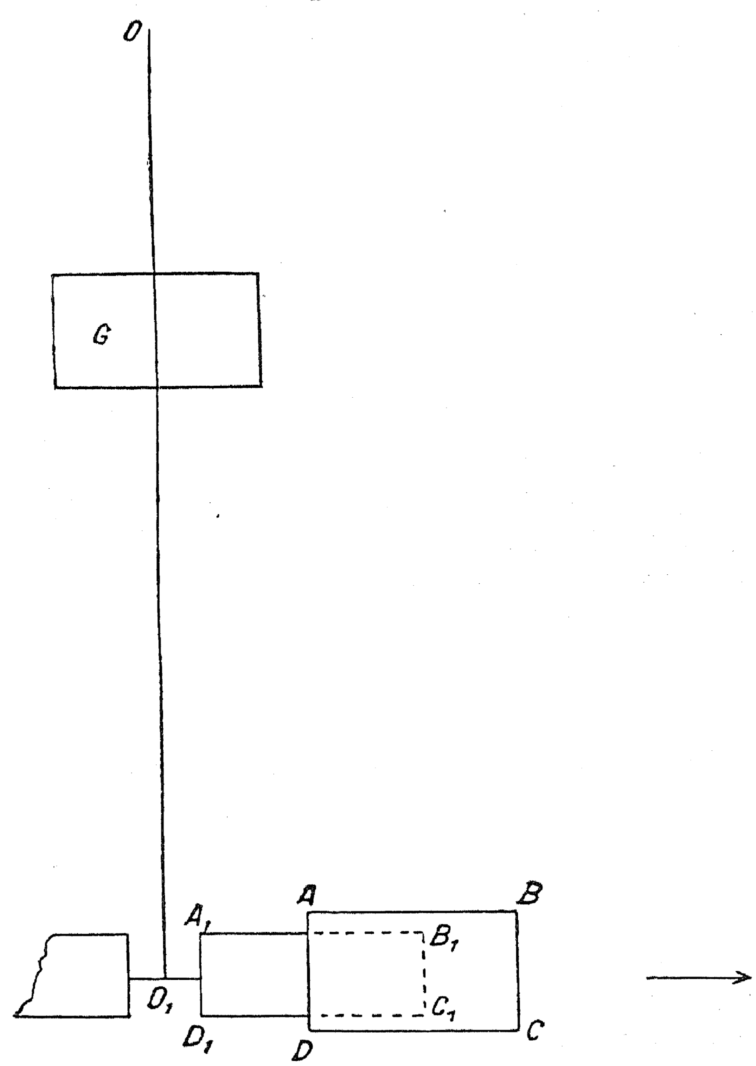
Надъ индукціонными катушками полюсы постоянныхъ магнитовъ располагаются такъ, какъ это показано для одной катушки на слѣдующемъ чертежѣ 109, а именно, при равновѣсіи маятника, одна половина каждой катушки входитъ въ болѣе или менѣе постоянное магнитное поле, силу котораго мы обозначимъ черезъ F, а другая половина находится внѣ поля.

Черт. 108.



На чертежѣ 109 (видъ сверху) $ABCD$ представляетъ собою одинъ полюсъ подковообразнаго магнита, связаннаго со штативомъ маятника, а $A_1B_1C_1D_1$ — одну подвижную индукціонную катушку. G — тяжелая масса маятника, а O — ось вращенія.

Черт. 109.



Предположимъ пока, что у насъ имѣется только одинъ четырехъ-угольный оборотъ проволоки $A_1B_1C_1D_1$. Ширину его $A_1D_1 = B_1C_1$ обозначимъ черезъ a, а разстояніе OO_1 черезъ L_1.

Когда маятникъ повернется вправо на очень малый уголъ θ, то потокъ Q магнитной силы, проникающій черезъ данный контуръ, увеличится на величину

$$FaL_1\theta.$$

Ограничиваясь малыми углами поворота θ, мы можемъ сказать, что, исходя изъ первоначальнаго отклоненнаго положенія маятника, вообще

$$dQ = FaL_1\,d\theta.$$

или

$$\frac{dQ}{dt} = Fa\,L_1\,\theta'.$$

Если число оборотовъ проволоки на рамѣ N, то

$$\frac{dQ}{dt} = F\,.\,Na\,L_1\,\theta',$$

гдѣ, если проволока намотана въ нѣсколько слоевъ, то подъ a надо подразумѣвать *среднюю* ширину одного оборота.

Подъ вліяніемъ измѣненія потока силы, въ данной катушкѣ, по законамъ электро-магнитной индукціи, возбудится электродвижущая сила E, равная $-\frac{dQ}{dt}$.

Такихъ индукціонныхъ катушекъ 4, а потому, если онѣ соединены между собою такъ, что индукціонные токи *во внѣшней цѣпи* взаимно усиливаются, т.е. идутъ по одному и тому-же направленію, то общая электродвижущая сила въ цѣпи будетъ

$$E = -4\frac{dQ}{dt} = -4\,.\,F\,Na\,L_1\,\theta' \ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

Обозначимъ общее сопротивленіе всѣхъ индукціонныхъ катушекъ, т.-е. сопротивленіе проволоки между зажимами K въ сторону катушекъ, черезъ R_s, причемъ катушки могутъ быть, смотря по условіямъ, соединены между собою или послѣдовательно, или параллельно, или частью послѣдовательно, а частью параллельно. Сопротивленіе-же разныхъ соединительныхъ проволокъ между зажимами маятника K и зажимами гальванометра обозначимъ черезъ r.

Тогда внѣшнее сопротивленіе, по отношенію къ гальванометру, будетъ

$$R = R_s + r, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

а общее сопротивленіе цѣпи маятника, соединеннаго съ гальванометромъ,

$$R + \rho.$$

Такимъ образомъ, подъ вліяніемъ движенія маятника, черезъ гальванометръ пойдетъ электрическій токъ, электродвижущая сила котораго пропорціональна *угловой скорости* движенія маятника.

Подставимъ теперь выраженіе для E изъ формулы (29) въ общее дифференціальное уравненіе движенія гальванометра (12) и введемъ для

сокращенія слѣдующее обозначеніе:

$$k = 4 \cdot \frac{F \cdot F_1 N a N_1 S_1 L_1}{K_1 (R + \rho)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

Тогда мы получимъ для гальванометра слѣдующее, окончательное дифференціальное уравненіе:

$$\varphi'' + 2\varepsilon_1 \varphi' + n_1^2 \varphi + k\theta' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

Коеффиціентъ k называется *переводнымъ множителемъ;* онъ, какъ мы увидимъ дальше, очень легко опредѣляется изъ опыта. Изъ формулы (32) видно, что, въ отношеніи своихъ размѣровъ, k обратно пропорціонально нѣкоторому времени.

Дѣйствительно,

$$\varphi'' = \left[\frac{1}{T^2}\right],$$

$$\theta' = \left[\frac{1}{T}\right],$$

слѣдовательно,

$$k = \left[\frac{1}{T}\right].$$

Формула (31) наглядно показываетъ намъ отъ какихъ именно величинъ этотъ переводный множитель зависитъ. Чѣмъ больше k, тѣмъ чувствительнѣе будетъ регистрація.

Регулировать величину k можно очень просто, сближая или удаляя полюсы магнитовъ при индукціонныхъ катушкахъ, т.-е. измѣняя силу магнитнаго поля F. Во всемъ дальнѣйшемъ мы будемъ считать переводный множитель k величиной положительной.

Приступимъ теперь къ интегрированію уравненія (32) въ предположеніи, что смѣщенія почвы x удовлетворяютъ закону гармоническихъ колебаній:

$$x = x_m \sin(pt + \delta),$$

гдѣ

$$p = \frac{2\pi}{T_p}.$$

Предположимъ далѣе, что маятникъ, къ которому мы приспособили гальванометрическую регистрацію, снабженъ сильнымъ затуханіемъ.

Тогда, для не слишкомъ малыхъ значеній времени t, уравненіе движенія маятника можетъ быть представлено формулой (95) предыдущей главы:

$$\theta = \frac{x_m}{l} \cdot \frac{1}{(1 + u^2)\sqrt{1 - \mu^2 f(u)}} \sin\{p(t - \tau) + \delta\}.$$

Возьмемъ производную отъ этой функціи по времени и подставимъ ее въ предыдущее уравненіе (32).

Тогда

$$\varphi'' + 2\varepsilon_1 \varphi' + n_1^2 \varphi = -kp \cdot \frac{x_m}{l} \cdot \frac{1}{(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}} \cos\{p(t-\tau)+\delta\}.$$

Но, такъ какъ

$$-\cos\{p(t-\tau)+\delta\} = \sin\left\{p(t-\tau)+\left(\delta-\frac{\pi}{2}\right)\right\},$$

то предыдущее уравненіе можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\varphi'' + 2\varepsilon_1 \varphi' + n_1^2 \varphi = \frac{p^2 x_m}{l_1} \sin\{pt+\delta_1\}, \qquad (33)$$

гдѣ

$$\frac{1}{l_1} = \frac{k}{l} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}} \qquad (34)$$

и

$$\delta_1 = \delta - p\tau - \frac{\pi}{2} \qquad (35)$$

Для интегрированія уравненія (33) мы воспользуемся прямо выводами и формулами предыдущей главы.

Мы имѣли тамъ, для движенія горизонтальнаго маятника при гармоническихъ смѣщеніяхъ почвы, слѣдующее дифференціальное уравненіе движенія (см. формулы (72) и (71) предыдущей главы):

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta = \frac{p^2 x_m}{l} \cdot \sin(pt+\delta), \qquad (36)$$

общій интегралъ котораго имѣлъ слѣдующій видъ:

$$\theta = e^{-\varepsilon t}[\Gamma_1 \cos\gamma t + \Gamma_2 \sin\gamma t] +$$
$$+ \frac{x_m}{l} \cdot \frac{1}{(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}} \sin\{p(t-\tau)+\delta)\}, \ldots \text{(формула (93) главы V)}$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= +\sqrt{n^2-\varepsilon^2}, \\ \mu^2 &= 1-\frac{\varepsilon^2}{n^2}, \\ u &= \frac{T_p}{T}, \qquad \left(T=\frac{2\pi}{n}\right) \\ f(u) &= \left[\frac{2u}{1+u^2}\right]^2 \\ \text{и} \quad \tau &= \frac{1}{p}\operatorname{arctg}\left\{\sqrt{1-\mu^2}\cdot\frac{2u}{u^2-1}\right\}. \end{aligned}\right\} \text{(См. формулы (36), (56), (57), (88), (89), (91) и (92) предыдущей главы).}$$

На основаніи этихъ данныхъ, если только у гальванометра $n_1 > \varepsilon_1$, то общій интегралъ уравненія (33) можетъ быть выраженъ слѣдующей формулой, въ которой, вмѣсто того чтобы писать τ_1, мы напишемъ пока τ_2:

$$\varphi = e^{-\varepsilon_1 t}[\Gamma_1 \cos\gamma_1 t + \Gamma_2 \sin\gamma_1 t] +$$

$$+ \frac{x_m}{l_1}\cdot\frac{1}{(1+u_1^2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\mu_1^2 f(u_1)}}\cdot\sin\{p(t-\tau_2)+\delta_1\}, \ldots\ldots (37)$$

гдѣ

$$\gamma_1 = +\sqrt{n_1^2 - \varepsilon_1^2},$$

$$\mu_1^2 = 1 - \frac{\varepsilon_1^2}{n_1^2},$$

$$u_1 = \frac{T_p}{T_1}, \qquad \left(T_1 = \frac{2\pi}{n_1}\right) \ldots\ldots\ldots (38)$$

$$f(u_1) = \left[\frac{2u_1}{1+u_1^2}\right]^2$$

и

$$\tau_2 = \frac{1}{p}\operatorname{arctg}\left\{\sqrt{1-\mu_1^2}\cdot\frac{2u_1}{u_1^2-1}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (39)$$

Здѣсь Γ_1 и Γ_2 суть двѣ новыя постоянныя произвольныя, которыя опредѣляются изъ начальныхъ условій движенія.

Уравненіе (37) показываетъ намъ, что движеніе гальванометра состоитъ изъ двухъ частей.

Первые два члена, передъ которыми стоитъ множитель $e^{-\varepsilon_1 t}$, зависятъ отъ собственнаго движенія гальванометра (затухающая синусоида), послѣдній-же членъ обуславливается исключительно только движеніемъ маятника или, что то-же самое, движеніемъ почвы. Онъ представляетъ собою простую синусоиду, періодъ которой въ точности равенъ періоду T_p данной сейсмической волны.

Чтобы исключить, по возможности, вліяніе собственнаго движенія гальванометра, надо и здѣсь, какъ и для маятника, усилить его затуханіе. Тогда первые два члена въ формулѣ (37) исчезнутъ уже при сравнительно малыхъ значеніяхъ t, и тогда намъ не придется вовсе заботиться объ опредѣленіи постоянныхъ Γ_1 и Γ_2, т.-е. начальныя условія движенія не будутъ уже имѣть ровно никакого значенія.

Выгоднѣе всего поставить гальванометръ строго на границу апериодичности; тогда μ_1^2 будетъ равно нулю и соотвѣтствующія формулы значительно упростятся.

Это, какъ мы видѣли раньше, чрезвычайно легко сдѣлать.

Для этого надо только выбрать внѣшнее сопротивленіе гальванометра такъ, чтобы оно было равно

$$R_a = \frac{c}{n_1 - c_0} - \rho \ldots\ldots \text{(см. формулу (24))}$$

Слѣдовательно, сопротивленіе индукціонныхъ катушекъ R_s обязательно должно быть меньше R_a.

Если r есть сопротивленіе проволокъ, соединяющихъ маятникъ съ гальванометромъ, а r_1 нѣкоторое малое добавочное сопротивленіе, вводимое во внѣшнюю цѣпь гальванометра и приготовленное, точно такъ-же какъ и сопротивленіе r, изъ проволоки намотанной сама на себя для избѣжанія всякихъ постороннихъ индукціонныхъ вліяній, то намъ останется только подобрать r_1 такъ, чтобы удовлетворить слѣдующему условію:

$$R_s + r + r_1 = R_a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (40)$$

Это практически очень легко осуществить.

Тогда

$$\varepsilon_1 = n_1$$

и

$$\mu_1^2 = 0.$$

Пренебрегая въ этомъ случаѣ первыми двумя членами въ общей формулѣ (37), получимъ для φ слѣдующее выраженіе:

$$\varphi = \frac{x_m}{l_1} \cdot \frac{1}{(1 + u_1^2)} \cdot \sin\{p(t - \tau_2) + \delta_1\} \ldots\ldots\ldots\ldots (41)$$

При $\mu_1^2 = 0$,

$$\tau_2 = \frac{1}{p} \operatorname{arctg}\left\{\frac{2u_1}{u_1^2 - 1}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (42)$$

Подставимъ теперь въ формулу (41) значенія l_1 и δ_1 изъ формулъ (34) и (35).

Тогда

$$\varphi = k\frac{x_m}{l} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{(1 + u_1^2)(1 + u^2)\sqrt{1 - \mu^2 f(u)}} \sin\left\{p(t - \tau_2) + \delta - p\tau - \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Введемъ еще слѣдующее обозначеніе:

$$\tau_1 = \tau_2 + \frac{1}{p}\,\frac{\pi}{2};$$

тогда

$$\varphi = k\frac{x_m}{l} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{(1 + u_1^2)(1 + u^2)\sqrt{1 - \mu^2 f(u)}} \cdot \sin\{p(t - \tau - \tau_1) + \delta\}.$$

Такъ какъ

$$p = \frac{2\pi}{T_p},$$

то мы будемъ имѣть (см. формулу (42))

$$\tau_1 = T_p \left[\frac{\operatorname{arctg}\left\{\frac{2u_1}{u_1^2 - 1}\right\}}{2\pi} + \frac{1}{4} \right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (43)$$

и

$$\varphi = k\frac{T_p}{2\pi} \cdot \frac{x_m}{l} \cdot \frac{1}{(1+u_1^2)(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}} \cdot \sin\{p(t-\tau-\tau_1)+\delta\} \ldots (44)$$

Для регистраціи движенія гальванометра примѣняется обыкновенный оптическій методъ регистраціи, причемъ, въ виду того, что переводный множитель k вообще великъ, можно поставить регистрирный аппаратъ довольно близко къ гальванометру; соотвѣтствующія кривыя выигрываютъ при этомъ много въ ясности и отчетливости.

Обозначивъ разстояніе зеркала у гальванометра до поверхности регистрирнаго вала, въ направленіи нормально падающаго луча, черезъ A_1 (A_1 слѣдуетъ брать около одного метра), а отклоненіе свѣтовой точки на барабанѣ отъ ея нулевого положенія (при равновѣсіи гальванометра) черезъ y_1, будемъ, для малыхъ угловъ отклоненія гальванометра φ, имѣть

$$\varphi = \frac{y_1}{2A_1}.$$

Подставивъ эту величину въ предыдущую формулу (44), получимъ слѣдующее окончательное выраженіе:

$$y_1 = \frac{kA_1}{\pi l} \cdot T_p x_m \cdot \frac{1}{(1+u_1^2)(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}} \sin\{p(t-\tau-\tau_1)+\delta\} \ldots (45)$$

Такъ какъ наши дифференціальныя уравненія линейныя, то въ случаѣ, если движеніе почвы представляетъ собою совокупность синусоидъ, то и при гальванометрической регистраціи, какъ и при простой оптической, можно отдѣльныя рѣшенія просто суперпонировать. Мы получимъ, такимъ образомъ, также совокупность синусоидъ *съ тѣми-же самыми періодами*, но, конечно, съ другими амплитудами и съ другими начальными фазами.

Формула (45) показываетъ, что, при гармоническомъ движеніи почвы, кривая движенія гальванометра представляетъ собою также вполнѣ правильную синусоиду, періодъ которой въ точности равенъ періоду T_p соотвѣтствующей сейсмической волны. Эту величину можно, слѣдовательно, не-

посредственно снять съ соотвѣтствующей гальванометрической сейсмограммы, равно какъ и соотвѣтствующую максимальную амплитуду y_m. Имѣя T_p и y_m, можно тотчасъ-же вычислить и максимальную амплитуду *смѣщенія почвы* x_m.

Положивши въ формулѣ (45) $\sin\{p(t-\tau-\tau_1)+\delta\}=1$ и введя для простоты слѣдующее обозначеніе:

$$C_1=\frac{\pi l}{kA_1}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (46)$$

будемъ имѣть

$$x_m=C_1(1+u_1^2)(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}\cdot\frac{y_m}{T_p}\ldots\ldots\ldots (47)$$

C_1 есть опредѣленная постоянная для даннаго сейсмографа, которая опредѣляется заранѣе.

$u=\frac{T_p}{T}$ и $u_1=\frac{T_p}{T_1}$ извѣстны, такъ какъ сейсмограмма даетъ намъ непосредственно величину T_p, а T и T_1, т.-е. собственные періоды маятника и гальванометра (безъ затуханія), равно какъ и постоянная затуханія μ^2, также извѣстны.

Формула (47) есть основная формула, служащая для опредѣленія максимальныхъ смѣщеній почвы для правильныхъ, гармоническихъ сейсмическихъ волнъ, при примѣненіи гальванометрическаго метода регистраціи.

Вычисленія по формулѣ (47) очень упрощаются, если пользоваться ранѣе упомянутыми таблицами II, III и V, помѣщенными въ Сборникѣ сейсмометрическихъ таблицъ.

По таблицѣ II-ой находимъ величины u и u_1, по таблицѣ III-ей величину $\mathrm{Log}\,[1+u_1^2]$, а по таблицѣ V-ой величину

$$\mathrm{Log}\, U=\mathrm{Log}\left[(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}\right].$$

Мы видимъ, такимъ образомъ, что чувствительный апеіодическій гальванометръ, соединенный извѣстнымъ образомъ съ горизонтальнымъ маятникомъ, можетъ прямо служить для регистраціи движенія почвы.

Этотъ способъ регистраціи чрезвычайно простъ и удобенъ, причемъ можно всегда подобрать такое значеніе для переводнаго множителя k, при которомъ чувствительность регистраціи будетъ очень велика; такая большая чувствительность достигается при этомъ чрезвычайно простыми пріемами, не прибѣгая вовсе къ содѣйствію разныхъ, сложныхъ, увеличительныхъ рычаговъ.

На величину коэффиціента затуханія маятника μ^2 вліяетъ, конечно, и замкнутая цѣпь гальванометра; поэтому, при опредѣленіи μ^2 изъ опыта, о

чемъ рѣчь будетъ впереди, надо *сначала* установить полюсы магнитовъ при индукціонныхъ катушкахъ на требуемое разстояніе, а потомъ уже опредѣлять μ^2 при замкнутой цѣпи гальванометра.

Различные опыты и наблюденія показали, что формула (47) приводитъ къ совершенно вѣрнымъ результатамъ, причемъ различные маятники, если они только снабжены достаточно сильнымъ затуханіемъ, даютъ, въ предѣлахъ ошибокъ наблюденій, совершенно одинаковыя величины для истинныхъ амплитудъ смѣщенія почвы x_m.

Благодаря громадной чувствительности этого пріема регистраціи, можно получить разныя интересныя детали движенія почвы, которыя часто совершенно ускользаютъ при пользованіи другими методами регистраціи.

При опредѣленіи x_m по гальванометрической сейсмограммѣ, надо еще различать сторону, въ которую направлено движеніе почвы.

Условимся считать смѣщенія почвы къ сѣверу и къ востоку положительными, а къ югу и къ западу отрицательными.

Чтобы знать, какое направленіе y_1, кверху или книзу по отношенію къ оси временъ, соотвѣтствуетъ положительному смѣщенію почвы, поступаютъ слѣдующимъ образомъ.

Положимъ, что мы имѣемъ маятникъ, установленный для регистраціи составляющей движенія почвы въ меридіанѣ.

При внезапномъ смѣщеніи почвы къ сѣверу, центръ качанія маятника останется на мѣстѣ и стержень маятника, по отношенію къ штативу, подастся къ югу. Такимъ образомъ, для опредѣленія положительной стороны ординатъ y_1, надо только искусственно толкнуть немного маятникъ къ югу (для чего берутъ кусочекъ бумаги) и посмотрѣть, въ какую сторону смѣщается свѣтовая точка на барабанѣ. Эта сторона и будетъ положительной стороной ординатъ y_1. Для удобства быстрой оріентировки въ направленіяхъ смѣщенія почвы, соединяютъ проволоки отъ маятника съ гальванометромъ всегда такъ, чтобы, при положительномъ смѣщеніи почвы, свѣтовая точка на бумагѣ перемѣщалась-бы кверху, въ ту именно сторону, гдѣ начинается запись на бумагѣ.

Мы видѣли раньше, что, при прямой оптической регистраціи движенія маятника, максимальная амплитуда размаха на сейсмограммѣ запаздываетъ на τ секундъ противъ соотвѣтствующаго максимума движенія почвы, причемъ величину τ легко вычислить по таблицѣ VI Сборника сейсмометрическихъ таблицъ (см. формулу (112) предыдущей главы).

Формула-же (45) показываетъ, что, при примѣненіи гальванометрическаго способа регистраціи, существуетъ еще добавочная разность фазъ, т.-е. максимумъ на кривой гальванометра наступаетъ еще τ_1 секундами позднѣе.

Такимъ образомъ, если t_m есть моментъ какого-нибудь максимума, снятаго съ гальванометрической сейсмограммы, а t_{x_m} моментъ соотвѣтствующаго максимума истиннаго движенія почвы, то

$$t_{x_m} = t_m - \tau - \tau_1, \dots\dots\dots\dots\dots\dots (48)$$

гдѣ величина τ_1 опредѣляется по формулѣ (43).

Для опредѣленія поправки τ_1 имѣется въ Сборникѣ сейсмометрическихъ таблицъ особая таблица VII, гдѣ приведены величины отношенія $\frac{\tau_1}{T_p}$ для различныхъ значеній u_1, отъ $u_1 = 0,1$ до $u_1 = 4,0$.

По ранѣе изложеннымъ причинамъ, слѣдуетъ помѣщать въ различныхъ сейсмическихъ бюллетеняхъ, какъ результатъ анализа сейсмограммъ, на ряду съ элементами сейсмическихъ волнъ T_p и x_m, и соотвѣтствующіе моменты максимума истиннаго смѣщенія *почвы* t_{x_m}, но никоимъ образомъ не моменты максимумовъ на сейсмограммѣ t_m.

При величинахъ x_m слѣдуетъ ставить знаки $+$ или $-$, въ зависимости отъ того, было-ли смѣщеніе почвы въ данный моментъ положительное или отрицательное.

---

§ 4.

Увеличеніе.

Разсмотримъ теперь въ заключеніе вопросъ объ увеличеніи сейсмографа, при примѣненіи гальванометрическаго способа регистраціи.

Ранѣе было указано, что подъ увеличеніемъ $\mathfrak{V}$ подразумѣваютъ отношеніе максимальнаго отклоненія свѣтовой точки на барабанѣ y_m къ соотвѣтствующему максимальному смѣщенію почвы x_m.

Изъ формулъ (46) и (47) слѣдуетъ, что

$$\mathfrak{V} = \frac{kA_1}{\pi l} \cdot \frac{T_p}{(1+u_1^2)(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}} \dots\dots\dots\dots (49)$$

Въ маятникахъ съ сильнымъ затуханіемъ, которые мы теперь только и разсматриваемъ, μ^2 очень мало, а потому предыдущій радикалъ весьма мало отличается отъ 1. Для простоты дальнѣйшихъ выводовъ, предположимъ, что маятникъ установленъ строго на границу аперіодичности, т.-е., что $\mu^2 = 0$.

Кромѣ того предположимъ, что собственный періодъ маятника безъ за-

туханія T равенъ періоду соотвѣтствующаго гальванометра T_1. Къ этому слѣдуетъ всегда стремиться, такъ такъ тогда задача объ опредѣленіи азимута эпицентра, по первымъ максимальнымъ отклоненіямъ двухъ маятниковъ, установленныхъ во взаимно перпендикулярныхъ плоскостяхъ, при вступленіи первыхъ продольныхъ сейсмическихъ волнъ, получаетъ, какъ мы увидимъ дальше, чрезвычайно простое рѣшеніе.

Если $T = T_1$, то и $u = u_1$.

Принимая еще во вниманіе, что

$$T_p = T \cdot u,$$

будемъ имѣть

$$\mathfrak{V} = \frac{kA_1}{\pi l} \cdot T \frac{u}{(1 + u^2)^2} \dots \dots \dots \dots (50)$$

Въ этой формулѣ перемѣнной величиной является слѣдующая функція s:

$$s = \frac{u}{(1 + u^2)^2} \dots \dots \dots \dots (51)$$

Чтобы увеличить $\mathfrak{V}$, надо увеличить переводный множитель k (сближая полюсы магнитовъ у индукціонныхъ катушекъ) или разстояніе A_1 зеркала до регистрирнаго вала.

Формула (50) показываетъ, что для очень короткихъ сейсмическихъ волнъ, когда T_p составляетъ доли секунды, u очень мало и тогда чувствительность гальванометрическаго метода регистраціи невелика, но такія волны, при дальнихъ землетрясеніяхъ, почти никогда не встрѣчаются. По мѣрѣ-же возрастанія u, $\mathfrak{V}$ сначала быстро увеличивается, затѣмъ возрастаніе $\mathfrak{V}$ идетъ медленнѣе; далѣе $\mathfrak{V}$ достигаетъ нѣкотораго максимума $\mathfrak{V}_m$, при $u = u_m$, а затѣмъ уже $\mathfrak{V}$ медленно убываетъ.

Максимумъ $\mathfrak{V}$ или s (s_m) опредѣлится изъ условія

$$\frac{ds}{du} = 0$$

или

$$\frac{(1 + u^2)^2 - 2u\,(1 + u^2) \cdot 2u}{(1 + u^2)^4} = \frac{1 + u^2 - 4u^2}{(1 + u^2)^3} = 0.$$

Отсюда находимъ

$$u_m = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577$$

и

$$s_m = \frac{3\sqrt{3}}{16} = 0{,}3248.$$

Для лучшаго освѣщенія этого вопроса, возьмемъ конкретный примѣръ, близко подходящій къ тому, что встрѣчается дѣйствительно на практикѣ.

Соотвѣтственно этому положимъ

$$T = 25 \text{ сек.}$$

$$l = 118 \, {}^{\text{м}}/_{\text{м}}$$

$$k = 55,$$

а для A_1 возьмемъ 1 метръ.

$$A_1 = 1000 \, {}^{\text{м}}/_{\text{м}}.$$

Тогда, при $T_p = 1$ сек., $u = u_1 = 0{,}040$, $s = s_1 = 0{,}0399$ и соотвѣтствующее увеличеніе $\mathfrak{V}_1$, по формулѣ (50), будетъ

$$\mathfrak{V}_1 = 148.$$

Итакъ, даже въ самомъ невыгодномъ случаѣ, который рѣдко встрѣчается на практикѣ, т.-е., когда $T_p = 1$ с., увеличеніе $\mathfrak{V}_1$ далеко не мало.

Взявши, напримѣръ, для A_1, вмѣсто $1000 \, {}^{\text{м}}/_{\text{м}}$, $1351 \, {}^{\text{м}}/_{\text{м}}$, увеличеніе, при $T_p = 1$ с., было-бы уже 200.

Это то исходное увеличеніе, которое встрѣчается большею частью (при $T_p = 1$ с.) въ тяжелыхъ астатическихъ маятникахъ Wiechert'a.

При примѣненіи гальванометрической регистраціи, нѣтъ основанія слишкомъ увеличивать начальную величину $\mathfrak{V}_1$, такъ какъ $\mathfrak{V}$ итакъ чрезвычайно быстро возрастаетъ вмѣстѣ съ u.

Опредѣлимъ теперь, такъ-же какъ и раньше, для прямой оптической регистраціи, зависимость отношенія $\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}_1}$ отъ періода сейсмической волны T_p.

На основаніи вышеприведенныхъ данныхъ, получимъ изъ формулы (50), при $T = 25$ с.,

$$\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}_1} = 25{,}1 \cdot \frac{u}{(1+u^2)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (52)$$

Въ этомъ случаѣ максимумъ $\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}_1}$ наступаетъ при

$$T_p = 25 \times 0{,}577 = 14{,}4 \text{ с.},$$

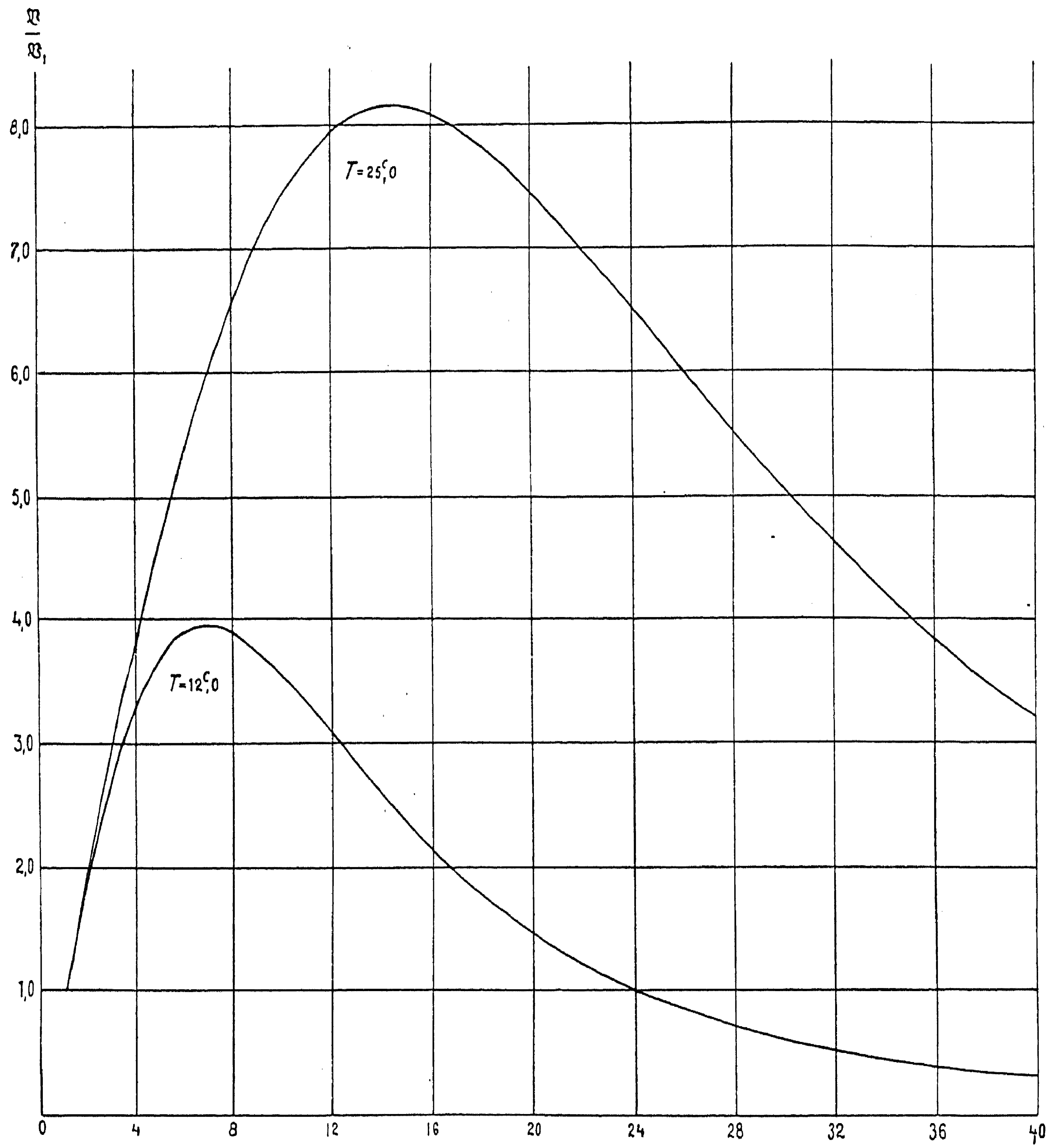
причемъ

$$\frac{\mathfrak{V}_m}{\mathfrak{V}_1} = 25{,}1 \times 0{,}3248 = 8{,}15,$$

или, при данномъ начальномъ значеніи $\mathfrak{V}_1 = 148$,

$$\underline{\mathfrak{V}_m = 1206.}$$

Черт. 110.



$\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}_1}$
8,0
7,0
6,0
5,0
4,0
3,0
2,0
1,0
0
4
8
12
16
20
24
28
32
36
40
T=25°,0
T=12°,0

Это уже громадное увеличеніе, которое достигается, однако, самыми простыми средствами.

Если-бы мы взяли, вмѣсто $T = 25$ сек., $T = 12$ сек., то получили-бы совершенно подобнымъ-же образомъ

$$\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}_1} = 12{,}2 \cdot \frac{u}{(1+u^2)^2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (53)$$

$\mathfrak{V}$ будетъ максимумъ при $T_p = 12 \times 0{,}577 = 6{,}9$ с., причемъ $\frac{\mathfrak{V}_m}{\mathfrak{V}_1}$ равняется $12{,}2 \times 0{,}3248 = 3{,}96$.

Въ слѣдующей таблицѣ VII приведены величины $\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}_1}$ для различныхъ значеній T_p, отъ 1 до 40 сек., для этихъ двухъ случаевъ: $T = 25$ сек. и $T = 12$ сек. Числа второго столбца вычислены по формулѣ (52), а третьяго по формулѣ (53).

На слѣдующемъ-же чертежѣ 110 ходъ этихъ чиселъ представленъ графически двумя кривыми.

Изъ изложенной теоріи и изъ приведенныхъ цифровыхъ данныхъ видно, что, хотя маятникъ и гальванометръ оба, по предположенію, установлены на границу апе, періодичности, увеличеніе $\mathfrak{V}$ *всегда* имѣетъ нѣкоторый максимумъ.

При обыкновенной-же оптической регистраціи движенія маятника, максимумъ для увеличенія $\mathfrak{V}$ существуетъ только, пока $\mu^2 > \frac{1}{2}$. Если-же $\mu^2 < \frac{1}{2}$, т.-е., при маятникахъ съ болѣе сильнымъ затуханіемъ, максимумъ этотъ пропадаетъ.

Числа таблицы VII показываютъ еще, что, при малыхъ значеніяхъ T_p, $\mathfrak{V}$ очень быстро возрастаетъ вмѣстѣ съ T_p. Послѣ максимума, убываніе $\mathfrak{V}$ идетъ уже гораздо медленнѣе, что особенно ощутительно у маятника съ болѣе длиннымъ періодомъ въ 25 с. Въ этомъ случаѣ, при $T_p = 40$ с., $\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}_1}$ еще равно 3,17, т.-е. составляетъ 0,39 максимальной величины $\frac{\mathfrak{V}_m}{\mathfrak{V}_1} = 8{,}15$.

При $T = 12$ с., убываніе $\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}_1}$ идетъ уже гораздо быстрѣе.

Итакъ, мы видимъ, что, при примѣненіи гальванометрической регистраціи, очень выгодно давать маятнику длинный собственный періодъ колебаній. Въ этомъ случаѣ соотвѣтствующій сейсмографъ становится въ высокой степени чувствительнымъ приборомъ, причемъ, при большихъ значеніяхъ T_p, относительное измѣненіе $\mathfrak{V}$ происходитъ въ сравнительно менѣе широкихъ предѣлахъ.

Всѣ теоретическія и практическія преимущества гальванометрическаго метода регистраціи вполнѣ подтвердились многолѣтними наблюденіями Пулковской сейсмической станціи, а потому наша Сейсмическая Комиссія и по-

Таблица VII.

$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_1}$.

T_p \ T	25,0	12,0
1с	1,00	1,00
2	1,98	1,93
3	2,93	2,70
4	3,82	3,29
5	4,64	3,69
6	5,39	3,90
7	6,04	3,96
8	6,61	3,90
9	7,08	3,75
10	7,46	3,54
11	7,75	3,30
12	7,96	3,05
13	8,09	2,80
14	8,15	2,55
15	8,15	2,32
16	8,09	2,11
17	7,98	1,91
18	7,84	1,73
19	7,66	1,57
20	7,47	1,42
21	7,25	1,29
22	7,01	1,18
23	6,77	1,07
24	6,53	0,98
25	6,28	0,89
26	6,02	0,81
27	5,78	0,75
28	5,53	0,69
29	5,29	0,63
30	5,06	0,58
31	4,83	0,54
32	4,62	0,49
33	4,41	0,46
34	4,20	0,42
35	4,01	0,39
36	3,83	0,37
37	3,65	0,34
38	3,48	0,32
39	3,32	0,30
40	3,17	0,28

становила ввести этотъ методъ регистраціи на всѣхъ русскихъ сейсмическихъ станціяхъ перваго разряда.

Глава VII.

Опредѣленіе постоянныхъ сейсмографа.

§ 1.

Опредѣленіе постоянныхъ маятника n и l.

Постоянная n, входящая въ основное дифференціальное уравненіе движенія сейсмографа (см. формулу (25) § 1 главы V)

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta + \frac{1}{l}x'' = 0,$$

опредѣляется по собственному періоду колебаній маятника T', для чего служитъ ранѣе выведенная формула (53) главы V-ой.

$$n = \frac{2\pi}{T'} \cdot \sqrt{1 + 0{,}53720\,\Lambda^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Для этой цѣли надо, по возможности, ослабить затуханіе прибора, т.-е. раздвинуть полюсы магнитовъ у мѣдной пластинки, и разомкнуть цѣпь гальванометра. Полезно даже, для ослабленія магнитнаго поля, соединить полюсы каждаго магнита между собою пластинкой изъ мягкаго желѣза.

Періодъ T' и логариѳмическій декрементъ Λ опредѣляются такъ, какъ это было раньше указано, при опредѣленіи постоянныхъ гальванометра; для этого маятнику даютъ осторожно небольшой толчокъ при помощи кусочка бумаги.

Для опредѣленія T' и Λ служитъ небольшое зеркальце, прикрѣпленное къ плечу маятника около его оси вращенія. Противъ этого зеркальца ставится въ разстояніи одного метра шкала съ трубой. Поправки Δm отсчетовъ шкалы опредѣляются по таблицѣ VIII-ой, а радикалъ, входящій въ формулу (1), по таблицѣ IX-ой Сборника сейсмометрическихъ таблицъ.

Опредѣливъ n, найдемъ тотчасъ-же и собственный періодъ колебаній маятника *безъ затуханія* T, по формулѣ

$$T = \frac{2\pi}{n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

При окончательной установкѣ маятника для сейсмическихъ наблюденій, слѣдуетъ, въ случаѣ примѣненія гальванометрическаго метода регистраціи, ставить, по возможности, періодъ маятника T на періодъ соотвѣтствующаго гальванометра T_1, для каковой цѣли служитъ передній нижній винтъ у штатива маятника, при помощи котораго можно измѣнять наклонъ оси вращенія прибора.

Этимъ достигается *предварительная* синхронизація обоихъ приборовъ, — маятника и гальванометра, — что значительно упрощаетъ, какъ опредѣленіе азимутовъ эпицентровъ, такъ и опредѣленіе другихъ постоянныхъ сейсмографа μ^2 и k.

При этомъ надо имѣть въ виду слѣдующее обстоятельство.

Когда, послѣ опредѣленія T, вводятъ сильное затуханіе, сближая полюсы магнитовъ, то постоянная n или $T = \frac{2\pi}{n}$ можетъ нѣсколько измѣниться, а потому, при послѣдующей обработкѣ сейсмограммъ, надо пользоваться тѣмъ значеніемъ постоянной n или T, которое соотвѣтствуетъ окончательному положенію магнитовъ, когда они сближены между собою.

Но въ этомъ случаѣ постоянную n нельзя уже прямо опредѣлить изъ наблюденій надъ періодомъ колебаній маятника T', такъ какъ, если маятникъ поставленъ на границу апеіодичности, то у него, въ сущности, уже нѣтъ никакого собственнаго періода колебаній. Въ этомъ случаѣ, для опредѣленія n, можно воспользоваться другимъ, очень удобнымъ пріемомъ, который даетъ весьма хорошіе результаты и который будетъ изложенъ далѣе въ § 3 настоящей главы. Особенность этого пріема заключается въ томъ, что онъ даетъ возможность опредѣлить собственный періодъ колебаній маятника безъ затуханія T, когда собственное движеніе прибора уже сдѣлано апеіодическимъ.

Обратимся теперь къ опредѣленію приведенной длины маятника l.

Въ главѣ V-ой мы видѣли (см. формулу (10)), что приведенная длина l есть отношеніе момента инерціи подвижной системы K къ произведенію всей массы системы M на разстояніе r_0 ея центра тяжести до оси вращенія:

$$l = \frac{K}{Mr_0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

По этой формулѣ можно всегда вычислить длину l, когда различныя, отдѣльныя части подвижной системы имѣютъ правильную геометрическую форму. Для этой цѣли, при вычисленіи r_0, пользуются извѣстной теоремой моментовъ, а, при вычисленіи K, пользуются формулой (5) главы V-ой, по которой $K = K_0 + Md^2$, гдѣ K_0 есть моментъ инерціи даннаго тѣла относительно оси, параллельной оси вращенія и проходящей черезъ центръ тяжести тѣла, а d разстояніе между осями. Для тѣлъ правильной геометрической формы K_0 извѣстно.

Въ формулѣ (3) K представляетъ собою сумму моментовъ инерціи отдѣльныхъ составныхъ частей маятника. Для ранѣе описаннаго, тяжелаго горизонтальнаго маятника, не имѣющаго штатива, а прикрѣпляемаго непосредственно къ стѣнѣ, приходится опредѣлять l вычисленіемъ. Однако, тамъ, гдѣ это возможно, слѣдуетъ всегда предпочитать опредѣлять l непосредственно изъ опыта.

Для этого существуютъ три различные пріема.

Одинъ пріемъ состоитъ въ томъ, чтобы поставить ось вращенія маятника горизонтально. Если въ этомъ случаѣ собственный періодъ колебаній маятника безъ затуханія есть T_0, то

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

а, слѣдовательно,

$$l = \frac{T_0^2}{4\pi^2} \cdot g.$$

Но такое поворачиваніе горизонтальнаго маятника на практикѣ не всегда удобно, а потому, для опредѣленія l, слѣдуетъ предпочесть слѣдующіе два пріема.

Въ теоріи горизонтальнаго маятника мы имѣли слѣдующія два соотношенія (см. формулы (17) и (23) главы V-ой):

$$\alpha = \frac{\psi}{i} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

и

$$n^2 = \frac{gi}{l}, \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (5)$$

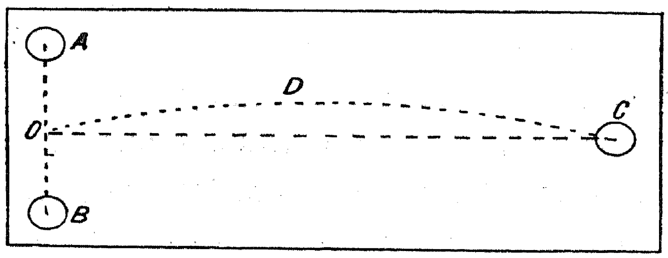
гдѣ i есть уголъ наклона оси вращенія маятника по отношенію къ вертикальной линіи, g ускореніе силы тяжести, а α уголъ поворота маятника, при наклонѣ всего штатива на уголъ ψ, около горизонтальной оси, параллельной стержню горизонтальнаго маятника.

Снабдимъ сначала маятникъ весьма слабымъ затуханіемъ (раздвинувъ магниты у мѣдной пластинки), для того, чтобы удобно было, по формулѣ (1), опредѣлять въ разныхъ случаяхъ величину n.

Поставимъ затѣмъ маятникъ на особую, небольшую, плоскую платформу, упирающуюся на три винта A, B, C (см. черт. 111), изъ которыхъ винтъ C снабженъ очень хорошей и тонкой винтовой нарѣзкой.

Такая платформа представляетъ собою, въ сущности, ничто иное, какъ обыкновенный испытатель уровней.

Черт. 111.



Обозначимъ шагъ винта C черезъ h, а разстояніе OC острія винта C до линіи AB черезъ D.

Предположимъ теперь, что платформа установлена вполнѣ горизонтально, для чего можно воспользоваться чувствительнымъ уровнемъ, а на платформу поставленъ испытуемый горизонтальный маятникъ такъ, чтобы его стержень былъ-бы параллеленъ линіи AB. При вращеніи винта C платформа будетъ измѣнять свой наклонъ, причемъ вращеніе будетъ происходить около оси AB.

Если мы повернемъ винтъ C на N оборотовъ, причемъ, для отсчитыванія числа и долей оборотовъ можетъ служить неподвижный индексъ и дѣленія, нанесенныя на шляпкѣ винта C, то величина наклона платформы ψ опредѣлится по формулѣ

$$\psi = \frac{Nh}{D}.$$

Уголъ ψ можно опредѣлить и при помощи чувствительнаго уровня, цѣна одного дѣленія котораго извѣстна. Соотвѣтствующій уголъ поворота маятника α опредѣляется зеркальнымъ способомъ. Зная, такимъ образомъ, ψ и α, найдемъ, по формулѣ (4), и соотвѣтствующій уголъ наклона оси i:

$$i = \frac{\psi}{\alpha}.$$

Подставивъ эту величину въ формулу (5), получимъ

$$l = \frac{g}{n^2} \cdot i = \frac{g}{n^2} \cdot \frac{\psi}{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Въ этой формулѣ n извѣстно изъ наблюденій надъ качаніемъ маятника, а потому мы можемъ легко опредѣлить и искомую приведенную длину маятника l.

Этотъ способъ требуетъ, однако, примѣненія вышеописанной платформы.

Гораздо проще и лучше опредѣлять l слѣдующимъ образомъ.

Формула (6) показываетъ, что, чѣмъ больше i, тѣмъ больше будетъ n, т.-е. тѣмъ меньше будетъ собственный періодъ колебаній маятника T.

Абсолютную величину i нельзя безъ платформы прямо опредѣлить, но *измѣненіе* i, т.-е. Δi, можно очень точно получить изъ наблюденій, примѣняя тотъ-же, ранѣе описанный, зеркальный способъ измѣренія малыхъ угловъ.

Для этой цѣли къ штативу маятника, внизу, прикрѣпляютъ неподвижное зеркальце. Противъ него ставятъ, въ разстояніи 5—7 метровъ, трубу съ *вертикальной* шкалой. Разстояніе зеркальца отъ шкалы обозначимъ черезъ D.

Установимъ теперь маятникъ, поворачиваніемъ винта у его штатива, на длинный періодъ, примѣрно, въ 30—35 секундъ, и опредѣлимъ затѣмъ, ранѣе указаннымъ способомъ, по формулѣ (1), соотвѣтствующую величину n, которую мы обозначимъ черезъ n_0. Уголъ наклона оси пусть будетъ i_0, а соотвѣтствующій отсчетъ по вертикальной шкалѣ h_0. Это есть исходное положеніе маятника.

Тогда, по формулѣ (5),

$$n_0^2 \cdot \frac{l}{g} = i_0 \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Затѣмъ, поворачиваніемъ того-же винта у штатива, уменьшаемъ собственный періодъ колебаній маятника. Соотвѣтствующая величина n, которая также опредѣляется изъ опыта, пусть будетъ n_1, а отсчетъ по вертикальной шкалѣ h_1.

Новый уголъ наклона оси будетъ

$$i_1 = i_0 + \Delta_1 i,$$

гдѣ

$$\Delta_1 i = \frac{h_1 - h_0}{2D} \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Въ виду значительности разстоянія D, никакія поправки на отклоненія $h_1 - h_0$ не требуются.

Въ этомъ случаѣ будемъ, слѣдовательно, имѣть:

$$n_1^2 \cdot \frac{l}{g} = i_0 + \Delta_1 i \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Такъ какъ n_0^2, n_1^2 и $\Delta_1 i$ извѣстны, то изъ формулъ (7) и (9) легко опредѣлятся двѣ неизвѣстныя i_0 и l, изъ которыхъ намъ, въ сущности, только вторая величина и нужна, такъ какъ, зная l, мы всегда, по періоду

маятника T (безъ затуханія), можемъ опредѣлить, по формулѣ (5), соотвѣтствующій уголъ наклона оси i.

На практикѣ не слѣдуетъ, однако, ограничиваться двумя величинами n^2, а слѣдуетъ произвести цѣлый рядъ опредѣленій n^2 и Δi при все уменьшающихся періодахъ T, не переходя, однако, за періодъ въ 8—10 секундъ.

Тогда, введя слѣдующія обозначенія:

$$\left.\begin{aligned} x &= i_0 \\ y &= \frac{l}{g} \end{aligned}\right\}, \qquad (10)$$

мы получимъ цѣлую систему уравненій, изъ которыхъ и можемъ опредѣлить затѣмъ двѣ неизвѣстныя x и y.

$$\left.\begin{aligned} n_0^2 y - x &= 0 \\ n_1^2 y - x &= \Delta_1 i \\ n_2^2 y - x &= \Delta_2 i \\ &\vdots \\ n_s^2 y - x &= \Delta_s i \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Опредѣлимъ изъ перваго и послѣдняго изъ этихъ уравненій приближенныя значенія x и y, которыя мы обозначимъ черезъ x_0 и y_0.

Положимъ затѣмъ

и

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 - \xi \\ y &= y_0 + \eta, \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

гдѣ ξ и η суть двѣ небольшія поправки для x_0 и y_0.

Вводя для удобства дальнѣйшихъ разсужденій еще слѣдующія обозначенія:

$$\left.\begin{aligned} a_k &= 1 \\ b_k &= n_k^2 \\ m_k &= \Delta_k i + x_0 - n_k^2 y_0 \end{aligned}\right\}, \qquad (13)$$

гдѣ k есть нѣкоторый порядковый номеръ, получимъ, для опредѣленія двухъ новыхъ неизвѣстныхъ ξ и η, слѣдующую группу уравненій:

$$\left.\begin{aligned} a_0 \xi + b_0 \eta &= m_0 \\ a_1 \xi + b_1 \eta &= m_1 \\ a_2 \xi + b_2 \eta &= m_2 \\ &\vdots \\ a_s \xi + b_s \eta &= m_s \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Общее число уравненій $s+1$, а число неизвѣстныхъ 2. Кромѣ того, въ нашемъ частномъ случаѣ, всѣ коеффиціенты a равны 1, а m_0 и m_s равны нулю.

Для опредѣленія ξ и η изъ уравненій (14) слѣдуетъ примѣнить способъ наименьшихъ квадратовъ. Этотъ способъ представляетъ слѣдующія преимущества: во-первыхъ, исключается всякій произволъ въ выборѣ двухъ какихъ-нибудь изъ этихъ уравненій для опредѣленія двухъ неизвѣстныхъ ξ и η, а всѣ уравненія, считаемыя равноцѣнными, принимаются во вниманіе; во-вторыхъ, получаются наиболѣе надежныя величины для ξ и η (наименьшая средняя ошибка результата); въ-третьихъ, способъ этотъ даетъ возможность оцѣнить ту точность, съ которой данныя неизвѣстныя опредѣлены изъ наблюденій.

Къ разсмотрѣнію теоріи способа наименьшихъ квадратовъ мы теперь и перейдемъ.

---

§ 2.

Способъ наименьшихъ квадратовъ.

При опредѣленіи различныхъ количествъ изъ наблюденій, разныя измѣряемыя величины никогда не получаются абсолютно точными, а всегда онѣ содержатъ въ себѣ нѣкоторую ошибку, зависящую отъ предѣльной точности самихъ наблюденій. Исключая вліяніе *постоянныхъ ошибокъ* тѣхъ или другихъ измѣрительныхъ приборовъ, можно сказать, что уклоненія наблюдаемыхъ или измѣряемыхъ величинъ отъ истинной величины даннаго количества носятъ на себѣ совершенно случайный характеръ и могутъ быть то положительными, то отрицательными.

Теорія этихъ *случайныхъ ошибокъ* зиждится на теоріи вѣроятностей.

Математической вѣроятностью p нѣкотораго простого событія называется отношеніе числа m благопріятныхъ, равновозможныхъ случаевъ къ общему числу случаевъ M, т. е. $p=\frac{m}{M}$.

Напримѣръ, вѣроятность вынуть изъ колоды въ 52 карты черную масть будетъ $\frac{1}{2}$, потому что общее число черныхъ картъ 26 (число благопріятныхъ случаевъ), а общее число равновозможныхъ случаевъ вынуть какую-нибудь карту 52.

Вѣроятность вынуть червонную масть $\frac{1}{4}$, а вѣроятность вынуть короля пикъ $\frac{1}{52}$.

Случайное событіе, составленное изъ двухъ простыхъ событій, называется *сложнымъ событіемъ*.

Напримѣръ, сложное событіе будетъ такое, когда изъ одной колоды картъ требуется вынуть красную масть и одновременно изъ другой колоды также красную масть. Событія эти *совершенно независимы* другъ отъ друга.

Вѣроятность такого сложнаго событія опредѣлится очень просто на основаніи слѣдующихъ соображеній.

Каждую красную карту первой колоды можно комбинировать съ каждой красной картой второй колоды. Число такихъ комбинацій 26×26; это будетъ общее число равновозможныхъ, благопріятныхъ случаевъ. Число-же всевозможныхъ комбинацій, т. е. общее число случаевъ, будетъ очевидно 52×52. Такимъ образомъ, вѣроятность этого сложнаго событія будетъ $\frac{26 \times 26}{52 \times 52} = \frac{1}{4}$.

Вообще-же, если вѣроятности нѣсколькихъ независимыхъ, простыхъ событій будутъ

$$p_1 = \frac{m_1}{M_1},\ p_2 = \frac{m_2}{M_2},\ p_3 = \frac{m_3}{M_3} \text{ и т. д.},$$

то вѣроятность сложнаго событія, составленнаго изъ этого ряда простыхъ событій, будетъ

$$P = p_1 p_2 p_3 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (15)$$

Такимъ образомъ, вѣроятность есть всегда правильная дробь. Когда вѣроятность равна 1, то это уже есть достовѣрность.

Дѣйствительныя испытанія не всегда, конечно, удовлетворяютъ математической вѣроятности.

По математической вѣроятности, мы должны были-бы изъ четырехъ вынутыхъ изъ колоды картъ имѣть, напримѣръ, одну червонную, но на самомъ дѣлѣ это можетъ и не случиться. Однако, повторяя испытанія очень большое число разъ S и отмѣчая число благопріятныхъ случаевъ s, когда мы, дѣйствительно, вынимаемъ червонную масть, причемъ, само собою разумѣется, послѣ вынутія карты, надо каждый разъ класть ее обратно въ колоду и затѣмъ тщательно перемѣшать всѣ карты, чтобы всѣ случаи были-бы вполнѣ независимы другъ отъ друга и равновозможны, мы убѣдимся, что отношеніе $\frac{s}{S}$, по мѣрѣ возрастанія S, будетъ стремиться къ теоретической вѣроятности $\frac{1}{4}$, такъ что

$$\text{пред.} \left(\frac{s}{S}\right) = \frac{1}{4}.$$

Этотъ законъ, который можно легко провѣрить на опытѣ, называется *закономъ большихъ чиселъ*. Его можно доказать и строго математически.

Такимъ образомъ, и чисто *случайныя* явленія подчинены нѣкоторымъ математическимъ законамъ.

Предположимъ теперь, что мы измѣрили какое-нибудь количество, причемъ *случайная* ошибка наблюденія оказалась равной Δ.

Вѣроятность p, чтобы ошибка какого-нибудь измѣренія заключалась-бы въ предѣлахъ между Δ и $\Delta + \partial\Delta$, будетъ

$$p_\Delta = f(\Delta) . \partial\Delta, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

гдѣ $f(\Delta)$ есть нѣкоторая, пока еще неизвѣстная, функція отъ Δ.

Очевидно, что p_Δ должно быть пропорціонально $\partial\Delta$, потому что, чѣмъ меньше заданный интервалъ для $\partial\Delta$, тѣмъ меньше будетъ и соотвѣтствующая вѣроятность p_Δ, а вѣроятность *въ точности* встрѣтить ошибку Δ, конечно, ничтожно мала.

Если мы S разъ измѣримъ то же количество и соотвѣтствующія *случайныя ошибки* наблюденій обозначимъ черезъ

$$\Delta_1, \ \Delta_2, \ \Delta_3 \text{ и т. д.,}$$

то, такъ какъ одинаково вѣроятно, что ошибки Δ будутъ то положительны, то отрицательны, то величина

$$\frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \ldots}{S} = \frac{\Sigma\Delta}{S}$$

должна, по мѣрѣ возрастанія S, непремѣнно стремиться къ нулю.

Итакъ,

$$\text{пред.} \frac{\Sigma\Delta}{S} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Въ изложеніи дальнѣйшей теоріи мы и будемъ, слѣдовательно, предполагать, что общее число отдѣльныхъ измѣреній велико.

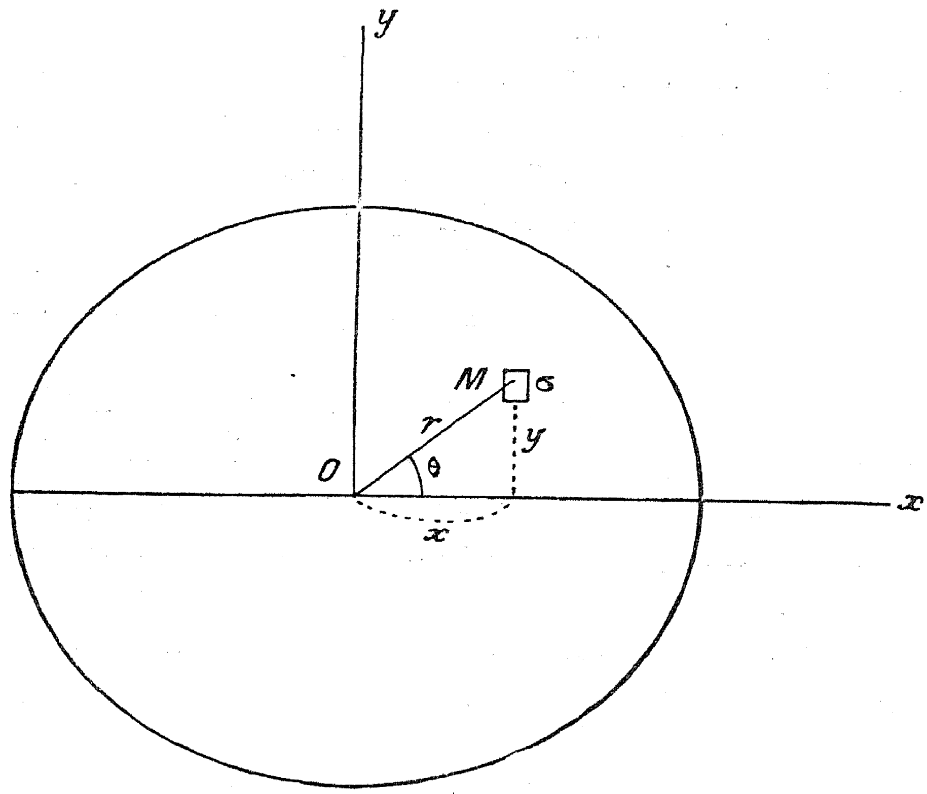
Займемся теперь нахожденіемъ вида функціи $f(x)$.

Съ перваго взгляда можно подумать, что это въ высшей степени сложный вопросъ, такъ какъ трудно даже и представить себѣ изъ чего можно было-бы исходить.

На самомъ-же дѣлѣ задача эта разрѣшается чрезвычайно простымъ и изящнымъ пріемомъ.

Представимъ себѣ, что мы имѣемъ круглую мишень, представленную на чертежѣ 112, въ которую мы стрѣляемъ изъ пистолета, *цѣлясь въ центръ круга O*.

Черт. 112.



Возьмемъ двѣ взаимно перпендикулярныя оси координатъ Ox и Oy и какую нибудь точку M съ координатами x и y, около которой мы вообразимъ себѣ элементарную площадку

$$\sigma = \partial x \, . \, \partial y.$$

Разстояніе M до O пусть будетъ r.

Тогда

$$r^2 = x^2 + y^2 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (18)$$

Вѣроятность отклоненія пули вправо на величину, заключенную между x и $x + \partial x$, будетъ

$$p_x = f(x) \, \partial x,$$

а вѣроятность отклоненія пули вверхъ на величину, заключенную между y и $y + \partial y$, будетъ

$$p_y = f(y) \, \partial y.$$

Такъ какъ оба эти отклоненія слѣдуетъ считать независимыми другъ отъ друга, то вѣроятность ихъ совмѣстнаго существованія, т.-е. вѣроятность того случая, чтобы пуля попала именно въ элементарную площадку σ, будетъ

$$p_\sigma = f(x) \, f(y) \, . \, \sigma.$$

Повернемъ теперь оси координатъ такъ, чтобы ось x-овъ совпала съ направленіемъ r. Тогда мы можемъ ту-же вѣроятность p_σ представить слѣдующимъ образомъ:

$$p_\sigma = f(r) \cdot f(o) \cdot \sigma.$$

Сравнивая эти два выраженія для p_σ, получимъ слѣдующее соотношеніе:

$$f(x) f(y) = f(o) f(r) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

Это есть такъ называемое *функціональное уравненіе.*

Вопросъ сводится, слѣдовательно, къ тому, чтобы найти такую функцію, которая удовлетворяла-бы условію (19).

Чтобы найти видъ этой функціи, возьмемъ Неперовы логарифмы отъ выраженія (19).

$$\lg f(x) + \lg f(y) = \lg f(o) + \lg f(r) \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

Мы имѣемъ здѣсь двѣ перемѣнныя независимыя x и y.

Возьмемъ производную отъ выраженія (20) по x, считая y постояннымъ. Тогда

$$\frac{\partial \lg f(x)}{\partial x} = \frac{\partial \lg f(r)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}$$

или, на основаніи формулы (18),

$$\frac{\partial \lg f(x)}{\partial x} = \frac{\partial \lg f(r)}{\partial r} \cdot \frac{x}{r}.$$

Точно также найдемъ

$$\frac{\partial \lg f(y)}{\partial y} = \frac{\partial \lg f(r)}{\partial r} \cdot \frac{y}{r}.$$

Отсюда имѣемъ

$$\frac{\partial \lg f(x)}{x \cdot \partial x} = \frac{\partial \lg f(y)}{y \cdot \partial y} = \frac{\partial \lg f(r)}{r \cdot \partial r} = \text{Const} \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

Величину этой постоянной обозначимъ черезъ $-\frac{1}{\varepsilon^2}$.

По существу дѣла, эта постоянная непремѣнно должна быть отрицательна, потому что $f(x)$, какъ нѣкоторая вѣроятность, всегда положительна, а производная $\frac{\partial f(x)}{\partial x^2}$ отрицательна, потому что, съ увеличеніемъ x^2, вѣроятность попаданія въ площадку σ уменьшается, такъ какъ мы *цѣлимся* изъ пистолета именно въ центръ круга O.

Итакъ, формула (21) даетъ намъ

$$\frac{d \lg f(x)}{x \, . \, dx} = -\frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Проинтегрировавъ это уравненіе и обозначивъ постоянную интегрированія черезъ $\lg A$, получимъ

$$\lg f(x) = -\frac{x^2}{2\varepsilon^2} + \lg A$$

или

$$f(x) = A \, . \, e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

Остается теперь только опредѣлить значеніе постоянной A.

На основаніи уравненія (22), вѣроятность попаданія въ площадку σ будетъ

$$p_\sigma = f(x) \, f(y) \, dx \, dy = A^2 e^{-\frac{x^2 + y^2}{2\varepsilon^2}} \, . \, \sigma.$$

Введемъ теперь полярныя координаты r и θ.

Тогда величину элементарной площадки около M можно представить слѣдующимъ образомъ:

$$\sigma = r d\theta \, . \, dr.$$

Слѣдовательно,

$$p_\sigma = A^2 e^{-\frac{r^2}{2\varepsilon^2}} \, . \, r dr \, . \, d\theta.$$

Выразимъ теперь, что вѣроятность попаданія въ *какую-нибудь* точку мишени безконечно большихъ размѣровъ равна 1.

Чтобы захватить безконечную плоскость, надо проинтегрировать предыдущее выраженіе по θ въ предѣлахъ отъ $\theta = 0$ до $\theta = 2\pi$, а по r въ предѣлахъ отъ $r = 0$ до $r = \infty$.

Итакъ,

$$1 = A^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2\varepsilon^2}} r dr$$

или

$$1 = 2\pi A^2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^2} d\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^2\right\} \cdot \left\{-\varepsilon^2\right\},$$

или еще

$$1 = -2\pi A^2 \varepsilon^2 \left[e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^2}\right]_0^{\infty} = 2\pi A^2 \varepsilon^2.$$

Отсюда находимъ

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\varepsilon}.$$

Подставивъ эту величину въ формулу (22), получимъ окончательно

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (23)$$

Функція $f(x)$, такимъ образомъ, найдена.

Она содержитъ въ себѣ, какъ мы видимъ, x въ квадратѣ, что и слѣдовало á priori ожидать, такъ какъ ошибка, соотвѣтствующая положительнымъ и отрицательнымъ значеніямъ x, очевидно, одинаково вѣроятна.

Такимъ образомъ, вѣроятность сдѣлать, при измѣреніи нѣкотораго количества, ошибку, заключенную между предѣлами Δ и $\Delta + \partial\Delta$, будетъ

$$p_\Delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\Delta^2}{2\varepsilon^2}} \cdot \frac{\partial\Delta}{\varepsilon}.$$

Предположимъ теперь, что мы измѣрили какое-нибудь количество x и сдѣлали s равноблагонадежныхъ наблюденій, давшихъ намъ для x слѣдующія величины:

$$m_1,\ m_2,\ m_3 \dots m_s.$$

Ошибки этихъ отдѣльныхъ результатовъ пусть будутъ

$$\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3 \dots \Delta_s.$$

Тогда

$$\Delta_1 = m_1 - x,\quad \Delta_2 = m_2 - x,\quad \Delta_3 = m_3 - x \dots \Delta_s = m_s - x,$$

а соотвѣтствующія вѣроятности будутъ

$$p_1 = \frac{\partial\Delta}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2\varepsilon^2}\Delta_1^2}$$

$$p_2 = \frac{\partial\Delta}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2\varepsilon^2}\Delta_2^2}$$

$$p_3 = \frac{\partial\Delta}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2\varepsilon^2}\Delta_3^2}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$p_s = \frac{\partial\Delta}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2\varepsilon^2} \cdot \Delta_s^2}.$$

$\partial\Delta$ мы считаемъ вездѣ одинаковымъ.

Появленіе какой-нибудь случайной ошибки въ отдѣльномъ измѣреніи мы можемъ считать событіемъ простымъ, не имѣющимъ никакого вліянія на послѣдующія измѣренія; а потому совмѣстное существованіе въ рядѣ s измѣреній всей системы вышеупомянутыхъ ошибокъ, какъ событіе сложное, будетъ имѣть вѣроятность

$$P = p_1 p_2 p_3 \dots p_s = \left[\frac{\partial\Delta}{\sqrt{2\pi}}\right]^s \cdot \frac{1}{\varepsilon^s} e^{-\frac{1}{2\varepsilon^2}[\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \dots + \Delta_s^2]} \dots (24)$$

Не зная истинной величины x, мы можемъ дѣлать о ней различныя предположенія, причемъ каждое изъ нихъ даетъ намъ свою систему величинъ ошибокъ Δ и приведетъ къ нѣкоторой величинѣ вѣроятности P. Всѣ тѣ предположенія, которыя приводятъ къ ничтожной величинѣ вѣроятности P, должны, очевидно, быть отброшены, какъ не соотвѣтствующія дѣйствительности, такъ какъ мы на самомъ дѣлѣ всегда стараемся опредѣлить x изъ наблюденій наивозможно лучшимъ образомъ. Наоборотъ, наилучшее предположеніе, которое мы можемъ сдѣлать относительно величины x, это то, при которомъ P окажется максимумъ или

$$\Sigma\Delta^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \dots + \Delta_s^2$$

минимумъ.

Въ этомъ то и заключается основная идея *способа наименьшихъ квадратовъ*.

Такимъ образомъ, имѣя большой рядъ отдѣльныхъ измѣреній, надо опредѣлять неизвѣстную x изъ того условія, чтобы сумма квадратовъ всѣхъ случайныхъ ошибокъ наблюденій была-бы минимумъ.

Это условіе даетъ намъ

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Sigma\Delta^2}{\partial x} = \Delta_1\frac{\partial\Delta_1}{\partial x} + \Delta_2\frac{\partial\Delta_2}{\partial x} + \Delta_3\frac{\partial\Delta_3}{\partial x} + \dots + \Delta_s\frac{\partial\Delta_s}{\partial x} = 0.$$

Согласно предыдущимъ обозначеніямъ, всѣ эти производныя равны -1.

Слѣдовательно,

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots + \Delta_s = 0$$

или

$$(m_1 - x) + (m_2 - x) + (m_3 - x) + \dots + (m_s - x) = 0.$$

Отсюда находимъ

$$x = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_s}{s} \dots\dots\dots\dots (25)$$

Такимъ образомъ, мы видимъ, что наивѣроятнѣйшая величина измѣряемаго количества x есть *средняя ариѳметическая* изъ всѣхъ отдѣльныхъ равноблагонадежныхъ результатовъ измѣреній.

Формула (24) показываетъ намъ еще, что вѣроятность P сложнаго событія зависитъ также и отъ величины постоянной ε. Наиболѣе подходящей величиной для ε будетъ опять та, при которой P будетъ максимумъ.

Найдемъ эту величину.

Для этого надо положить

$$\frac{\partial P}{\partial \varepsilon} = 0.$$

Изъ формулы (24) находимъ:

$$\frac{\partial P}{\partial \varepsilon} = \left[\frac{\partial \Delta}{\sqrt{2\pi}}\right]^s \left[\frac{1}{\varepsilon^s} e^{-\frac{1}{2\varepsilon^2}\Sigma\Delta^2} \cdot \frac{\Sigma\Delta^2}{\varepsilon^3} - \frac{s}{\varepsilon^{s+1}} \cdot e^{-\frac{1}{2\varepsilon^2}\Sigma\Delta^2}\right] = 0$$

или

$$\left[\frac{\partial \Delta}{\sqrt{2\pi}}\right]^s \frac{1}{\varepsilon^{s+1}} \cdot e^{-\frac{1}{2\varepsilon^2}\Sigma\Delta^2} \cdot \left[\frac{\Sigma\Delta^2}{\varepsilon^2} - s\right] = 0.$$

Отсюда имѣемъ

$$\varepsilon^2 = \frac{\Sigma\Delta^2}{s} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

ε^2 есть, такимъ образомъ, средняя величина изъ квадратовъ всѣхъ ошибокъ разсматриваемаго ряда наблюденій. Поэтому ε называется средней квадратической ошибкой или просто *средней ошибкой* измѣреній. Она служитъ мѣрой случайныхъ ошибокъ даннаго ряда наблюденій и ею вполнѣ характеризуется точность послѣднихъ.

Такимъ образомъ, ε представляетъ собою среднюю ошибку *каждаго отдѣльнаго опредѣленія x.*

Если у насъ имѣется количество

$$X = \alpha x,$$

гдѣ α нѣкоторый постоянный коеффиціентъ, то ошибка въ X, которую мы обозначимъ черезъ D, будетъ очевидно равна $\alpha\Delta$, а *средняя* ошибка X будетъ

$$E = \alpha\varepsilon \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

Опредѣлимъ теперь среднюю ошибку E суммы или разности X двухъ количествъ x и x', полученныхъ изъ s и s' независимыхъ между собою наблюденій со средними ошибками ε и ε'.

На основаніи предыдущаго, мы будемъ имѣть:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{s}[\Delta_1{}^2 + \Delta_2{}^2 + \Delta_3{}^2 + \ldots + \Delta_s{}^2] = \frac{\Sigma\Delta^2}{s}$$

и

$$\varepsilon'^2 = \frac{1}{s'}[\Delta'^2_1 + \Delta'^2_2 + \Delta'^2_3 + \ldots + \Delta'^2_s] = \frac{\Sigma\Delta'^2}{s'}.$$

Въ суммѣ или разности $x \pm x'$ могутъ произойти съ одинаковою вѣроятностью всевозможныя сочетанія ошибокъ Δ съ ошибками Δ', т.-е. слѣдующія ошибки D:

$$\begin{array}{llll}
\Delta_1 \pm \Delta_1', & \Delta_2 \pm \Delta_1' & \Delta_3 \pm \Delta_1' & \ldots \Delta_s \pm \Delta_1' \\
\Delta_1 \pm \Delta_2' & \Delta_2 \pm \Delta_2' & \Delta_3 \pm \Delta_2' & \ldots \Delta_s \pm \Delta_2' \\
\Delta_1 \pm \Delta_3' & \Delta_2 \pm \Delta_3' & \Delta_3 \pm \Delta_3' & \ldots \Delta_s \pm \Delta_3' \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\Delta_1 \pm \Delta'_{s'} & \Delta_2 \pm \Delta'_{s'} & \Delta_3 \pm \Delta'_{s'} & \ldots \Delta_s \pm \Delta'_{s'}.
\end{array}$$

Взявъ теперь сумму квадратовъ этихъ ошибокъ D и раздѣливъ ее на общее ихъ число $S = ss'$, получимъ, на основаніи предыдущаго,

$$E^2 = \frac{\Sigma D^2}{S} = \frac{s'\Sigma\Delta^2 \pm 2\Sigma\Delta\,.\,\Sigma\Delta' + s\Sigma\Delta'^2}{ss'}$$

$$= \frac{\Sigma\Delta^2}{s} \pm 2\frac{\Sigma\Delta}{s}\cdot\frac{\Sigma\Delta'}{s'} + \frac{\Sigma\Delta'^2}{s'}.$$

Но, по основному свойству случайныхъ ошибокъ (см. формулу (17)),

$$\frac{\Sigma\Delta}{s} = 0$$

и

$$\frac{\Sigma\Delta'}{s'} = 0;$$

слѣдовательно,

$$E^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon'^2.$$

Если-бы мы имѣли сумму трехъ количествъ $x + x' + x''$

$$X = x + x' + x'',$$

со средними ошибками ε, ε' и ε'', то точно также нашли-бы для средней ошибки результата

$$E^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2$$

и т. д.

Если-же X есть линейная функція нѣсколькихъ количествъ x, x', x'' и т. д., вида

$$X = \alpha x + \alpha' x' + \alpha'' x'' +, \ldots \tag{28}$$

гдѣ α, α', α'' и т. д. суть нѣкоторые постоянные коеффиціенты, то, на основаніи соотношенія (27), мы получимъ для средней ошибки результата X слѣдующее выраженіе:

$$E^2 = \alpha^2 \varepsilon^2 + \alpha'^2 \varepsilon'^2 + \alpha''^2 \varepsilon''^2 + \ldots \tag{29}$$

Установивъ эти основныя положенія, предположимъ теперь, что мы имѣемъ одну неизвѣстную x и рядъ линейныхъ уравненій вида

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x = m_1 \\ a_2 x = m_2 \\ a_3 x = m_3 \\ \ldots\ldots \\ a_s x = m_s \end{array}\right\}, \ldots \tag{30}$$

гдѣ коеффиціенты a уже не равны 1, а суть вполнѣ опредѣленныя, *вѣрныя* числа, а величины m содержатъ въ себѣ случайныя ошибки измѣреній Δ, причемъ средняя ошибка *каждаго* такого m есть ε.

Введя слѣдующія обозначенія:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = m_1 - a_1 x \\ \Delta_2 = m_2 - a_2 x \\ \Delta_3 = m_3 - a_3 x \\ \quad\vdots \\ \Delta_s = m_s - a_s x \end{array}\right\}, \ldots \tag{31}$$

гдѣ подъ x подразумѣвается *вѣрная величина* искомаго количества, будемъ, на основаніи формулы (26), имѣть

$$\varepsilon^2 = \frac{\Sigma \Delta^2}{s}.$$

Наивѣроятнѣйшая величина для x, которую мы обозначимъ пока черезъ $\overline{x}$, получится, на основаніи способа наименьшихъ квадратовъ, изъ условія, чтобы $\Sigma\Delta^2$ было-бы минимумъ.

$$\Sigma\Delta^2 = (m_1 - a_1 x)^2 + (m_2 - a_2 x)^2 + (m_3 - a_3 x)^2 + \ldots + (m_s - a_s x)^2.$$

Условіе

$$\frac{\partial \Sigma \Delta^2}{\partial x} = 0$$

даетъ

$$-a_1(m_1 - a_1 x) - a_2(m_2 - a_2 x) - a_3(m_3 - a_3 x) - \ldots - a_s(m_s - a_s x) = 0$$

или

$$[a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 \ldots + a_s a_s]\,\bar{x} = [a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3 + \ldots + a_s m_s].$$

Введемъ, для сокращенія письма, слѣдующія обозначенія, установленныя Гауссомъ:

$$a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 + \ldots + a_{ss} = (aa)$$

$$a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3 + \ldots + a_s m_s = (am).$$

Тогда

$$\bar{x} = \frac{(am)}{(aa)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

По этой формулѣ получится наивѣроятнѣйшая величина искомаго количества x.

Сумма (aa) называется соотвѣтствующимъ *вѣсомъ* результата и обозначается буквой g (Gewicht) съ индексомъ x (g_x).

Опредѣлимъ теперь среднюю ошибку ε_x вывода $\bar{x}$, считая среднюю ошибку *каждаго отдѣльнаго* m одной и той-же и равной ε.

Формулу (32) можно представить въ такомъ видѣ:

$$\bar{x} = \frac{a_1}{(aa)} \cdot m_1 + \frac{a_2}{(aa)} m_2 + \frac{a_3}{(aa)} m_3 + \ldots + \frac{a_s}{(aa)} m_s.$$

Отсюда, на основаніи формулъ (28) и (29), будемъ имѣть

$$\varepsilon_x^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_s^2}{(aa)^2} \cdot \varepsilon^2 = \frac{(aa)}{(aa)^2} \cdot \varepsilon^2$$

или

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon}{\sqrt{(aa)}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

Полагая

$$g_x = (aa),$$

получимъ

$$g_x = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_x^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

Эта формула показываетъ намъ, что вѣсъ даннаго количества x обратно пропорціоналенъ квадрату соотвѣтствующей средней ошибки ε_x.

Чтобы опредѣлить ε_x, надо знать ε, которое опредѣляется формулой (26), въ которой, однако, величины истинныхъ ошибокъ Δ намъ, въ сущности, неизвѣстны.

Чтобы найти ε поступаютъ слѣдующимъ образомъ.

Подставимъ вѣроятнѣйшую величину $\bar{x}$, опредѣленную по формулѣ (32), въ уравненіе (30), и обозначимъ соотвѣтственныя разности $m - a\bar{x}$ черезъ υ.

$$\left.\begin{array}{l} m_1 - a_1\bar{x} = \upsilon_1 \\ m_2 - a_2\bar{x} = \upsilon_2 \\ m_3 - a_3\bar{x} = \upsilon_3 \\ \vdots \qquad \vdots \\ m_s - a_s\bar{x} = \upsilon_s \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

Отдѣльныя величины υ извѣстны.

Разницу между вѣроятнѣйшей и истинной величиной x обозначимъ черезъ ξ:

$$\bar{x} - x = \xi.$$

Тогда

$$x = \bar{x} - \xi.$$

Подставимъ эту величину x въ формулы (31); тогда, принимая во вниманіе группу соотношеній (35), будемъ имѣть:

$$\begin{array}{l} \Delta_1 = \upsilon_1 + a_1\xi \\ \Delta_2 = \upsilon_2 + a_2\xi \\ \Delta_3 = \upsilon_3 + a_3\xi \\ \vdots \\ \Delta_s = \upsilon_s + a_s\xi. \end{array}$$

Отсюда находимъ

$$\Sigma\Delta^2 = \Sigma\upsilon^2 + 2\xi\,.\,\Sigma a\upsilon + (aa)\,\xi^2.$$

Сумма $\Sigma a\upsilon$, на основаніи формулъ (35) и (32), строго равна нулю; слѣдовательно,

$$\Sigma\Delta^2 = \Sigma\upsilon^2 + (aa)\,\xi^2,$$

или, принимая еще во вниманіе соотношеніе (26),

$$s\,.\,\varepsilon^2 = \Sigma\upsilon^2 + (aa)\,\xi^2.$$

Точная величина $\xi = \bar{x} - x$ намъ неизвѣстна, но мы не сдѣлаемъ большой ошибки, если, вмѣсто ξ, подставимъ среднюю ошибку x, т.-е. ε_x.

Тогда

$$s \,.\, \varepsilon^2 = \Sigma \upsilon^2 + (aa)\,\varepsilon_x^2,$$

или, замѣняя ε_x^2 соотвѣтствующей величиной изъ уравненія (33),

$$s \,.\, \varepsilon^2 = \Sigma \upsilon^2 + \varepsilon^2.$$

Отсюда находимъ окончательно

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma \upsilon^2}{s-1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (36)$$

Такимъ образомъ, средняя ошибка каждаго отдѣльнаго числа m опредѣлится дѣленіемъ суммы квадратовъ уклоненій υ на число отдѣльныхъ наблюденій s уменьшенное на число неизвѣстныхъ, т.-е. на 1, и извлеченіемъ затѣмъ изъ полученнаго числа квадратнаго корня.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что квадратъ средней ошибки (ε^2) всегда нѣсколько больше $\frac{\Sigma \upsilon^2}{s}$, т.-е. больше средней величины квадратовъ уклоненій (υ^2).

Опредѣливши, такимъ образомъ, ε, найдемъ, по формулѣ (33), и среднюю ошибку вывода x.

Предположимъ теперь, что у насъ двѣ неизвѣстныя x и y, удовлетворяющія слѣдующей системѣ линейныхъ уравненій:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y = m_1 \\ a_2 x + b_2 y = m_2 \\ a_3 x + b_3 y = m_3 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \\ a_s x + b_s y = m_s \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

Здѣсь величины a и b суть нѣкоторые, вполнѣ точно извѣстные коеффиціенты, а величины m содержатъ въ себѣ нѣкоторыя случайныя ошибки наблюденій, которыя мы обозначимъ соотвѣтственно черезъ $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ и т. д.

Такъ какъ x и y представляютъ собою истинныя величины неизвѣстныхъ, то мы будемъ имѣть

$$\Delta_1 = m_1 - (a_1 x + b_1 y)$$

$$\Delta_2 = m_2 - (a_2 x + b_2 y)$$

$$\vdots$$

$$\Delta_s = m_s - (a_s x + b_s y).$$

Вѣроятность P совмѣстнаго существованія всѣхъ этихъ ошибокъ опредѣлится на основаніи той-же формулы (24):

$$P = \left[\frac{\partial\Delta}{\sqrt{2\pi}}\right]^s \frac{1}{\varepsilon^s} e^{-\frac{1}{2\varepsilon^2}[\Delta_1{}^2 + \Delta_2{}^2 + \ldots + \Delta_s{}^2]}$$

Вѣроятнѣйшія значенія x и y будутъ тѣ, при которыхъ вѣроятность P будетъ максимумъ или сумма $\Sigma\Delta^2$ минимумъ.

Это есть требованіе способа наименьшихъ квадратовъ.

Замѣтимъ еще, что, если-бы неизвѣстныя x и y не были-бы связаны между собою линейными уравненіями, то мы всетаки могли-бы привести соотвѣтствующія уравненія къ линейному виду.

Дѣйствительно, предположимъ, что намъ дана слѣдующая система уравненій:

$$F_1(x, y) = M_1$$

$$F_2(x, y) = M_2$$

$$\vdots$$

$$F_s(x, y) = M_s,$$

гдѣ величины F суть нѣкоторыя заданныя функціи.

Возьмемъ два какихъ-нибудь изъ этихъ уравненій и рѣшимъ ихъ относительно x и y.

Соотвѣтствующія величины обозначимъ черезъ x_0 и y_0.

Тогда мы можемъ положить

$$x = x_0 + \xi$$

$$y = y_0 + \eta,$$

гдѣ новыя неизвѣстныя ξ и η суть очень малыя величины.

Разлагая любую изъ этихъ функцій $F(x, y)$ въ рядъ и ограничиваясь первыми членами разложенія, будемъ имѣть

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \xi + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \eta.$$

Положивши затѣмъ

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = a,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = b$$

и

$$M - F(x_0, y_0) = m,$$

мы получимъ уравненіе вида

$$a\xi + b\eta = m,$$

т.-е. неизвѣстныя ξ и η будутъ связаны между собою линейными уравненіями, какъ и въ системѣ уравненій (37).

Выразимъ теперь аналитическія условія, чтобы $\Sigma\Delta^2$ было-бы минимумъ.

Для этого требуется, чтобы

$$\frac{\partial \Sigma\Delta^2}{\partial x} = 0$$

и

$$\frac{\partial \Sigma\Delta^2}{\partial y} = 0.$$

Но

$$\Sigma\Delta^2 = [m_1 - (a_1 x + b_1 y)]^2 + [m_2 - (a_2 x + b_2 y)]^2 + \ldots + [m_s - (a_s x + b_s y)]^2;$$

слѣдовательно, для опредѣленія x и y мы будемъ имѣть слѣдующія два уравненія:

$$-a_1[m_1 - (a_1 x + b_1 y)] - a_2[m_2 - (a_2 x + b_2 y)] - \cdots - a_s[m_s - (a_s x + b_s y)] = 0$$

и

$$-b_1[m_1 - (a_1 x + b_1 y)] - b_2[m_2 - (a_2 x + b_2 y)] - \cdots - b_s[m_s - (a_s x + b_s y)] = 0.$$

Введя здѣсь слѣдующія обозначенія Гаусса:

$$\left.\begin{aligned} a_1 a_1 + a_2 a_2 + \ldots + a_s a_s &= (aa) \\ b_1 b_1 + b_2 b_2 + \ldots + b_s b_s &= (bb) \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_s b_s &= (ab) = (ba) \\ a_1 m_1 + a_2 m_2 + \ldots + a_s m_s &= (am) \\ b_1 m_1 + b_2 m_2 + \ldots + b_s m_s &= (bm) \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots (38)$$

мы получимъ, окончательно, слѣдующія два уравненія, изъ которыхъ легко опредѣлятся наивѣроятнѣйшія значенія неизвѣстныхъ x и y:

$$\left.\begin{array}{l}(aa)\,x + (ab)\,y = (am)\\ (ab)\,x + (bb)\,y = (bm)\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(39)$$

Эти уравненія называются *нормальными уравненіями*.

Рѣшать эти уравненія надо по особому пріему, чтобы, наравнѣ съ опредѣленіемъ вѣроятнѣйшихъ величинъ x и y, получить одновременно и соотвѣтствующіе вѣса g_x и g_y и среднія ошибки выводовъ ε_x и ε_y. Для этой цѣли нельзя, ни умножать, ни дѣлить уравненія (39) ни на какое число, а надо опредѣлить изъ одного изъ этихъ уравненій одну неизвѣстную, а затѣмъ подставить соотвѣтствующее выраженіе въ другое уравненіе.

Тогда окончательный коэффиціентъ при неизвѣстной будетъ всегда положительный и представитъ собою ничто иное, какъ вѣсъ соотвѣтствующаго количества x или y.

Слѣдуя этому пріему, опредѣлимъ, напримѣръ, y изъ второго уравненія (39):

$$y = \frac{(bm) - (ab)\,x}{(bb)}.$$

Подставимъ теперь это выраженіе въ первое уравненіе (39).

Тогда

$$(aa)\,x + (ab)\cdot\frac{(bm) - (ab)\,x}{(bb)} = (am)$$

или

$$\left\{(aa) - \frac{(ab)\,(ab)}{(bb)}\right\}x = (am) - \frac{(ab)\,(bm)}{(bb)}.$$

Точно также найдемъ, опредѣляя x изъ перваго уравненія (39) и подставляя во второе,

$$x = \frac{(am) - (ab)\,y}{(aa)}$$

и

$$(ab)\,\frac{(am) - (ab)\,y}{(aa)} + (bb)\,y = (bm),$$

а, слѣдовательно,

$$\left\{(bb) - \frac{(ab)\,(ab)}{(aa)}\right\}y = (bm) - \frac{(ab)\,(am)}{(aa)}.$$

Введемъ теперь для удобства слѣдующія сокращенныя обозначенія:

$$\left.\begin{aligned} (aa) - \frac{(ab)(ab)}{(bb)} &= (aa1) \\ (bb) - \frac{(ab)(ab)}{(aa)} &= (bb1) \\ (am) - \frac{(ab)(bm)}{(bb)} &= (am1) \\ (bm) - \frac{(ab)(am)}{(aa)} &= (bm1) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (40)$$

Тогда

$$x = \frac{(am1)}{(aa1)}$$

и

$$y = \frac{(bm1)}{(bb1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (41)$$

По этимъ двумъ формуламъ и надо вычислять неизвѣстныя x и y.

Тогда вѣса этихъ количествъ g_x и g_y выразятся очень просто слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned} g_x &= (aa1) \\ g_y &= (bb1) \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (42)$$

а среднія ошибки ε_x и ε_y окончательныхъ значеній обѣихъ неизвѣстныхъ будутъ

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon}{\sqrt{g_x}}$$

и

$$\varepsilon_y = \frac{\varepsilon}{\sqrt{g_y}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (43)$$

гдѣ ε есть средняя ошибка каждой отдѣльной величины m, входящей въ группу уравненій (37).

Это предложеніе надо доказать.

Докажемъ это, напримѣръ, для неизвѣстной x.

Изъ формулъ (40) и (41) мы имѣемъ

$$x = \frac{(am1)}{(aa1)} = \frac{(am) - \dfrac{(ab)(bm)}{(bb)}}{(aa) - \dfrac{(ab)(ab)}{(bb)}} = \frac{(bb)(am) - (ab)(bm)}{(aa)(bb) - (ab)(ab)}.$$

Подставляя сюда выраженія (am) и (bm) изъ формулъ (38), получимъ

$$x = \frac{(bb)\,[a_1 m_1 + a_2 m_2 + \ldots + a_s m_s] - (ab)\,[b_1 m_1 + b_2 m_2 + \ldots + b_s m_s]}{(aa)(bb) - (ab)(ab)}$$

или

$$x = \frac{\{a_1(bb) - b_1(ab)\}}{(aa)(bb) - (ab)(ab)} m_1 + \frac{\{a_2(bb) - b_2(ab)\}}{(aa)(bb) - (ab)(ab)} m_2 + \ldots + \frac{\{a_s(bb) - b_s(ab)\}}{(aa)(bb) - (ab)(ab)} m_s.$$

Сравнивая это выраженіе съ формулой (28), мы, на основаніи формулы (29), гдѣ всѣ ε равны между собою, будемъ имѣть

$$\varepsilon_x^2 = \frac{1}{[(aa)(bb)-(ab)(ab)]^2}\left[(bb)^2\{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_s^2\} - 2(ab)(bb)\{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_s b_s\}\right.$$
$$\left. + (ab)^2\{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_s^2\}\right]\varepsilon^2$$

или, согласно обозначеніямъ (38),

$$\varepsilon_x^2 = \frac{1}{[(aa)(bb) - (ab)(ab)]^2}\left[(bb)^2(aa) - 2(ab)(ab)(bb) + (ab)^2(bb)\right]\varepsilon^2$$
$$= (bb)\frac{(aa)(bb) - (ab)(ab)}{[(aa)(bb) - (ab)(ab)]^2}\varepsilon^2,$$

или, окончательно,

$$\varepsilon_x^2 = \frac{\varepsilon^2}{(aa) - \frac{(ab)(ab)}{(bb)}} = \frac{\varepsilon^2}{(aa1)}.$$

Точно такимъ-же образомъ мы нашли-бы, что

$$\varepsilon_y^2 = \frac{\varepsilon^2}{(bb1)}.$$

Справедливость формулъ (42) и (43), такимъ образомъ, доказана.

Остается теперь только опредѣлить среднюю квадратическую ошибку одного измѣренія m.

Изъ формулы (26) мы имѣемъ

$$\varepsilon^2 = \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_s^2}{s} = \frac{\Sigma\Delta^2}{s}.$$

Но истинныя величины ошибокъ измѣреній Δ_1, Δ_2 и т. д. намъ неизвѣстны.

Единственно, что мы можемъ имѣть это, какъ и въ случаѣ одной неизвѣстной, уклоненія υ.

Подставимъ для этого вѣроятнѣйшія значенія x и y, опредѣленныя по формуламъ (41) и которыя мы временно обозначимъ черезъ $\overline{x}$ и $\overline{y}$, въ группу уравненій (37), и введемъ слѣдующія обозначенія:

$$\left.\begin{aligned} m_1 - \{a_1\overline{x} + b_1\overline{y}\} &= \upsilon_1 \\ m_2 - \{a_2\overline{x} + b_2\overline{y}\} &= \upsilon_2 \\ \dots\dots\dots\dots &\dots \\ m_s - \{a_s\overline{x} + b_s\overline{y}\} &= \upsilon_s \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (44)$$

Изъ этихъ соотношенiй мы можемъ найти

$$\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + \dots + \upsilon_s^2 = \Sigma\upsilon^2.$$

Въ случаѣ *одной неизвѣстной* мы имѣли формулу (36), по которой

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma\upsilon^2}{s-1}},$$

т.-е., для опредѣленiя средней ошибки одного измѣренiя, надо было раздѣлить сумму квадратовъ уклоненiй $\Sigma\upsilon^2$ на число наблюденiй минусъ 1.

Въ случаѣ *двухъ* неизвѣстныхъ соотвѣтствующая величина ε опредѣлится по формулѣ

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma\upsilon^2}{s-2}}, \dots\dots\dots\dots (45)$$

т.-е. и здѣсь въ знаменателѣ надо изъ общаго числа измѣренiй вычесть число неизвѣстныхъ 2.

Не прибѣгая къ непосредственному доказательству этой формулы, можно убѣдиться въ ея справедливости изъ слѣдующихъ простыхъ соображенiй.

Возьмемъ частный случай, когда группа уравненiй (37) сводится къ двумъ уравненiямъ ($s = 2$).

Тогда изъ послѣднихъ мы прямо найдемъ искомыя величины x и y, а $\Sigma\upsilon^2$ будетъ, очевидно, равно нулю.

Но, по существу дѣла, ε *не нуль,* такъ какъ мы всетаки дѣлаемъ ошибку при измѣренiи количествъ m.

Совмѣстимость этихъ двухъ требованiй ($\Sigma\upsilon^2 = 0$ и ε не равно 0) съ формулой (45) возможно только при условiи, что выраженiе (45) принимаетъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$; а для этого необходимо, чтобы въ знаменателѣ стояло именно $s - 2$.

Предыдущiе выводы и разсужденiя могутъ быть легко распространены на случай 3-хъ и большаго числа неизвѣстныхъ, но на этомъ мы

останавливаться не будемъ, такъ какъ путь къ рѣшенію всѣхъ подобныхъ вопросовъ достаточно выясненъ изъ предыдущаго [1]).

---

[1]) Въ частномъ случаѣ, когда всѣ коеффиціенты у одной изъ неизвѣстныхъ, напр. у x, равны 1, пріемъ опредѣленія вѣроятнѣйшихъ значеній x и y можно значительно упростить.

Предположимъ, что въ группѣ s уравненій (37) всѣ коеффиціенты a равны 1.

Сложимъ вмѣстѣ всѣ эти уравненія.

Тогда мы получимъ

$$\Sigma a . x + \Sigma b . y = \Sigma m.$$

Въ данномъ частномъ случаѣ (см. обозначенія (38))

$$\left.\begin{aligned} \Sigma a &= (aa) = s \\ \Sigma b &= (ab) \\ \Sigma m &= (am) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Слѣдовательно,

$$(aa) . x + (ab)\, y = (am) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Мы получаемъ, такимъ образомъ, первое нормальное уравненіе (39).

Съ другой стороны,

$$x = \frac{\Sigma m}{s} - \frac{\Sigma b}{s} \cdot y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\gamma)$$

Вычтемъ это уравненіе изъ каждаго изъ уравненій (37), гдѣ всѣ коеффиціенты $a=1$.

Тогда x сократится и мы получимъ слѣдующую группу уравненій, куда входитъ одна лишь неизвѣстная y:

$$\left.\begin{aligned} \left(b_1 - \frac{\Sigma b}{s}\right) \cdot y &= \left(m_1 - \frac{\Sigma m}{s}\right) \\ \left(b_2 - \frac{\Sigma b}{s}\right) \cdot y &= \left(m_2 - \frac{\Sigma m}{s}\right) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \left(b_s - \frac{\Sigma b}{s}\right) \cdot y &= \left(m_s - \frac{\Sigma m}{s}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\delta)$$

Опредѣлимъ изъ этой группы уравненій (δ) y по способу наименьшихъ квадратовъ (см. уравненія (30) и (32)).

Тогда мы будемъ имѣть

$$\left[\left(b_1 - \frac{\Sigma b}{s}\right)^2 + \left(b_2 - \frac{\Sigma b}{s}\right)^2 + \ldots + \left(b_s - \frac{\Sigma b}{s}\right)^2\right] \cdot y = \left[\left(b_1 - \frac{\Sigma b}{s}\right)\left(m_1 - \frac{\Sigma m}{s}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(b_2 - \frac{\Sigma b}{s}\right)\left(m_2 - \frac{\Sigma m}{s}\right) + \ldots + \left(b_s - \frac{\Sigma b}{s}\right)\left(m_s - \frac{\Sigma m}{s}\right)\right]$$

или

$$\left[\Sigma b^2 - 2 . \Sigma b \cdot \frac{\Sigma b}{s} + s \cdot \frac{(\Sigma b)^2}{s^2}\right] y = \left[\Sigma bm - 2 . \Sigma m \cdot \frac{\Sigma b}{s} + s \cdot \frac{\Sigma m . \Sigma b}{s^2}\right].$$

Принимая во вниманіе обозначенія (38) и соотношенія (α), получимъ окончательно

$$\left[(bb) - \frac{(ab)\,(ab)}{(aa)}\right] \cdot y = \left[(bm) - \frac{(ab)\,(am)}{(aa)}\right]$$

Способъ наименьшихъ квадратовъ имѣетъ громадное практическое значеніе при обработкѣ результатовъ разныхъ физическихъ, астрономическихъ, геодезическихъ и другихъ наблюденій, когда число отдѣльныхъ измѣреній превышаетъ число неизвѣстныхъ, и всякій физикъ долженъ обязательно быть съ этимъ способомъ знакомъ.

Вернемся теперь къ группѣ уравненій (14), къ которымъ мы пришли, опредѣляя приведенную длину маятника l изъ наблюденій надъ періодомъ его качаній при различныхъ углахъ наклона оси i.

$$\left.\begin{array}{l} a_0\xi + b_0\eta = m_0 \\ a_1\xi + b_1\eta = m_1 \\ a_2\xi + b_2\eta = m_2 \\ \vdots \quad\;\; \vdots \quad\;\; \vdots \\ a_s\xi + b_s\eta = m_s \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Здѣсь общее число уравненій $s + 1$.

Согласно обозначеніямъ (13), всѣ коеффиціенты a равны 1.

Съ другой стороны

$$b_k = n_k^2$$

и

$$m_k = \Delta_k i + x_0 - n_k^2 y_0 .$$

или, согласно обозначеніямъ (40),

$$y = \frac{(bm1)}{(bb1)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\varepsilon)$$

Мы пришли, такимъ образомъ, къ той-же ранѣе выведенной формулѣ для y (см. вторую формулу (41)).

Мы видимъ, слѣдовательно, что, рѣшая заданную группу уравненій съ двумя неизвѣстными по данному упрощенному пріему, мы нисколько не отступаемъ отъ общихъ положеній способа наименьшихъ квадратовъ.

Очевидно, что и вѣсъ искомаго количества y будетъ $g_y = (bb1)$ (см. формулы (42)).

Подставляя найденную величину y въ формулу (β) или (γ), найдемъ и другую неизвѣстную x.

Такъ какъ уравненіе (β) есть одно изъ общихъ нормальныхъ уравненій, то, очевидно, что вѣсъ количества x будетъ, какъ и въ общей теоріи, равенъ

$$g_x = (aa1).$$

Разсмотрѣнный здѣсь частный случай имѣетъ какъ разъ мѣсто при опредѣленіи изъ наблюденій приведенной длины маятника l, какъ то видно изъ группы уравненій (11), въ которыхъ мы всегда можемъ замѣнить x черезъ $-x_1$.

Слѣдовательно,

$$(aa) = s + 1$$

$$(bb) = b_0^2 + b_1^2 + \ldots + b_s^2$$

$$(ab) = b_0 + b_1 + \ldots + b_s$$

$$(am) = m_0 + m_1 + \ldots + m_s$$

$$(bm) = b_0 m_0 + b_1 m_1 + \ldots + b_s m_s$$

$$\left.\begin{aligned} g_\xi &= (aa) - \frac{(ab)(ab)}{(bb)} \\ g_\eta &= (bb) - \frac{(ab)(ab)}{(aa)} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (46)$$

и

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{(am) - \frac{(ab)(bm)}{(bb)}}{g_\xi} \\ \eta &= \frac{(bm) - \frac{(ab)(am)}{(aa)}}{g_\eta} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (47)$$

По этимъ формуламъ опредѣлятся наивѣроятнѣйшія значенія неизвѣстныхъ ξ и η.

Опредѣливъ затѣмъ, по формуламъ (44), величины уклоненій υ,

$$\left.\begin{aligned} m_0 - \{a_0\xi + b_0\eta\} &= \upsilon_0 \\ m_1 - \{a_1\xi + b_1\eta\} &= \upsilon_1 \\ &\vdots \\ m_s - \{a_s\xi + b_s\eta\} &= \upsilon_s \end{aligned}\right\}, \ldots\ldots\ldots\ldots (48)$$

получимъ

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma\upsilon^2}{s-1}} \ldots\ldots\ldots\ldots (49)$$

и

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{g_\xi}} \\ \varepsilon_\eta &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{g_\eta}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (50)$$

Опредѣливъ, такимъ образомъ, ξ и η, и, зная приближенныя значенія x_0 и y_0, найдемъ, по формуламъ (12) и (10), обѣ неизвѣстныя

$$x = i_0 = x_0 - \xi$$

и

$$y = \frac{l}{g} = y_0 + \eta,$$

причемъ

$$\varepsilon_{i_0} = \varepsilon_\xi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (51)$$

и

$$\varepsilon_y = \varepsilon_\eta.$$

Отсюда найдемъ

$$l = g\,y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (52)$$

причемъ, въ силу соотношенія (27),

$$\varepsilon_l = g\,\varepsilon_\eta, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (53)$$

гдѣ g представляетъ собою ускореніе силы тяжести.

Такимъ образомъ, по формулѣ (52), можно опредѣлить приведенную длину маятника l, а по формулѣ (53) величину соотвѣтствующей средней ошибки результата.

Къ вышеизложенному слѣдуетъ сдѣлать слѣдующее примѣчаніе.

Мы развили здѣсь способъ наименьшихъ квадратовъ, въ предположеніи, что коеффиціенты a и b, входящіе въ группу уравненій (37), представляютъ собою опредѣленныя числа, а, слѣдовательно, *вполнѣ точно* извѣстны.

Въ данномъ-же случаѣ, при опредѣленіи l, что касается коеффиціентовъ a, то это дѣйствительно такъ, потому что всѣ коеффиціенты a равны 1.

Что-же касается коеффиціентовъ b, то, такъ какъ, напримѣръ, $b_k = n_k^2$ (см. обозначенія (13)), а n_k берется изъ наблюденій, то и всѣ величины b_k будутъ нѣсколько ошибочны. Обозначивъ вѣрную величину b_k черезъ (b_k), а соотвѣтствующую ошибку черезъ δ_k, будемъ имѣть

$$(b_k) = n_k^2 + \delta_k.$$

Слѣдовательно,

$$(b_k)\,\eta = n_k^2\,\eta + \delta_k\,\eta.$$

Но, въ виду того, что η чрезвычайно малая величина, такъ камъ мы опредѣляемъ здѣсь по способу наименьшихъ квадратовъ, не самыя величины x и y, а лишь *поправки* приближенныхъ значеній неизвѣстныхъ x_0 и y_0, то произведеніе $\delta_k\,\eta$ представляетъ собою какъ-бы малую величину высшаго порядка, которой мы и можемъ пренебречь.

Въ виду этого, мы имѣемъ право считать коеффиціенты b_k какъ-бы точно извѣстными и, слѣдовательно, распространить и на данный случай общую теорію способа наименьшихъ квадратовъ.

Въ заключеніе поясдимъ все вышеизложенное на частномъ примѣрѣ, заимствованномъ изъ практики.

Примѣръ этотъ относится къ опредѣленію приведенной длины l горизонтальнаго маятника № VI, установленнаго на сейсмической станціи въ Eskdalemuir въ Шотландіи. Приведемъ результаты наблюденій.

Въ слѣдующей таблицѣ даны:

наблюденный періодъ маятника T',
соотвѣтствующій логариѳмическій декрементъ Λ,
значеніе постоянной n, вычисленной по формулѣ (1),
собственный періодъ маятника безъ затуханія $T=\frac{2\pi}{n}$,
отсчетъ по вертикальной шкалѣ h
и измѣненіе угла наклона оси Δi, вычисленное по формулѣ (8).
k — нѣкоторый порядковый номеръ.

Разстояніе зеркала у штатива маятника до вертикальной шкалы $D=7672$ м/м.

k	T'	Λ	n	T	h	Δi
0	$31^{c},100$	0,0867	0,2024	$31^{c},04$	200,00 м/м	0,000000
1	25,347	0,0691	0,2483	25,31	196,13	0,000252
2	21,889	0,0600	0,2873	21,87	192,25	0,000505
3	19,101	0,0498	0,3292	19,09	187,7	0,000802
4	16,904	0,0433	0,3719	16,90	182,0	0,001173
5	14,313	0,0363	0,4392	14,31	172,0	0,001825
6	13,216	0,0331	0,4756	13,21	165,8	0,002229

На основаніи этихъ данныхъ мы получимъ слѣдующую систему уравненій (11):

k	
0	$0{,}0410y-x=0{,}000000$
1	$0{,}0616y-x=0{,}000252$
2	$0{,}0826y-x=0{,}000505$
3	$0{,}1083y-x=0{,}000802$
4	$0{,}1383y-x=0{,}001173$
5	$0{,}1929y-x=0{,}001825$
6	$0{,}2262y-x=0{,}002229$

Комбинируя первое и послѣднее изъ этихъ уравненій, получимъ

$$x_0 = 0{,}000493$$

$$y_0 = 0{,}01204.$$

Положивши затѣмъ

$$x = x_0 - \xi$$

$$y = y_0 + \eta,$$

будемъ имѣть слѣдующую систему уравненій (14):

k	
0	$\xi + 0{,}0410\eta = \ 0{,}000000$
1	$\xi + 0{,}0616\eta = + 0{,}000003$
2	$\xi + 0{,}0826\eta = + 0{,}000004$
3	$\xi + 0{,}1083\eta = - 0{,}000009$
4	$\xi + 0{,}1383\eta = + 0{,}000001$
5	$\xi + 0{,}1929\eta = - 0{,}000004$
6	$\xi + 0{,}2262\eta = \ 0{,}000000.$

Нормальныя уравненія будутъ (см. соотношенія (37), (38) и (39)):

$$7\xi + 0{,}85089\eta = - 0{,}000005$$

$$0{,}85089\xi + 0{,}13153\eta = - 0{,}000001093.$$

Отсюда находимъ, по формуламъ (46) и (47),

$$\xi = + 0{,}000001338$$

$$\eta = - 0{,}000017$$

$$g_\xi = 1{,}4945$$

$$g_\eta = 0{,}02809.$$

Слѣдовательно, на основаніи соотношеній (10),

$$x = i_0 = 0{,}00049195 = 0^\circ\, 1'\, 41'',47$$

$$y = \frac{l}{g} = 0{,}012020.$$

Ускореніе силы тяжести g въ Петербургѣ, гдѣ этотъ маятникъ изслѣдовался, равно 9818,5 м/м.

Такимъ образомъ

$$l = 118{,}02\ ^{м}/_{м}.$$

Для опредѣленія среднихъ ошибокъ ε_{i_0} и ε_l, вычислимъ, по формуламъ (48), величины уклоненій υ.

k	υ
0	0,000000
1	+ 0,000003
2	+ 0,000004
3	— 0,000008
4	+ 0,000002
5	— 0,000002
6	+ 0,000003.

Такимъ образомъ, будемъ имѣть, такъ какъ $s = 6$,

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum\limits_{k=0}^{k=s} \upsilon^2}{s-1}} = \pm\, 0{,}0000046,$$

а, по формуламъ (50),

$$\varepsilon_\xi = \pm\, 0{,}0000037 = \pm\, 0{,}''77$$

и

$$\varepsilon_\eta = \pm\, 0{,}000027.$$

Но, такъ какъ $\varepsilon_{i_0} = \varepsilon_\xi$ и $\varepsilon_l = g\,\varepsilon_\eta$, то мы получимъ окончательно

$$\underline{i_0 = 0^\circ\, 1'\, 41{,}''47 \pm 0{,}''77}$$

и

$$\underline{l = 118{,}02\ ^{м}/_{м} \pm 0{,}27\ ^{м}/_{м}.}$$

Этотъ примѣръ наглядно показываетъ, съ какою точностью можно по этому способу опредѣлять величины i_0 и l.

Такъ какъ въ предыдущихъ уравненіяхъ всѣ коеффиціенты при ξ равны 1, то мы могли бы примѣнить здѣсь ранѣе описанный въ примѣчаніи

упрощенный пріемъ для нахожденія вѣроятнѣйшихъ значеній двухъ неизвѣстныхъ ξ и η.

Мы видимъ изъ этого примѣра, что, для наибольшаго періода $T = 31{,}04$ с., уголъ наклона оси i_0 очень малъ.

Подставивъ эту величину въ формулу (4), получимъ

$$\alpha = 2033\psi.$$

Такъ какъ предѣльная точность, съ которой можно измѣрять углы отклоненія маятника, при примѣненіи прямого оптическаго метода регистраціи, составляетъ, какъ мы раньше видѣли, около $2^1/_2{}''$, то съ подобнымъ горизонтальнымъ маятникомъ, установленнымъ на такой длинный періодъ, можно опредѣлять наклоны почвы ψ съ точностью до $0{,}0012''$.

---

§ 3.

Опредѣленіе постоянныхъ μ^2, T и k.

Постоянная μ^2 характеризуетъ, какъ мы видѣли раньше, степень затуханія маятника.

Когда $\mu^2 = 1$, то маятникъ совершенно безъ затуханія; случай $\mu^2 = 0$ соотвѣтствуетъ границѣ апеpіодичности. Когда μ^2 отрицательно, то это обозначаетъ, что граница апеpіодичности уже перейдена и уравненіе собственнаго движенія маятника выражается уже не черезъ тригонометрическія, а черезъ показательныя функціи.

Коэффиціентомъ затуханія v мы назвали отношеніе двухъ какихъ-либо послѣдующихъ максимальныхъ амплитудъ размаховъ маятника (независимо отъ знака послѣднихъ):

$$v = \frac{\theta_k}{\theta_{k+1}},$$

а логариѳмическимъ декрементомъ Λ обыкновенный логариѳмъ отъ v:

$$\Lambda = \mathrm{Log}_{10} v.$$

Зависимость между μ^2 и v дается формулой (60) главы V:

$$v = e^{\pi \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}},$$

откуда находимъ

$$\mu^2 = \frac{\pi^2}{\pi^2 + \left(\frac{\mathrm{Log}_{10}\, v}{\mathrm{Log}_{10}\, e}\right)^2}$$

или

$$\mu^2 = \frac{1}{1 + 0{,}53720\,\Lambda^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (54)$$

Когда затуханіе маятника сравнительно невелико и можно получить изъ наблюденій, наблюдая отдѣльныя размахи прибора, надежную величину логариѳмическаго декремента Λ (см. § 2 главы VI. «Опредѣленіе постоянныхъ гальванометра»), то по формулѣ (54) легко вычислить соотвѣтствующую величину постоянной затуханія μ^2, которая входитъ въ рядъ ранѣе выведенныхъ формулъ.

Для этого вычисленія очень удобно пользоваться таблицей IX Сборника сейсмометрическихъ таблицъ, въ которой даны непосредственно значенія

$$\mathrm{Log}\sqrt{1 + 0{,}53720\,\Lambda^2}.$$

Чѣмъ больше v, тѣмъ труднѣе точно опредѣлить Λ, такъ какъ число отдѣльныхъ размаховъ очень невелико.

Практически можно еще, пожалуй, опредѣлять v изъ наблюденій надъ качаніями до $v = 20$, что соотвѣтствуетъ, согласно таблицѣ I Сборника сейсмометрическихъ таблицъ, примѣрно $\mu^2 = 0{,}52$, но, при меньшихъ значеніяхъ μ^2, способъ этотъ уже мало пригоденъ, а для маятниковъ съ весьма сильнымъ затуханіемъ, приближающимся къ границѣ апеpіодичности, даже совершенно непримѣнимъ.

Существуютъ два другіе способа опредѣленія μ^2 при *любой* величинѣ затуханія. Способы эти описаны въ статьѣ «Ueber die Bestimmung des Dämpfungsverhältnisses stark gedämpfter Horizontalpendel», помѣщенной въ Извѣстіяхъ Постоянной Центральной Сейсмической Комиссіи т. IV, в. 1-ый; тамъ-же даны и особыя таблицы, облегчающія соотвѣтствующія вычисленія. Эти способы, при примѣненіи оптическаго метода регистраціи, даютъ хорошіе результаты, но они неудобны въ томъ отношеніи, что они требуютъ графической записи кривой собственнаго движенія маятника, съ каковой кривой и снимаются затѣмъ нѣкоторыя ординаты.

Мы эти способы разсматривать здѣсь не будемъ, а ограничимся разборомъ другого, особаго пріема опредѣленія μ^2, когда затуханіе маятника очень велико, т.-е. когда $\mu^2 < 0{,}20$ или $v > 536$. Это тотъ случай, когда маятникъ находится невдалекѣ отъ границы апеpіодичности и который, для сейсмографовъ съ гальванометрической регистраціей, представляетъ особый интересъ. Этотъ методъ годится и для отрицательныхъ зна-

ченій μ^2, если абсолютная величина μ^2 не превышаетъ 0,20. Способъ этотъ предполагаетъ, что маятникъ соединенъ съ гальванометромъ такъ, какъ это требуется для гальванометрической регистраціи.

Гальванометръ мы предполагаемъ установленнымъ строго на границу апеisær періодичности, т.-е. для него должно имѣть мѣсто соотношеніе $\varepsilon_1 = n_1$ (см. уравненіе (32) главы VI).

Этотъ способъ опредѣленія μ^2 чрезвычайно простой; онъ не требуетъ вовсе снятія кривой собственнаго движенія маятника. Все дѣло сводится къ тому, чтобы дать маятнику, имѣющему уже сильное затуханіе, нѣкоторый начальный толчекъ, для чего служитъ особый электромагнитный ударникъ, и измѣрить затѣмъ, по зеркальному способу измѣренія малыхъ угловъ, соотвѣтствующій первый максимальный уголъ отклоненія маятника θ_m.

Другой наблюдатель въ то-же время опредѣляетъ, также зеркальнымъ способомъ, два первыя, максимальныя, слѣдующія одинъ за другимъ, отклоненія гальванометра, которыя мы обозначимъ соотвѣтственно черезъ φ_1 и φ_2, а также, при помощи хорошаго секундомѣра, поправка котораго точно извѣстна, и время t_0, протекшее отъ момента начала движенія гальванометра до момента его перваго прохожденія черезъ положеніе равновѣсія.

По этимъ четыремъ даннымъ θ_m, φ_1, φ_2 и t_0 можно опредѣлить, не только постоянную затуханія μ^2, но и собственный періодъ маятника T безъ затуханія $\left(T = \frac{2\pi}{n}\right)$ въ томъ случаѣ, когда полюсы магнитовъ у мѣдной пластинки уже сближены между собою и самъ маятникъ находится вблизи границы аперіодичности, а также и переводный множитель k. Самыя наблюденія чрезвычайно просты, причемъ всѣ три неизвѣстныя постоянныя сейсмографа опредѣляются какъ-бы сразу. На производство одного полнаго наблюденія всѣхъ величинъ требуется всего только нѣсколько секундъ времени.

Кривая движенія маятника, когда онъ близокъ къ границѣ аперіодичности, имѣетъ видъ, показанный на чертежѣ 113.

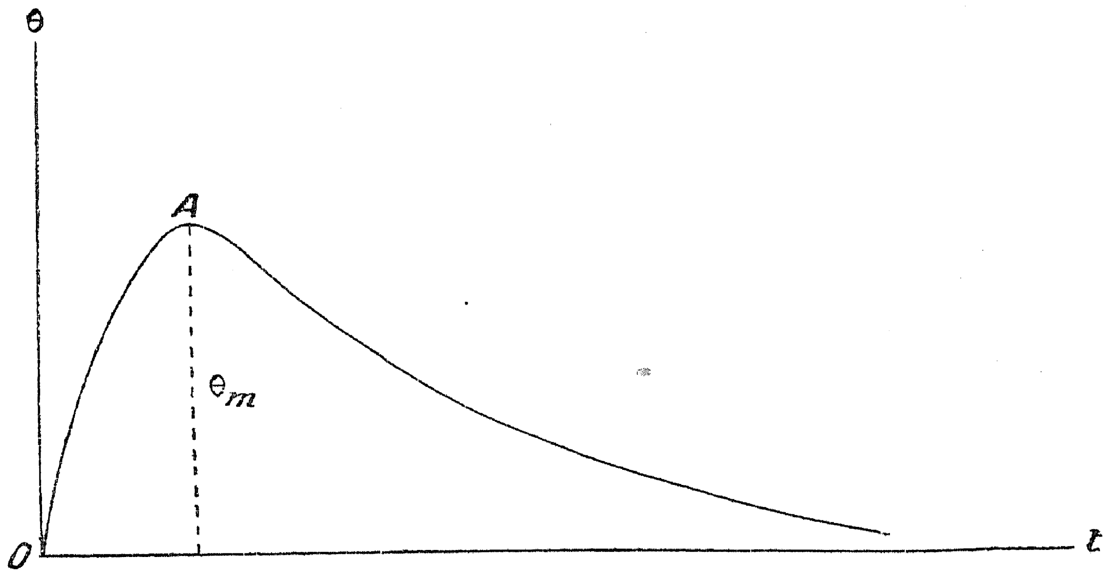
Для опредѣленія максимальнаго угла отклоненія маятника θ_m, противъ его подвижного зеркальца, укрѣпленнаго около оси вращенія, ставится въ большомъ разстояніи (4 — 6 метровъ) труба съ горизонтальной шкалой. Пусть D будетъ разстояніе зеркальца отъ шкалы, а m отсчетъ, соотвѣтствующій максимальному углу отклоненія θ_m.

Тогда

$$\theta_m = \frac{m}{2D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (55)$$

Въ виду большого разстоянія D, никакія поправки на m не требуются.

Черт. 113.



Величину угла θ_m, зависящую отъ силы удара, можно регулировать особымъ винтомъ, при помощи котораго можно приближать или удалять ударникъ отъ груза маятника. Подходящее мѣсто удара по тяжелому грузу подыскивается опытнымъ путемъ, руководствуясь тѣмъ, чтобы, послѣ удара, движеніе маятника было-бы, по возможности, плавнымъ, безъ особенно замѣтныхъ побочныхъ колебаній. Это послѣднее замѣчаніе относится, конечно, только къ Zöllner'овскому подвѣсу.

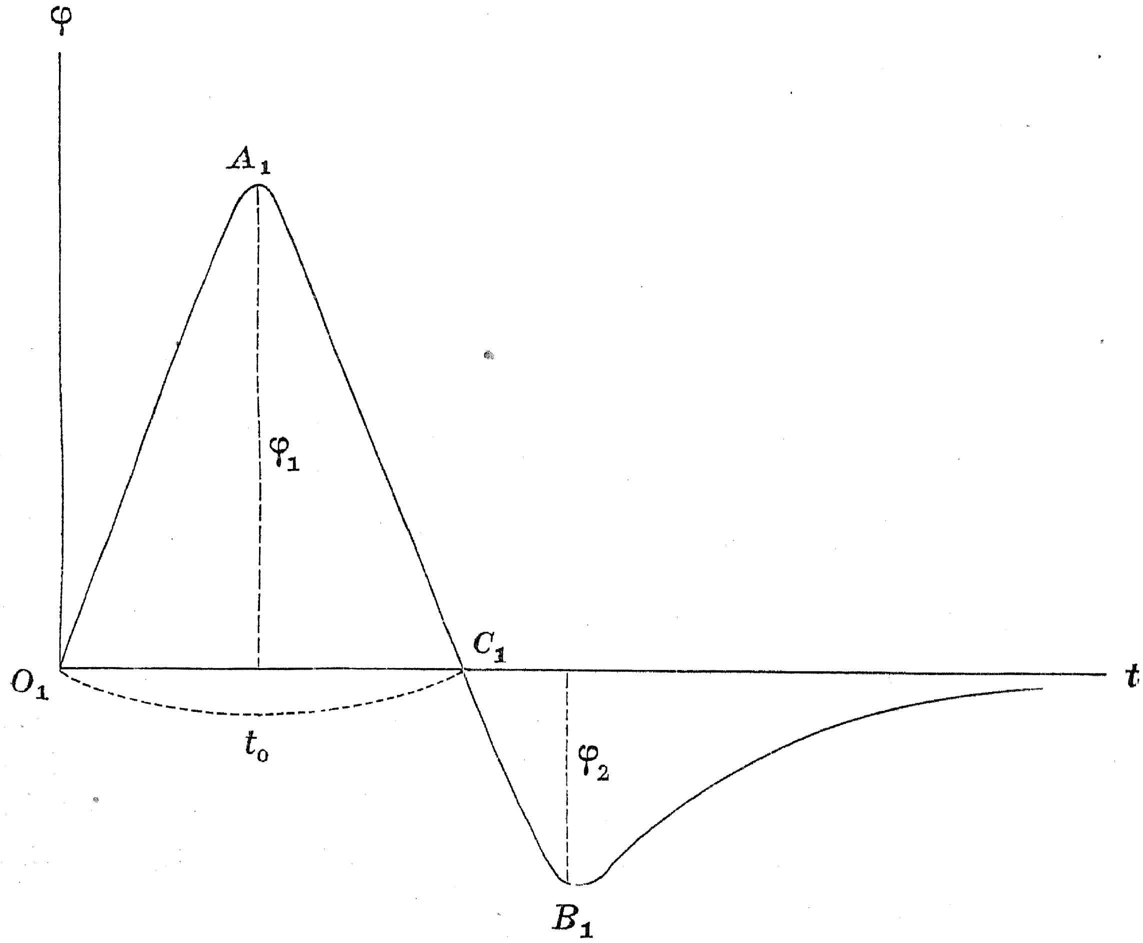
Когда маятникъ описываетъ такую кривую, какъ показано на чертежѣ 113, то апеюдическій гальванометръ даетъ совершенно иную кривую, имѣющую одинъ максимумъ въ A_1 и одинъ минимумъ въ B_1. Соотвѣтствующая кривая представлена на чертежѣ 114.

Абсолютныя величины этихъ максимальныхъ отклоненій обозначимъ черезъ φ_1 и φ_2.

Существованіе *двухъ* максимальныхъ отклоненій у гальванометра, при *одномъ* максимальномъ отклоненіи маятника, объясняется очень просто тѣмъ, что угловая скорость θ' движенія маятника, которая сначала положительна, постепенно уменьшается, доходитъ до нуля, а затѣмъ уже мѣняетъ свой знакъ. Съ другой стороны, сила тока, проходящаго черезъ гальванометръ, всегда пропорціональна угловой скорости θ'. Такимъ образомъ, этотъ токъ будетъ мѣнять свое *направленіе*; и, такъ какъ, въ началѣ и концѣ движенія маятника, сила тока всегда равна нулю, то на кривой гальванометра и получаются уже, вмѣсто одного, *два* максимальныхъ отклоненія.

Углы φ_1 и φ_2 опредѣляются также зеркальнымъ способомъ. Разстояніе соотвѣтствующей шкалы отъ зеркальца гальванометра пусть будетъ D_1, гдѣ D_1 выбирается точно равнымъ одному метру. Соотвѣтствующія максимальныя отклоненія по шкалѣ (независимо отъ знака) пусть будутъ m_1 и m_2.

Черт. 114.



Тогда

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{m_1 - \Delta m_1}{2D_1} \\ \varphi_2 &= \frac{m_2 - \Delta m_2}{2D_1} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (56)$$

Въ этомъ уже случаѣ, въ виду малости D_1, приходится уже считаться съ поправками Δm. Но, если D_1 взято равнымъ 1 метру, то соотвѣтствующія поправки опредѣлятся очень просто по таблицѣ VIII, помѣщенной въ Сборникѣ сейсмометрическихъ таблицъ. (См. формулу (16) § 2 главы VI).

Промежутокъ времени, который мы обозначили черезъ t_0, представленъ на чертежѣ 114 отрѣзкомъ O_1C_1.

Для производства всѣхъ этихъ опредѣленій, надо имѣть двухъ наблюдателей: одинъ опредѣляетъ m, а другой m_1, m_2 и t_0.

Гальванометръ, по предположенію, установленъ строго на границу апеpіодичности. Собственный его періодъ (безъ затуханія) T_1 долженъ быть заранѣе опредѣленъ. Такимъ образомъ будетъ извѣстна и величина постоянной

$$n_1 = \frac{2\pi}{T_1} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (57)$$

Для примѣненія этого способа опредѣленія μ^2, k и точной, окончательной, величины періода маятника T (при сближенныхъ магнитахъ), требуется, чтобы періодъ маятника T (безъ затуханія), который равенъ $\frac{2\pi}{n}$, мало отличался-бы отъ періода гальванометра T_1, иначе говоря, чтобы величина

$$\xi = \frac{n_1 - n}{n} = \frac{T - T_1}{T_1} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (58)$$

была-бы мала.

Такимъ образомъ, извѣстными величинами являются T_1, D и D_1; наблюдаются m, m_1, m_2 и t_0. Отсюда требуется опредѣлить μ^2, T и k.

Не слѣдуетъ, однако, на практикѣ, ограничиваться однократнымъ опредѣленіемъ величинъ m, m_1, m_2 и t_0, а слѣдуетъ произвести цѣлую серію наблюденій (напримѣръ 10), чтобы получить въ среднемъ болѣе надежныя величины постоянныхъ сейсмографа. Даже и въ этомъ случаѣ, на производство всѣхъ этихъ наблюденій, потребуется всего только нѣсколько минутъ времени.

По такимъ наблюденіямъ, даже до производства окончательныхъ вычисленій, можно легко уже судить о томъ, близко или далеко ли находится маятникъ отъ границы апе有іодичности ($\mu^2 = 0$).

Тогда можно, сближая или раздвигая полюсы магнитовъ у мѣдной пластинки, при помощи особыхъ микрометренныхъ винтовъ, предварительно довольно точно установить изслѣдуемый маятникъ на границу аперіодичности.

Разсмотримъ теперь самую теорію этого способа опредѣленія постоянныхъ сейсмографа.

При *выводѣ* различныхъ формулъ, мы будемъ предполагать, что μ^2 и ξ суть малыя величины, квадратами коихъ можно въ дальнѣйшемъ пренебречь.

Предположимъ, что маятнику данъ начальный толчекъ, сообщившій ему начальную угловую скорость θ_0'.

Тогда, на основаніи формулы (40) главы V, уравненіе движенія маятника (въ предположеніи, что $n > \varepsilon$) представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$\theta = \frac{\theta_0'}{\gamma} e^{-\varepsilon t} \sin \gamma t, \dots\dots\dots\dots\dots\dots (59)$$

гдѣ

$$\gamma = \sqrt{n^2 - \varepsilon^2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (60)$$

По формулѣ (41) той-же главы, первый максимумъ θ_m наступитъ въ мементъ t_m, гдѣ

$$\operatorname{tg} \gamma t_m = \frac{\gamma}{\varepsilon}, \dots\dots\dots\dots\dots\dots (61)$$

а, по формулѣ (44),

$$\theta_m = \frac{\theta_0'}{n} e^{-\varepsilon t_m}.$$

Отсюда находимъ

$$\theta_0' = n\, e^{\varepsilon t_m} . \theta_m .$$

Подставляя эту величину въ формулу (59), получимъ

$$\theta = n e^{\varepsilon t_m} . \theta_m e^{-\varepsilon t} \frac{\sin \gamma t}{\gamma} \dots\dots\dots\dots\dots (62)$$

Съ другой стороны, на основаніи обозначеній (56), (57) и (58) главы V-ой, мы имѣемъ

$$\mu^2 = 1 - \frac{\varepsilon^2}{n^2}$$

и

$$\gamma = n\mu \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (63)$$

Отсюда находимъ

$$\varepsilon = n \sqrt{1 - \mu^2},$$

или, пренебрегая членами высшихъ порядковъ,

$$\varepsilon = n\left(1 - \frac{1}{2}\mu^2\right) \dots\dots\dots\dots\dots\dots (64)$$

Слѣдовательно,

$$\frac{\gamma}{\varepsilon} = \frac{\mu}{1 - \frac{1}{2}\mu^2}.$$

Изъ формулы (61) находимъ далѣе

$$t_m = \frac{1}{\gamma} \operatorname{arctg} \frac{\gamma}{\varepsilon} = \frac{1}{n\mu} \operatorname{arctg} \left(\frac{\mu}{1 - \frac{1}{2}\mu^2}\right)$$

или

$$t_m = \frac{1}{n\mu}\left[\frac{\mu}{1 - \frac{1}{2}\mu^2} - \frac{1}{3}\frac{\mu^3}{\left(1 - \frac{1}{2}\mu^2\right)^3}\right].$$

Ограничиваясь членами порядка μ^2, будемъ имѣть

$$t_m = \frac{1}{n}\left[1 + \frac{1}{2}\mu^2 - \frac{1}{3}\mu^2\right] = \frac{1}{n}\left[1 + \frac{1}{6}\mu^2\right].$$

Слѣдовательно,

$$\varepsilon t_m = \left(1 - \frac{1}{2}\mu^2\right)\left(1 + \frac{1}{6}\mu^2\right) = 1 - \frac{1}{3}\mu^2,$$

$$e^{\varepsilon t_m} = e \,.\, e^{-\frac{1}{3}\mu^2} = e \,.\left(1 - \frac{1}{3}\mu^2\right).$$

Съ другой стороны,

$$e^{-\varepsilon t} = e^{-nt} \,.\, e^{\frac{1}{2}\mu^2 . nt} = e^{-nt} . \left[1 + \frac{1}{2}\mu^2 nt\right].$$

Далѣе мы имѣемъ

$$\frac{\sin \gamma t}{\gamma} = \frac{\sin n\mu t}{n\mu} = \frac{1}{n\mu}\left[n\mu t - \frac{n^3\mu^3 t^3}{6}\right] = t\left[1 - \frac{1}{6}\mu^2 n^2 t^2\right].$$

Подставляя найденныя выраженія для $e^{\varepsilon t_m}$, $e^{-\varepsilon t}$ и $\frac{\sin \gamma t}{\gamma}$ въ формулу (62), получимъ

$$\theta = n\,\theta_m\, e.\left(1 - \frac{1}{3}\mu^2\right) \cdot e^{-nt}\left(1 + \frac{1}{2}\mu^2 . nt\right) t\left(1 - \frac{1}{6}\mu^2 n^2 t^2\right).$$

Введемъ теперь, для удобства дальнѣйшихъ вычисленій, новую перемѣнную

$$u = nt \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (65)$$

Тогда, ограничиваясь членами порядка μ^2, будемъ имѣть

$$\theta = \theta_m\, e \,.\, u\, e^{-u}\left(1 - \frac{1}{3}\mu^2\right)\left(1 + \frac{1}{2}\mu^2 u\right)\left(1 - \frac{1}{6}\mu^2 u^2\right)$$

$$= \theta_m\, e \,.\, u\, e^{-u}\left[1 - \frac{1}{3}\mu^2 + \frac{1}{2}\mu^2 u - \frac{1}{6}\mu^2 u^2\right]$$

или, окончательно,

$$\theta = \theta_m e \,.\, u e^{-u}\left[1 + \mu^2\left\{-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}u - \frac{1}{6}u^2\right\}\right] \ldots\ldots\ldots (66)$$

Таково уравненіе движенія маятника.

Найдемъ изъ этой формулы выраженіе для $\frac{d\theta}{du}$.

$$\frac{d\theta}{du} = \theta_m\, e \,.\, \frac{d}{du}\left[e^{-u} . \left\{u + \mu^2\left(-\frac{1}{3}u + \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{6}u^3\right)\right\}\right]$$

$$= \theta_m\, e \,.\, e^{-u}\left[-u + \mu^2\left\{\frac{1}{3}u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3\right\} + 1 + \mu^2\left\{-\frac{1}{3} + u - \frac{1}{2}u^2\right\}\right]$$

или

$$\frac{d\theta}{du} = \theta_m e . e^{-u}\left[(1 - u) + \mu^2\left\{-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}u - u^2 + \frac{1}{6}u^3\right\}\right] \ldots (67)$$

Обратимся теперь къ дифференціальному уравненію движенія гальванометра.

На основаніи формулы (32) § 3 главы VI мы имѣемъ

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\varepsilon_1\frac{d\varphi}{dt} + n_1{}^2\varphi + k\frac{d\theta}{dt} = 0.$$

По предположенію, гальванометръ поставленъ строго на границу апеpіодичности, слѣдовательно

$$\varepsilon_1 = n_1.$$

Введемъ теперь въ предыдущее уравненіе, вмѣсто перемѣнной t, нашу новую перемѣнную u, опредѣляемую соотношеніемъ (65).

Такъ какъ

$$\frac{du}{dt} = n,$$

то мы будемъ имѣть

$$\frac{d^2\varphi}{du^2}\cdot n^2 + 2n_1\frac{d\varphi}{du}\cdot n + n_1{}^2\varphi + k\frac{d\theta}{du}\cdot n = 0.$$

Раздѣливъ теперь это уравненіе на n^2, мы получимъ (см. также формулу (67)),

$$\frac{d^2\varphi}{du^2} + 2\frac{n_1}{n}\cdot\frac{d\varphi}{du} + \frac{n_1{}^2}{n^2}\varphi +$$
$$+ \frac{k\theta_m e}{n}\cdot e^{-u}\left[(1-u) + \mu^2\left\{-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}u - u^2 + \frac{1}{6}u^3\right\}\right] = 0\ldots(68)$$

Введемъ теперь для удобства слѣдующія обозначенія:

$$\left.\begin{aligned} \frac{n_1}{n} &= \nu \\ \frac{k\theta_m e}{n} &= -A \\ e^{-u}(1-u) &= \Phi(u) \\ e^{-u}\left\{-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}u - u^2 + \frac{1}{6}u^3\right\} &= \Phi_1(u) \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(69)$$

Подставимъ эти величины въ уравненіе (68); тогда мы будемъ имѣть

$$\frac{d^2\varphi}{du^2} + 2\nu\frac{d\varphi}{du} + \nu^2\varphi = A\left[\Phi(u) + \mu^2\Phi_1(u)\right]\ldots\ldots\ldots(70)$$

Здѣсь, согласно обозначенію (58),

$$\nu = \frac{n_1}{n} = 1 + \xi\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(71)$$

Займемся теперь интегрированіемъ линейнаго дифференціальнаго уравненія (70), для чего примѣнимъ опять способъ измѣненія постоянныхъ произвольныхъ.

Для этого надо сначала найти интегралъ слѣдующаго уравненія (72):

$$\frac{d^2\varphi}{du^2} + 2\nu\frac{d\varphi}{du} + \nu^2\varphi = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (72)$$

Полагаемъ, какъ всегда,

$$\varphi = e^{-\alpha u}.$$

Тогда, для опредѣленія α, мы будемъ имѣть слѣдующее квадратное уравненіе:

$$\alpha^2 - 2\nu\alpha + \nu^2 = 0,$$

которое имѣетъ *два равныхъ корня*

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \nu.$$

Въ этомъ случаѣ общій интегралъ уравненія (72), какъ извѣстно изъ теоріи интегрированія линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ постоянными коеффиціентами, представится функціей слѣдующаго вида:

$$\varphi = e^{-\nu u}[C_1 + C_2 u], \dots\dots\dots\dots\dots\dots (73)$$

гдѣ C_1 и C_2 представляютъ собою двѣ произвольныя постоянныя.

Это легко провѣрить непосредственной подстановкой.

Дѣйствительно,

$$\frac{d\varphi}{du} = e^{-\nu u}[-C_1\nu - C_2\nu u + C_2] = e^{-\nu u}[-C_1\nu + C_2(1 - \nu u)]$$

и

$$\frac{d^2\varphi}{du^2} = e^{-\nu u}[C_1\nu^2 + C_2(-\nu + \nu^2 u) - C_2\nu] = e^{-\nu u}[C_1\nu^2 + C_2(-2\nu + \nu^2 u)].$$

Подставимъ теперь эти выраженія для φ, $\frac{d\varphi}{du}$ и $\frac{d^2\varphi}{du^2}$ въ дифференціальное уравненіе (72).

Сокращая на общій множитель $e^{-\nu u}$, получимъ

$$\{C_1\nu^2 + C_2(-2\nu + \nu^2 u)\} + 2\nu.\{-C_1\nu + C_2(1 - \nu u)\} + \nu^2\{C_1 + C_2 u\}$$
$$= C_1[\nu^2 - 2\nu^2 + \nu^2] + C_2[-2\nu + 2\nu + u\{\nu^2 - 2\nu^2 + \nu^2\}] = 0.$$

Такимъ образомъ, мы видимъ, что когда φ представлено функціей вида формулы (73), то уравненіе (72) будетъ тождественно равно нулю при всякихъ значеніяхъ u и двухъ постоянныхъ C_1 и C_2, т.-е. выраженіе (73), дѣйствительно, представляетъ собою общій интегралъ дифференціальнаго уравненія (72).

Приступимъ теперь къ интегрированію уравненія (70).

Примѣнимъ теперь тотъ-же пріемъ, что и при изслѣдованіи движенія маятника подъ вліяніемъ горизонтальныхъ смѣщеній почвы (см. § 3 главы V).

Для этого мы представимъ φ также функціей вида формулы (73), но будемъ уже считать C_1 и C_2 не постоянными, а нѣкоторыми функціями отъ u, на которыя мы можемъ наложить одно добавочное условіе по нашему усмотрѣнію.

Продифференцируемъ въ этомъ предположеніи выраженіе (73).

Тогда

$$\frac{d\varphi}{du} = e^{-\nu u}[-C_1\nu + C_2(1-\nu u)] + e^{-\nu u}\left[\frac{dC_1}{du} + u\frac{dC_2}{du}\right].$$

Введемъ такое добавочное условіе

$$\frac{dC_1}{du} + u\frac{dC_2}{du} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (74)$$

и опредѣлимъ затѣмъ вторую производную отъ φ по u.

$$\frac{d^2\varphi}{du^2} = e^{-\nu u}[C_1\nu^2 + C_2(-2\nu + \nu^2 u)] + e^{-\nu u}\left[-\nu\frac{dC_1}{du} + (1-\nu u)\frac{dC_2}{du}\right].$$

Подставивъ теперь эти выраженія для φ, $\frac{d\varphi}{du}$ и $\frac{d^2\varphi}{du^2}$ въ уравненіе (70), мы увидимъ, на основаніи предыдущаго, что всѣ члены, имѣющіе множителемъ C_1 и C_2, тождественно обратятся въ нуль и останется только

$$e^{-\nu u}\left[-\nu\frac{dC_1}{du} + (1-\nu u)\frac{dC_2}{du}\right] = A[\Phi(u) + \mu^2\Phi_1(u)] \ldots\ldots (75)$$

Изъ этого уравненія и изъ уравненія (74) и опредѣлятся значенія двухъ производныхъ $\frac{dC_1}{du}$ и $\frac{dC_2}{du}$.

Изъ формулы (74) находимъ

$$\frac{dC_2}{du} = -\frac{1}{u}\,\frac{dC_1}{du} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (76)$$

Подставивъ эту величину въ формулу (75), получимъ

$$\left[-\nu-\frac{1-\nu u}{u}\right]\frac{dC_1}{du}=A\left[e^{\nu u}\Phi(u)+\mu^2 e^{\nu u}\Phi_1(u)\right]$$

или

$$\frac{dC_1}{du}=-Au\left[e^{\nu u}\Phi(u)+\mu^2 e^{\nu u}\Phi_1(u)\right].$$

Подставивъ это выраженіе въ формулу (76), будемъ имѣть

$$\frac{dC_2}{du}=A\left[e^{\nu u}\Phi(u)+\mu^2 e^{\nu u}\Phi_1(u)\right].$$

Отсюда найдемъ уже значенія функцій C_1 и C_2.

$$C_1=\Gamma_1-A\left[\int ue^{\nu u}\Phi(u)\,du+\mu^2\int ue^{\nu u}\Phi_1(u)\,du\right]$$

и

$$C_2=\Gamma_2+A\left[\int e^{\nu u}\Phi(u)\,du+\mu^2\int e^{\nu u}\Phi_1(u)\,du\right].$$

Подставивъ эти выраженія въ формулу (73), найдемъ слѣдующее окончательное выраженіе для общаго интеграла уравненія (70):

$$\varphi=e^{-\nu u}\left[\Gamma_1+\Gamma_2 u\right]-Ae^{-\nu u}\left[\left\{\int ue^{\nu u}\Phi(u)\,du-u\int e^{\nu u}\Phi(u)\,du\right\}\right.$$

$$\left.+\mu^2\left\{\int ue^{\nu u}\Phi_1(u)\,du-u\int e^{\nu u}\Phi_1(u)\,du\right\}\right]\ldots(77)$$

Здѣсь Γ_1 и Γ_2 суть двѣ постоянныя произвольныя, которыя опредѣляются изъ начальныхъ условій движенія.

Эта формула (77) понадобится намъ еще въ § 1 главы X.

Теперь надо найти значенія этихъ четырехъ неопредѣленныхъ интеграловъ, принимая во вниманіе обозначенія (69).

Въ каждомъ такомъ интегралѣ встрѣтятся въ подъинтегральной функціи выраженія вида

$$e^{(\nu-1)u}\,.\,u^s,$$

гдѣ s есть нѣкоторое положительное число или нуль.

Введемъ для простоты слѣдующее обозначеніе:

$$S_s=\int e^{(\nu-1)u}u^s\,du\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(78)$$

Проинтегрируемъ это выраженіе по частямъ.

$$S_s = \frac{1}{\nu-1} e^{(\nu-1)u} . u^s - s\frac{1}{\nu-1}\int e^{(\nu-1)u} u^{s-1}\, du$$

или

$$S_s = \frac{1}{\nu-1} e^{(\nu-1)u} u^s - \frac{s}{\nu-1} \cdot S_{s-1}.$$

Но, такъ какъ, согласно обозначенію (71),

$$\nu - 1 = \xi,$$

то мы будемъ имѣть

$$S_s = \frac{1}{\xi} e^{\xi u} u^s - \frac{s}{\xi} S_{s-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (79)$$

На основаніи обозначенія (78) и формулы (79) находимъ:

$$\left.\begin{aligned}
S_0 &= \frac{1}{\nu-1} e^{(\nu-1)u} = \frac{e^{\xi u}}{\xi} \\
S_1 &= \frac{1}{\xi} e^{\xi u} u - \frac{1}{\xi} \cdot \frac{e^{\xi u}}{\xi} = \frac{e^{\xi u}}{\xi^2}[\xi u - 1] \\
S_2 &= \frac{1}{\xi} e^{\xi u} u^2 - \frac{2}{\xi} S_1 = \frac{1}{\xi} e^{\xi u} u^2 - \frac{2}{\xi}\frac{e^{\xi u}}{\xi^2}[\xi u - 1] = \frac{e^{\xi u}}{\xi^3}[\xi^2 u^2 - 2\xi u + 2] \\
S_3 &= \frac{1}{\xi} e^{\xi u} u^3 - \frac{3}{\xi} S_2 = \frac{1}{\xi} e^{\xi u} u^3 - \frac{3}{\xi} \cdot \frac{e^{\xi u}}{\xi^3}[\xi^2 u^2 - 2\xi u + 2] \\
&= \frac{e^{\xi u}}{\xi^4}[\xi^3 u^3 - 3\xi^2 u^2 + 6\xi u - 6] \\
S_4 &= \frac{1}{\xi} e^{\xi u} u^4 - \frac{4}{\xi} S_3 = \frac{1}{\xi} e^{\xi u} u^4 - \frac{4}{\xi} \cdot \frac{e^{\xi u}}{\xi^4}[\xi^3 u^3 - 3\xi^2 u^2 + 6\xi u - 6] \\
&= \frac{e^{\xi u}}{\xi^5}[\xi^4 u^4 - 4\xi^3 u^3 + 12\xi^2 u^2 - 24\xi u + 24].
\end{aligned}\right\} \ldots (80)$$

На основаніи этихъ формулъ и обозначеній (69), мы найдемъ для каждой пары интеграловъ, входящихъ въ формулу (77), слѣдующія выраженія:

$$\int u e^{\nu u} \Phi(u)\, du - u\int e^{\nu u} \Phi(u)\, du = \int e^{(\nu-1)u}(u - u^2)\, du - u\int e^{(\nu-1)u}(1-u)\, du$$

$$= S_1 - S_2 - uS_0 + uS_1 = -uS_0 + (1+u)S_1 - S_2 = -u\frac{e^{\xi u}}{\xi} + (1+u)\cdot\frac{e^{\xi u}}{\xi^2}(\xi u - 1)$$

$$-\frac{e^{\xi u}}{\xi^3}(\xi^2 u^2 - 2\xi u + 2) = \frac{e^{\xi u}}{\xi^3}[-\xi^2 u + \xi^2 u - \xi + \xi^2 u^2 - \xi u - \xi^2 u^2 + 2\xi u - 2]$$

$$= \frac{e^{\xi u}}{\xi^3}[(-2-\xi) + \xi u].$$

Точно также найдемъ:

$$\int ue^{\nu u}\Phi_1(u)\,du - u\int e^{\nu u}\Phi_1(u)\,du = \int e^{(\nu-1)u}\left\{-\frac{1}{3}u + \frac{4}{3}u^2 - u^3 + \frac{1}{6}u^4\right\}$$

$$-u\int e^{(\nu-1)u}\left\{-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}u - u^2 + \frac{1}{6}u^3\right\}du = -\frac{1}{3}S_1 + \frac{4}{3}S_2 - S_3 + \frac{1}{6}S_4$$

$$-u\left\{-\frac{1}{3}S_0 + \frac{4}{3}S_1 - S_2 + \frac{1}{6}S_3\right\}$$

$$= \frac{1}{3}uS_0 - \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}u\right)S_1 + \left(\frac{4}{3} + u\right)S_2 - \left(1 + \frac{1}{6}u\right)S_3 + \frac{1}{6}S_4$$

$$= \frac{1}{3}u\cdot\frac{e^{\xi u}}{\xi} - \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}u\right)\frac{e^{\xi u}}{\xi^2}(\xi u - 1) + \left(\frac{4}{3} + u\right)\frac{e^{\xi u}}{\xi^3}(\xi^2u^2 - 2\xi u + 2)$$

$$-\left(1 + \frac{1}{6}u\right)\frac{e^{\xi u}}{\xi^4}(\xi^3u^3 - 3\xi^2u^2 + 6\xi u - 6) + \frac{1}{6}\frac{e^{\xi u}}{\xi^5}(\xi^4u^4 - 4\xi^3u^3 + 12\xi^2u^2 - 24\xi u + 24)$$

$$= \frac{e^{\xi u}}{\xi^5}\left[\frac{1}{3}\xi^4u + \left(-\frac{1}{3}\xi^3 - \frac{4}{3}\xi^3u\right)(\xi u - 1) + \left(\frac{4}{3}\xi^2 + u\xi^2\right)(\xi^2u^2 - 2\xi u + 2)\right.$$

$$\left. + \left(-\xi - \frac{1}{6}\xi u\right)(\xi^3u^3 - 3\xi^2u^2 + 6\xi u - 6) + \frac{1}{6}(\xi^4u^4 - 4\xi^3u^3 + 12\xi^2u^2 - 24\xi u + 24)\right]$$

$$= \frac{e^{\xi u}}{\xi^5}\left[\frac{1}{3}\xi^4u - \frac{1}{3}\xi^4u + \frac{1}{3}\xi^3 - \frac{4}{3}\xi^4u^2 + \frac{4}{3}\xi^3u + \frac{4}{3}\xi^4u^2 - \frac{8}{3}\xi^3u + \frac{8}{3}\xi^2\right.$$

$$+ \xi^4u^3 - 2\xi^3u^2 + 2\xi^2u - \xi^4u^3 + 3\xi^3u^2 - 6\xi^2u + 6\xi - \frac{1}{6}\xi^4u^4 + \frac{1}{2}\xi^3u^3$$

$$\left. - \xi^2u^2 + \xi u + \frac{1}{6}\xi^4u^4 - \frac{2}{3}\xi^3u^3 + 2\xi^2u^2 - 4\xi u + 4\right]$$

$$= \frac{e^{\xi u}}{\xi^5}\left[\left(4 + 6\xi + \frac{8}{3}\xi^2 + \frac{1}{3}\xi^3\right) + \left(-3\xi - 4\xi^2 - \frac{4}{3}\xi^3\right)u + (\xi^2 + \xi^3)u^2 - \frac{1}{6}\xi^3u^3\right].$$

Подставляя теперь найденныя выраженія интеграловъ въ формулу (77), и принимая еще во вниманіе, что $e^{-\nu u}\cdot e^{\xi u} = e^{-(\nu-\xi)u} = e^{-u}$, будемъ имѣть

$$\varphi = e^{-\nu u}[\Gamma_1 + \Gamma_2u] - A\frac{e^{-u}}{\xi^5}\left[\{(-2\xi^2 - \xi^3) + \xi^3u\} + \mu^2\left\{\left(4 + 6\xi + \frac{8}{3}\xi^2 + \frac{1}{3}\xi^3\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(-3\xi - 4\xi^2 - \frac{4}{3}\xi^3\right)u + (\xi^2 + \xi^3)u^2 - \frac{1}{6}\xi^3u^3\right\}\right] \quad \ldots\ldots(81)$$

Опредѣлимъ теперь изъ начальныхъ условій движенія значенія постоянныхъ Γ_1 и Γ_2.

При $t = 0$ или $u = 0$, по условію, $\varphi_0 = 0$.

Значеніе $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{t=0} = \varphi_0'$ опредѣлится изъ дифференціальнаго уравненія движенія гальванометра

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2n_1\frac{d\varphi}{dt} + n_1^2\varphi + k\frac{d\theta}{dt} = 0,$$

интегрируя послѣднее почленно между $t=0$ и $t=\tau$, гдѣ τ чрезвычайно малая величина (въ предѣлѣ $\tau=0$).

$$\varphi_0' + 2n_1\varphi_0 + n_1^2\int_0^\tau \varphi dt + k\theta_0 = 0.$$

Такъ какъ, при $t=0$, маятникъ еще не отклоненъ, то $\theta_0=0$, а, слѣдовательно, и $\varphi_0'=0$.

Такимъ образомъ, Γ_1 и Γ_2 опредѣлятся изъ условій, чтобы, при $u=0$,

$$\varphi_0 = 0$$

и

$$\left(\frac{d\varphi}{du}\right)_{u=0} = \varphi_0' \cdot \frac{1}{n} = 0.$$

Изъ формулы (81) находимъ:

$$\frac{d\varphi}{du} = e^{-\nu u}\left[-\nu\Gamma_1 - \nu\Gamma_2 u + \Gamma_2\right] - A\frac{e^{-u}}{\xi^5}\Big[\{2\xi^2 + \xi^3 - \xi^3 u + \xi^3\}$$
$$+ \mu^2\Big\{\left(-4 - 6\xi - \frac{8}{3}\xi^2 - \frac{1}{3}\xi^3\right) + \left(3\xi + 4\xi^2 + \frac{4}{3}\xi^3\right)u - (\xi^2 + \xi^3)u^2 + \frac{1}{6}\xi^3 u^3$$
$$+ \left(-3\xi - 4\xi^2 - \frac{4}{3}\xi^3\right) + 2(\xi^2 + \xi^3)u - \frac{1}{2}\xi^3 u^2\Big\}\Big] \ldots\ldots\ldots\ldots (82)$$

Положивши теперь въ формулахъ (81) и (82) $u=0$, получимъ:

$$0 = \Gamma_1 - \frac{A}{\xi^5}\left[(-2\xi^2 - \xi^3) + \mu^2\left(4 + 6\xi + \frac{8}{3}\xi^2 + \frac{1}{3}\xi^3\right)\right]$$

и

$$0 = -\nu\Gamma_1 + \Gamma_2 - \frac{A}{\xi^5}\left[(2\xi^2 + 2\xi^3) + \mu^2\left(-4 - 6\xi - \frac{8}{3}\xi^2 - \frac{1}{3}\xi^3 - 3\xi - 4\xi^2 - \frac{4}{3}\xi^3\right)\right].$$

Сложивши эти два уравненія, и, принимая еще во вниманіе, что $1-\nu=-\xi$, будемъ имѣть

$$0 = -\xi\Gamma_1 + \Gamma_2 - \frac{A}{\xi^5}\cdot\left[\xi^3 + \mu^2\left(-3\xi - 4\xi^2 - \frac{4}{3}\xi^3\right)\right].$$

Такимъ образомъ,

$$\Gamma_1 = \frac{A}{\xi^5}\left[(-2\xi^2 - \xi^3) + \mu^2\left(4 + 6\xi + \frac{8}{3}\xi^2 + \frac{1}{3}\xi^3\right)\right] \ldots\ldots (83)$$

и

$$\Gamma_2 = \xi\Gamma_1 + \frac{A}{\xi^5}\left[\xi^3 + \mu^2\left(-3\xi - 4\xi^2 - \frac{4}{3}\xi^3\right)\right]$$

или

$$\Gamma_2 = \frac{A}{\xi^5}\left[(-2\xi^3 - \xi^4 + \xi^3) + \mu^2\left(4\xi + 6\xi^2 + \frac{8}{3}\xi^3 + \frac{1}{3}\xi^4 - 3\xi - 4\xi^2 - \frac{4}{3}\xi^3\right)\right],$$

или, окончательно,

$$\Gamma_2 = \frac{A}{\xi^5}\left[(-\xi^3 - \xi^4) + \mu^2\left(\xi + 2\xi^2 + \frac{4}{3}\xi^3 + \frac{1}{3}\xi^4\right)\right] \quad \ldots\ldots (84)$$

Найдемъ теперь выраженіе для $e^{-\nu u}[\Gamma_1 + \Gamma_2 u]$.

Мы имѣемъ

$$e^{-\nu u} = e^{-(1+\xi)u} = e^{-u}.e^{-\xi u} = e^{-u}.\left[1 - \xi u + \frac{1}{2}\xi^2 u^2 - \frac{1}{6}\xi^3 u^3 + \frac{1}{24}\xi^4 u^4 - \frac{1}{120}\xi^5 u^5 + \frac{1}{720}\xi^6 u^6 - \frac{1}{5040}\xi^7 u^7\right].$$

Такъ какъ въ формулахъ (83) и (84) ξ, которое представляетъ собою малую величину, входитъ въ знаменателѣ въ 5-ой степени, то, желая имѣть окончательное выраженіе для φ съ точностью до членовъ порядка ξ^2, приходится брать разложеніе $e^{-\xi u}$ вплоть до ξ^7 включительно.

Далѣе находимъ

$$e^{-\nu u}[\Gamma_1 + \Gamma_2 u] = e^{-u}\frac{A}{\xi^5}\left[\left\{(-2\xi^2 - \xi^3) + (-\xi^3 - \xi^4)u\right\} + \mu^2\left\{\left(4 + 6\xi + \frac{8}{3}\xi^2 + \frac{1}{3}\xi^3\right) + \left(\xi + 2\xi^2 + \frac{4}{3}\xi^3 + \frac{1}{3}\xi^4\right)\right\}u\right]\left[1 - \xi u + \frac{1}{2}\xi^2 u^2 - \frac{1}{6}\xi^3 u^3 + \frac{1}{24}\xi^4 u^4 - \frac{1}{120}\xi^5 u^5 + \frac{1}{720}\xi^6 u^6 - \frac{1}{5040}\xi^7 u^7\right]$$

$$= e^{-u}\frac{A}{\xi^5}\left[\left\{(-2\xi^2 - \xi^3) + (+2\xi^3 + \xi^4 - \xi^3 - \xi^4)u + \left(-\xi^4 - \frac{1}{2}\xi^5 + \xi^4 + \xi^5\right)u^2 + \left(\frac{1}{3}\xi^5 + \frac{1}{6}\xi^6 - \frac{1}{2}\xi^5 - \frac{1}{2}\xi^6\right)u^3 + \left(-\frac{1}{12}\xi^6 - \frac{1}{24}\xi^7 + \frac{1}{6}\xi^6 + \frac{1}{6}\xi^7\right)u^4 + \left(\frac{1}{60}\xi^7 - \frac{1}{24}\xi^7\right)u^5\right\} + \mu^2\left\{\left(4 + 6\xi + \frac{8}{3}\xi^2 + \frac{1}{3}\xi^3\right) + \left(-4\xi - 6\xi^2 - \frac{8}{3}\xi^3 - \frac{1}{3}\xi^4 + \xi + 2\xi^2 + \frac{4}{3}\xi^3 + \frac{1}{3}\xi^4\right)u + \left(2\xi^2 + 3\xi^3 + \frac{4}{3}\xi^4 + \frac{1}{6}\xi^5 - \xi^2 - 2\xi^3 - \frac{4}{3}\xi^4 - \frac{1}{3}\xi^5\right)u^2 + \left(-\frac{2}{3}\xi^3 - \xi^4 - \frac{4}{9}\xi^5 - \frac{1}{18}\xi^6 + \frac{1}{2}\xi^3 + \xi^4 + \frac{2}{3}\xi^5 + \frac{1}{6}\xi^6\right)u^3 + \left(\frac{1}{6}\xi^4 + \frac{1}{4}\xi^5 + \frac{1}{9}\xi^6 + \frac{1}{72}\xi^7 - \frac{1}{6}\xi^4 - \frac{1}{3}\xi^5 - \frac{2}{9}\xi^6 - \frac{1}{18}\xi^7\right)u^4 + \left(-\frac{1}{30}\xi^5 - \frac{1}{20}\xi^6 - \frac{2}{90}\xi^7 + \frac{1}{24}\xi^5 + \frac{1}{12}\xi^6 + \frac{1}{18}\xi^7\right)u^5 + \left(\frac{1}{180}\xi^6 + \frac{1}{120}\xi^7 - \frac{1}{120}\xi^6 - \frac{1}{60}\xi^7\right)u^6 + \left(-\frac{1}{1260}\xi^7 + \frac{1}{720}\xi^7\right)u^7\right\}\right].$$

Сдѣлавъ всѣ приведенія, получимъ:

$$e^{-\nu u}[\Gamma_1+\Gamma_2 u]=e^{-u}\frac{A}{\xi^5}\Big[\Big\{(-2\xi^2-\xi^3)+\xi^3 u+\frac{1}{2}\xi^5 u^2+\Big(-\frac{1}{6}\xi^5-\frac{1}{3}\xi^6\Big)u^3$$

$$+\Big(\frac{1}{12}\xi^6+\frac{1}{8}\xi^7\Big)u^4-\frac{1}{40}\xi^7 u^5\Big\}+\mu^2\Big\{\Big(4+6\xi+\frac{8}{3}\xi^2+\frac{1}{3}\xi^3\Big)$$

$$+\Big(-3\xi-4\xi^2-\frac{4}{3}\xi^3\Big)u+\Big(\xi^2+\xi^3-\frac{1}{6}\xi^5\Big)u^2+\Big(-\frac{1}{6}\xi^3+\frac{2}{9}\xi^5+\frac{1}{9}\xi^6\Big)u^3$$

$$+\Big(-\frac{1}{12}\xi^5-\frac{1}{9}\xi^6-\frac{1}{24}\xi^7\Big)u^4+\Big(\frac{1}{120}\xi^5+\frac{1}{30}\xi^6+\frac{1}{30}\xi^7\Big)u^5$$

$$+\Big(-\frac{1}{360}\xi^6-\frac{1}{120}\xi^7\Big)u^6+\frac{1}{1680}\xi^7 u^7\Big\}\Big].$$

Подставивъ это выраженіе въ формулу (81), мы увидимъ, что общимъ множителемъ войдетъ коеффиціентъ $A\frac{e^{-u}}{\xi^5}$, а въ скобкахъ всѣ члены, содержащіе множителями ξ^0, ξ, ξ^2 и ξ^3, *взаимно сократятся;* ξ^4 въ эти формулы вовсе не входитъ.

Такимъ образомъ, у насъ останется только

$$\varphi=e^{-u}\frac{A}{\xi^5}\Big[\Big\{\frac{1}{2}\xi^5 u^2+\Big(-\frac{1}{6}\xi^5-\frac{1}{3}\xi^6\Big)u^3+\Big(\frac{1}{12}\xi^6+\frac{1}{8}\xi^7\Big)u^4$$

$$-\frac{1}{40}\xi^7 u^5\Big\}+\mu^2\Big\{-\frac{1}{6}\xi^5 u^2+\Big(\frac{2}{9}\xi^5+\frac{1}{9}\xi^6\Big)u^3+\Big(-\frac{1}{12}\xi^5-\frac{1}{9}\xi^6-\frac{1}{24}\xi^7\Big)u^4$$

$$+\Big(\frac{1}{120}\xi^5+\frac{1}{30}\xi^6+\frac{1}{30}\xi^7\Big)u^5+\Big(-\frac{1}{360}\xi^6-\frac{1}{120}\xi^7\Big)u^6+\frac{1}{1680}\xi^7 u^7\Big\}\Big].$$

Сокративъ на ξ^5 и группируя оставшіеся члены по степенямъ ξ, получимъ

$$\varphi=e^{-u}A\Big[u^2\Big\{\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}u\Big)+\Big(-\frac{1}{3}+\frac{1}{12}u\Big)u\xi+\Big(\frac{1}{8}-\frac{1}{40}u\Big)u^2\xi^2\Big\}$$

$$+\mu^2 u^2\Big\{\Big(-\frac{1}{6}+\frac{2}{9}u-\frac{1}{12}u^2+\frac{1}{120}u^3\Big)+\Big(\frac{1}{9}-\frac{1}{9}u+\frac{1}{30}u^2-\frac{1}{360}u^3\Big)u\xi$$

$$+\Big(-\frac{1}{24}+\frac{1}{30}u-\frac{1}{120}u^2+\frac{1}{1680}u^3\Big)u^2\xi^2\Big\}\Big].$$

Принимая еще во вниманіе, что, согласно обозначеніямъ (69),

$$A=-\frac{ke\theta_m}{n},$$

мы можемъ предыдущее выраженіе для φ представить въ слѣдующемъ окончательномъ видѣ:

$$\varphi=\Psi(u)+\mu^2\Psi_1(u), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (85)$$

гдѣ

$$\Psi(u)=\frac{ke\theta_m}{n}e^{-u}u^2\left[\omega_0(u)+\omega_1(u)u\xi+\omega_2(u)u^2\xi^2\right]\ \ldots\ldots(86)$$

$$\Psi_1(u)=\frac{ke\theta_m}{n}e^{-u}u^2\left[f_0(u)+f_1(u)u\xi+f_2(u)u^2\xi^2\right]\ \ldots\ldots\ldots(87)$$

и

$$\left.\begin{aligned}\omega_0(u)&=-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}u\\ \omega_1(u)&=\ \ \frac{1}{3}-\frac{1}{12}u\\ \omega_2(u)&=-\frac{1}{8}+\frac{1}{40}u\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(88)$$

$$\left.\begin{aligned}f_0(u)&=\ \ \frac{1}{6}-\frac{2}{9}u+\frac{1}{12}u^2-\frac{1}{120}u^3\\ f_1(u)&=-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}u-\frac{1}{30}u^2+\frac{1}{360}u^3\\ f_2(u)&=\ \ \frac{1}{24}-\frac{1}{30}u+\frac{1}{120}u^2-\frac{1}{1680}u^3\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(89)$$

Формула (85) представляетъ собою уравненіе движенія гальванометра въ томъ случаѣ, когда маятникъ получаетъ внезапный толчекъ, вызывающій максимальное отклоненіе θ_m. Это выраженіе для φ расположено, въ каждой своей части, по степенямъ ξ, причемъ въ немъ сохранены члены порядка ξ^2.

Въ дальнѣйшихъ выводахъ мы ограничимся, однако, для простоты, только членами порядка ξ.

Найдемъ теперь первыя два наибольшія отклоненія гальванометра φ_1 и φ_2. Соотвѣтствующія значенія t обозначимъ черезъ t_1 и t_2, а значенія u черезъ u_{m_1} и u_{m_2}.

Эти послѣднія величины суть корни уравненія

$$\frac{d\varphi}{du}=\frac{d\Psi(u)}{du}+\mu^2\frac{d\Psi_1(u)}{du}=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(90)$$

Пусть u_1 есть наименьшій корень уравненія

$$\frac{d\Psi(u)}{du}=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(91)$$

Тогда мы можемъ положить

$$u_{m_1}=u_1+\delta_1\mu^2.$$

Величину δ_1 мы могли-бы, въ случаѣ надобности, опредѣлить, подстав-

ляя это выраженіе для u_{m_1} въ формулу (90), но на самомъ дѣлѣ это совершенно излишне, такъ какъ намъ важно знать не моменты t_1 и t_2, а соотвѣтствующія максимальныя отклоненія гальванометра φ_1 и φ_2.

Съ точностью до членовъ высшихъ порядковъ (въ отношеніи μ^2) мы будемъ имѣть

$$\varphi_1 = \Psi(u_1 + \delta_1 \mu^2) + \mu^2 \Psi_1(u_1) = \Psi(u_1) + \left(\frac{d\Psi}{du}\right)_{u=u_1} . \delta_1 \mu^2 + \mu^2 \Psi_1(u_1)$$

или, такъ какъ u_1 есть корень уравненія (91),

$$\varphi_1 = \Psi(u_1) + \mu^2 \Psi_1(u_1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (92)$$

Точно также найдемъ

$$\varphi_2 = \Psi(u_2) + \mu^2 \Psi_1(u_2), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (93)$$

гдѣ u_2 есть второй корень уравненія (91).

Найдемъ теперь значенія u_1 и u_2.

На основаніи формулы (86) мы имѣемъ, отбрасывая члены порядка ξ^2,

$$\frac{d\Psi(u)}{du} = \frac{ke\theta_m}{n} e^{-u} \Big[-u^2 \{\omega_0(u) + \omega_1(u) . u\xi\} + 2u \{\omega_0(u) + \omega_1(u) . u\xi\}$$
$$+ u^2 \left\{ \frac{d\,\omega_0(u)}{du} + \frac{d\,\omega_1(u)}{du} \cdot u\xi + \omega_1(u)\xi \right\} \Big] .$$

Полагая теперь $\frac{d\Psi(u)}{du} = 0$ и группируя всѣ члены по степенямъ ξ, найдемъ:

$$\left\{ (2 - u)\,\omega_0(u) + u \frac{d\omega_0(u)}{du} \right\} + \left\{ (2 - u)\,\omega_1(u)\,u + \frac{d\omega_1(u)}{du} \cdot u^2 + \omega_1(u)\,u \right\} \xi = 0.$$

Подставимъ теперь сюда значенія функцій ω_0 и ω_1 изъ формулъ (88).

Тогда

$$\left\{ (2 - u)\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}u\right) + \frac{1}{6}u \right\} + \left\{ (2 - u)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12}u\right)u - \frac{1}{12}u^2 + \frac{1}{3}u - \frac{1}{12}u^2 \right\} \xi = 0.$$

Раскроемъ теперь скобки.

Тогда

$$\left\{ -1 + \frac{1}{3}u + \frac{1}{2}u - \frac{1}{6}u^2 + \frac{1}{6}u \right\} + \left\{ \frac{2}{3} - \frac{1}{6}u - \frac{1}{3}u + \frac{1}{12}u^2 - \frac{1}{6}u + \frac{1}{3} \right\} u\xi =$$

или

$$\left\{-1+u-\frac{1}{6}u^2\right\}+\left\{1-\frac{2}{3}u+\frac{1}{12}u^2\right\}u\xi=0\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.(94)$$

Для нахожденія корней этого уравненія, примѣнимъ способъ послѣдовательныхъ приближеній.

Положивши $\xi=0$, найдемъ приближенные корни $(u_1)_0$ и $(u_2)_0$ уравненія (94). Они должны удовлетворять слѣдующему квадратному уравненію:

$$u^2-6u+6=0\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.(95)$$

Отсюда находимъ

$$u=3\pm\sqrt{9-6}.$$

Итакъ,

$$\left.\begin{aligned}(u_1)_0&=3-\sqrt{3}\\(u_2)_0&=3+\sqrt{3}\end{aligned}\right\}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.(96)$$

Мы видимъ, такимъ образомъ, что кривая гальванометра имѣетъ, дѣйствительно, *два* максимума (независимо отъ знака), какъ и слѣдовало a priori ожидать.

Найдемъ теперь болѣе точное значеніе перваго корня u_1 уравненія (94). Тогда второй корень u_2 получится непосредственно изъ выраженія для u_1 простой замѣной $\sqrt{3}$ величиной $-\sqrt{3}$.

Для опредѣленія u_1 положимъ сначала

$$u_1=(u_1)_0+\gamma_1\xi,$$

и подставимъ эту величину въ формулу (94).

Тогда, пренебрегая членами порядка ξ^2, будемъ имѣть

$$\left\{-1+(u_1)_0+\gamma_1\xi-\frac{1}{6}(u_1)_0^2-\frac{1}{3}(u_1)_0\gamma_1\xi\right\}+\left\{1-\frac{2}{3}(u_1)_0+\frac{1}{12}(u_1)_0^2\right\}(u_1)_0\xi=0.$$

Отсюда находимъ (см. уравненіе (95))

$$\gamma_1=-\frac{1-\frac{2}{3}(u_1)_0+\frac{1}{12}(u_1)_0^2}{1-\frac{1}{3}(u_1)_0}(u_1)_0.$$

Подставимъ теперь сюда значеніе $(u_1)_0$ изъ первой изъ формулъ (96), изъ которой слѣдуетъ, что

$$(u_1)_0^2=12-6\sqrt{3}.$$

Тогда

$$\gamma_1 = -\frac{1-\frac{2}{3}(3-\sqrt{3})+\frac{1}{12}(12-6\sqrt{3})}{1-\frac{1}{3}(3-\sqrt{3})}(3-\sqrt{3})$$

$$= -\frac{1-2+\frac{2}{3}\sqrt{3}+1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}(3-\sqrt{3})$$

$$= -\frac{\frac{1}{6}\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}(3-\sqrt{3})$$

или

$$\gamma_1 = -\frac{1}{2}(3-\sqrt{3}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (97)$$

Такимъ образомъ, мы получимъ окончательно

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= (3-\sqrt{3}) - \frac{1}{2}(3-\sqrt{3})\xi \\ \text{и} \quad u_2 &= (3+\sqrt{3}) - \frac{1}{2}(3+\sqrt{3})\xi \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (98)$$

Теперь остается только подставить эти величины u_1 и u_2 въ формулу (92).

Сдѣлаемъ всѣ необходимыя вычисленія для u_1. Соотвѣтствующія выраженія для u_2 получатся тогда простой замѣной $\sqrt{3}$ величиной $-\sqrt{3}$.

По формуламъ (92) и (86) найдемъ, пренебрегая членами порядка ξ^2,

$$\varphi_1 = \Psi(u_1)\left[1+\mu^2\frac{\Psi_1(u_1)}{\Psi(u_1)}\right] = \frac{k\theta_m}{n}e^{1-u_1}\cdot u_1^2\left[\omega_0(u_1)+\omega_1(u_1)u_1\xi\right]\left[1+\mu^2\frac{\Psi_1(u_1)}{\Psi(u_1)}\right].$$

Введемъ теперь такія обозначенія:

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= n\frac{\varphi_1}{\theta_m}\cdot\frac{1}{e^{1-u_1}\cdot u_1^2\left[\omega_0(u_1)+\omega_1(u_1)u_1\xi\right]} \\ \text{и} \quad \psi_1 &= \frac{\Psi_1(u_1)}{\Psi(u_1)}. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (99)$$

По аналогіи, положимъ для другого корня u_2,

$$\left.\begin{aligned} k_2 &= n\frac{\varphi_2}{\theta_m}\cdot\frac{1}{e^{1-u_2}u_2^2\left[\omega_0(u_2)+\omega_1(u_2)u_2\xi\right]} \\ \text{и} \quad \psi_2 &= \frac{\Psi_1(u_2)}{\Psi(u_2)}. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (100)$$

Тогда мы будемъ имѣть

и

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= k\,[1 + \mu^2\,\psi_1] \\ k_2 &= k\,[1 + \mu^2\,\psi_2] \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (101)$$

Если маятникъ поставленъ строго на границу апериодичности, т.-е., если $\mu^2 = 0$, то

$$k_1 = k_2 = k.$$

Найдемъ теперь выраженія для k_1 и ψ_1, пренебрегая членами порядка ξ^2.

Введемъ, для сокращенія, слѣдующее обозначеніе:

$$\chi_1 = e^{1-u_1}\,u_1^2\,[\omega_0\,(u_1) + \omega_1\,(u_1)\,u_1\,\xi],$$

и опредѣлимъ сначала выраженія отдѣльныхъ величинъ, входящихъ въ χ_1.

$$\begin{aligned} e^{1-u_1} &= e^{1-\left\{(3-\sqrt{3})-\frac{1}{2}(3-\sqrt{3})\xi\right\}} \\ &= e^{-2+\sqrt{3}}\,.\,e^{\left\{\frac{1}{2}(3-\sqrt{3})\right\}\xi} \end{aligned}$$

или

$$e^{1-u_1} = e^{-2+\sqrt{3}}\left[1 + \frac{1}{2}\,(3 - \sqrt{3})\,\xi\right] \dots\dots\dots (102)$$

Далѣе имѣемъ

$$u_1^2 = \left[(3 - \sqrt{3}) - \frac{1}{2}\,(3 - \sqrt{3})\,\xi\right]^2$$

или

$$u_1^2 = 6\,(2 - \sqrt{3})\,[1 - \xi] \dots\dots\dots\dots\dots (103)$$

Изъ формулъ-же (88) слѣдуетъ, что

$$\omega_0\,(u_1) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left\{(3 - \sqrt{3}) - \frac{1}{2}\,(3 - \sqrt{3})\,\xi\right\}$$

или

$$\omega_0\,(u_1) = -\frac{1}{6}\sqrt{3} - \frac{1}{12}\,(3 - \sqrt{3})\,\xi$$

и

$$\begin{aligned} \omega_1\,(u_1)\,u_1\,\xi &= \left\{\frac{1}{3} - \frac{1}{12}\Big((3 - \sqrt{3})\Big)\right\}\left\{(3 - \sqrt{3})\right\}\xi \\ &= (3 - \sqrt{3})\left\{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\sqrt{3}\right\}\xi \\ &= (3 - \sqrt{3})\left\{\Big(\frac{1}{12} + \frac{1}{12}\sqrt{3}\Big)\right\}\xi = \frac{1}{12}\,(3 + 3\sqrt{3} - \sqrt{3} - 3)\,\xi \end{aligned}$$

или

$$\omega_1(u_1)u_1\xi = \frac{1}{6}\sqrt{3}\,.\,\xi.$$

Такимъ образомъ, мы будемъ имѣть

$$\omega_0(u_1) + \omega_1(u_1)u_1\xi = -\frac{1}{6}\sqrt{3} - \frac{1}{12}(3-\sqrt{3})\xi + \frac{1}{6}\sqrt{3}\cdot\xi$$

или

$$\omega_0(u_1) + \omega_1(u_1)u_1\xi = -\frac{1}{6}\sqrt{3} + \frac{1}{4}(-1+\sqrt{3})\xi \; \ldots . (104)$$

Умножимъ теперь это уравненіе на выраженіе e^{1-u_1} изъ формулы (102).

$$e^{1-u_1}[\omega_0(u_1)+\omega_1(u_1)u_1\xi] = e^{-2+\sqrt{3}}\left[1+\frac{1}{2}(3-\sqrt{3})\xi\right]\left[-\frac{1}{6}\sqrt{3}+\frac{1}{4}(-1+\sqrt{3})\xi\right]$$

$$= e^{-2+\sqrt{3}}\left[-\frac{1}{6}\sqrt{3} - \frac{1}{12}\sqrt{3}(3-\sqrt{3})\xi + \frac{1}{4}(-1+\sqrt{3})\xi\right]$$

$$= e^{-2+\sqrt{3}}\left[-\frac{1}{6}\sqrt{3} + \left\{-\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{3}\right\}\xi\right] = -\frac{1}{6}\sqrt{3}\,.\,e^{-2+\sqrt{3}}.$$

Теперь остается только умножить это количество на u_1^2 изъ формулы (103).

Такимъ образомъ, мы получимъ

$$\chi_1 = -\frac{1}{6}\sqrt{3}\,.\,e^{-2+\sqrt{3}}\,.\,6\,(2-\sqrt{3})(1-\xi)$$

или

$$\chi_1 = -(2\sqrt{3}-3)\,.\,e^{-2+\sqrt{3}}(1-\xi).$$

Слѣдовательно,

$$k_1 = n\frac{\varphi_1}{\theta_m}\cdot\frac{1}{\chi_1} = -n\frac{\varphi_1}{\theta_m}\cdot\frac{e^{2-\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}-3}(1+\xi) \; \ldots\ldots\ldots . (105)$$

Найдемъ теперь выраженіе для ψ_1, ограничиваясь опять-таки членами порядка ξ.

На основаніи формулъ (99), (86), (87), (88) и (89) будемъ имѣть

$$\psi_1 = \frac{f_0(u_1) + f_1(u_1)u_1\xi}{\omega_0(u_1) + \omega_1(u_1)u_1\xi}.$$

Значеніе знаменателя въ этомъ выраженіи нами уже найдено (см. формулу (104)).

Составимъ теперь выраженіе для числителя.

На основаніи первой изъ формулъ (98)

$$u_1 = (3 - \sqrt{3})\left(1 - \frac{1}{2}\xi\right);$$

слѣдовательно,

$$u_1^2 = 6\,(2 - \sqrt{3})\,(1 - \xi)$$

и

$$u_1^3 = 6\,(9 - 5\sqrt{3})\left(1 - \frac{3}{2}\xi\right).$$

Подставимъ теперь эти величины въ выраженіе $f_0(u)$ (см. формулы (89)).

$$f_0(u_1) = \frac{1}{6} - \frac{2}{9}u_1 + \frac{1}{12}u_1^2 - \frac{1}{120}u_1^3$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{2}{9}(3-\sqrt{3})\left(1-\frac{1}{2}\xi\right) + \frac{1}{12}\cdot 6\,(2-\sqrt{3})\,(1-\xi) - \frac{1}{120}\cdot 6\,(9-5\sqrt{3})\left(1-\frac{3}{2}\xi\right)$$

$$= \left[\frac{1}{6} - \frac{2}{3} + \frac{2}{9}\sqrt{3} + 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{9}{20} + \frac{1}{4}\sqrt{3}\right]$$

$$+ \left[\frac{1}{9}(3 - \sqrt{3}) - \frac{1}{2}(2 - \sqrt{3}) + \frac{3}{40}(9 - 5\sqrt{3})\right]\xi$$

$$= \left[\frac{1}{20} - \frac{1}{36}\sqrt{3}\right] + \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{9}\sqrt{3} - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{27}{40} - \frac{3}{8}\sqrt{3}\right]\xi$$

или

$$f_0(u_1) = \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{36}\sqrt{3}\right) + \left(\frac{1}{120} + \frac{1}{72}\sqrt{3}\right)\xi.$$

Далѣе,

$$f_1(u_1)\,.\,u_1\xi = \left[-\frac{1}{9} + \frac{1}{9}u_1 - \frac{1}{30}u_1^2 + \frac{1}{360}u_1^3\right]u_1\xi$$

$$= \left[-\frac{1}{9} + \frac{1}{9}(3-\sqrt{3}) - \frac{1}{30}\cdot 6\,(2-\sqrt{3}) + \frac{1}{360}\cdot 6\,(9-5\sqrt{3})\right]\left[3-\sqrt{3}\right]\xi$$

$$= \left[-\frac{1}{9} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\sqrt{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\sqrt{3} + \frac{3}{20} - \frac{1}{12}\sqrt{3}\right]\left[3 - \sqrt{3}\right]\xi$$

$$= \left[-\frac{1}{36} + \frac{1}{180}\sqrt{3}\right]\left[3 - \sqrt{3}\right]\xi = \frac{1}{180}\left[-5 + \sqrt{3}\right]\left[3 - \sqrt{3}\right]\xi$$

$$= \frac{1}{180}\left[-15 + 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 3\right]\xi = \frac{1}{180}\left[-18 + 8\sqrt{3}\right]\xi = \left[-\frac{1}{10} + \frac{2}{45}\sqrt{3}\right]\xi.$$

Такимъ образомъ,

$$f_0(u_1)+f_1(u_1)u_1\xi=\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{36}\sqrt{3}\right)+\left(\frac{1}{120}+\frac{1}{72}\sqrt{3}\right)\xi+\left(-\frac{1}{10}+\frac{2}{45}\sqrt{3}\right)\xi$$

$$=\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{36}\sqrt{3}\right)+\left(-\frac{11}{120}+\frac{7}{120}\sqrt{3}\right)\xi=\frac{1}{180}(9-5\sqrt{3})$$

$$+\frac{1}{120}(-11+7\sqrt{3})\,\xi=\frac{1}{180}(9-5\sqrt{3})\left[1+\frac{\frac{1}{120}(-11+7\sqrt{3})}{\frac{1}{180}(9-5\sqrt{3})}\xi\right]$$

$$=\frac{1}{180}(9-5\sqrt{3})\left[1+\frac{3}{2}\cdot\frac{(-11+7\sqrt{3})(9+5\sqrt{3})}{(9-5\sqrt{3})(9+5\sqrt{3})}\xi\right]$$

$$=\frac{1}{180}(9-5\sqrt{3})\left[1+\frac{3}{2}\cdot\frac{-99+63\sqrt{3}-55\sqrt{3}+105}{81-75}\xi\right]$$

$$=\frac{1}{180}(9-5\sqrt{3})\left[1+\frac{3}{2}\cdot\frac{6+8\sqrt{3}}{6}\xi\right]$$

$$=\frac{1}{180}(9-5\sqrt{3})\left[1+\frac{1}{2}(3+4\sqrt{3})\,\xi\right].$$

Съ другой-же стороны, по формулѣ (104),

$$\omega_0(u_1)+\omega_1(u_1)u_1\xi=-\frac{1}{6}\sqrt{3}\left[1-\frac{\frac{1}{4}(-1+\sqrt{3})}{\frac{1}{6}\sqrt{3}}\xi\right]$$

$$=-\frac{1}{6}\sqrt{3}\left[1-\frac{3}{2}\cdot\frac{-\sqrt{3}+3}{3}\xi\right]$$

$$=-\frac{1}{6}\sqrt{3}\left[1-\frac{1}{2}(3-\sqrt{3})\,\xi\right].$$

Слѣдовательно,

$$\psi_1=\frac{f_0(u_1)+f_1(u_1)u_1\xi}{\omega_0(u_1)+\omega_1(u_1)u_1\xi}=\frac{\frac{1}{180}(9-5\sqrt{3})}{-\frac{1}{6}\sqrt{3}}\left[1+\frac{1}{2}(3+4\sqrt{3})\,\xi\right]\left[1+\frac{1}{2}(3-\sqrt{3})\,\xi\right]$$

$$=-\frac{1}{30}\cdot\frac{9\sqrt{3}-15}{3}\cdot\left[1+\frac{1}{2}\{3+4\sqrt{3}+3-\sqrt{3}\}\,\xi\right]$$

или

$$\psi_1=\frac{1}{30}(5-3\sqrt{3})\left[1+\frac{3}{2}(2+\sqrt{3})\,\xi\right]\quad\ldots\ldots.(106)$$

Такимъ образомъ, формула (105) даетъ намъ выраженіе k_1, а фор-

мула (106) выраженіе ψ_1. На основаніи этихъ соотношеній, подставляя, вмѣсто $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, мы получимъ тотчасъ-же соотвѣтствующія выраженія для k_2 и ψ_2, а именно

$$k_2 = n\frac{\varphi_2}{\theta_m}\cdot\frac{e^{2+\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}+3}(1+\xi) \qquad \text{(107)}$$

и

$$\psi_2 = \frac{1}{30}(5+3\sqrt{3})\left[1+\frac{3}{2}(2-\sqrt{3})\xi\right] \qquad \text{(108)}$$

Обратимся теперь къ формуламъ (101).

Если маятникъ поставленъ строго на границу аперіодичности, то $\mu^2=0$ и

$$k_1 = k_2 = k,$$

причемъ мы условились считать переводный множитель k всегда величиной положительной.

По формулѣ-же (105) оказывается, что $k_1 < 0$, а, по формулѣ (107), $k_2 > 0$. Произошло это оттого, что въ первую формулу входитъ уголъ φ_1, а во вторую φ_2, причемъ, по существу дѣла, эти углы должны быть съ противоположными знаками. Но, такъ какъ мы условились подъ φ_1 и φ_2 подразумѣвать всегда *абсолютныя значенія* максимальныхъ угловъ отклоненія гальванометра, то въ формулѣ (105) можно знакъ (—) просто опустить.

Если-бы мы произвели всѣ вычисленія, сохраняя члены порядка ξ^2, то получили-бы слѣдующія окончательныя выраженія:

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= n\frac{\varphi_1}{\theta_m}\cdot\frac{e^{2-\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}-3}\left[1+\xi+\frac{5-\sqrt{3}}{20}\xi^2\right] = n\frac{\varphi_1}{\theta_m}\cdot 2{,}8168\,[1+\xi+0{,}16340\xi^2] \\ k_2 &= n\frac{\varphi_2}{\theta_m}\cdot\frac{e^{2+\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}+3}\left[1+\xi+\frac{5+\sqrt{3}}{20}\xi^2\right] = n\frac{\varphi_2}{\theta_m}\cdot 6{,}4610\,[1+\xi+0{,}33660\xi^2] \end{aligned}\right\} \ldots\text{(109)}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{30}(5-3\sqrt{3})\left[1+\frac{3}{2}(2+\sqrt{3})\xi+\frac{1}{280}(129+177\sqrt{3})\xi^2\right] \\ \psi_2 &= \frac{1}{30}(5+3\sqrt{3})\left[1+\frac{3}{2}(2-\sqrt{3})\xi+\frac{1}{280}(129-177\sqrt{3})\xi^2\right] \end{aligned}\right\} \ldots\text{(110)}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= -0{,}0065377\,[1+5{,}5981\,\xi+1{,}5556\,\xi^2] \\ \psi_2 &= \quad 0{,}33988\,[1+0{,}40192\,\xi-0{,}63417\,\xi^2] \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\text{(111)}$$

Мы видимъ, такимъ образомъ, что, для малыхъ значеній ξ, которыя могутъ быть или положительными, или отрицательными, $\psi_1 < 0$, а $\psi_2 > 0$.

Введемъ еще слѣдующія обозначенія:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= 2{,}8168\,[1 + \xi + 0{,}16340\,\xi^2] \\ \text{и} \qquad F_2 &= 6{,}4610\,[1 + \xi + 0{,}33660\,\xi^2] \end{aligned}\right\} \qquad (112)$$

Тогда мы будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= n\,\frac{\varphi_1}{\theta_m}\cdot F_1 \\ \text{и} \qquad k_2 &= n\,\frac{\varphi_2}{\theta_m}\;F_2 \end{aligned}\right\} \qquad (113)$$

ψ_1, ψ_2, F_1 и F_2 суть нѣкоторыя, вполнѣ опредѣленныя, функціи отъ ξ.

Величины $\mathrm{Log}\,\psi_1$ и $\mathrm{Log}\,\psi_2$ даны въ таблицѣ XI, а $\mathrm{Log}\,F_1$ и $\mathrm{Log}\,F_2$ въ таблицѣ XVI Сборника сейсмометрическихъ таблицъ. Аргументъ ξ мѣняется при этомъ отъ $-0{,}15$ до $+0{,}15$ черезъ каждую сотую.

Комбинируя формулы (101) и (113), получимъ

$$k(1 + \mu^2\psi_1) = \frac{n}{\theta_m}\cdot\varphi_1 F_1$$

$$k(1 + \mu^2\psi_2) = \frac{n}{\theta_m}\cdot\varphi_2 F_2.$$

Раздѣливъ одно выраженіе на другое, будемъ имѣть

$$\frac{1 + \mu^2\psi_1}{1 + \mu^2\psi_2} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}\cdot\frac{F_1}{F_2}$$

или

$$\frac{F_2}{F_1} + \mu^2\,\frac{F_2}{F_1}\,\psi_1 = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} + \mu^2\,\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\,\psi_2.$$

Введемъ теперь еще слѣдующія два обозначенія:

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \alpha \qquad (114)$$

и

$$\frac{F_2}{F_1} = \beta, \qquad (115)$$

гдѣ α есть отношеніе абсолютныхъ величинъ двухъ максимальныхъ угловъ отклоненія гальванометра; эта величина получается непосредственно изъ опыта, для чего требуется всего только нѣсколько секундъ времени.

Тогда мы будемъ имѣть

$$\beta + \mu^2 \beta \psi_1 = \alpha + \mu^2 \alpha \psi_2$$

или, окончательно,

$$\mu^2 = \frac{\beta - \alpha}{\alpha\psi_2 - \beta\psi_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (116)$$

Это одна изъ наиболѣе важныхъ формулъ во всей этой теоріи.

ψ_1 въ абсолютной своей величинѣ значительно меньше ψ_2 (см. формулы (111)), да, кромѣ того, ψ_1 отрицательно; слѣдовательно, знаменатель въ этомъ выраженіи не можетъ обратиться въ нуль.

Остается теперь только найти выраженіе для β.

На основаніи обозначеній (115) и формулъ (112), будемъ имѣть

$$\beta = 2{,}2937\,[1 + 0{,}1732\xi^2] \ldots\ldots\ldots\ldots (117)$$

Такъ какъ эта формула не содержитъ ξ въ первой степени, то для данныхъ предѣловъ для ξ, β мѣняется очень мало, а именно,

при $\xi = \pm 0{,}15$, $\beta = 2{,}3026$,

а, при $\xi = 0$, $\beta = 2{,}2937$.

Это критическое значеніе $\beta = 2{,}2937$ можетъ, согласно формуламъ (112) и (109), быть представлено еще слѣдующимъ образомъ.

При $\xi = 0$,

$$\beta = \frac{e^{2+\sqrt{3}}}{e^{2-\sqrt{3}}} \cdot \frac{2\sqrt{3}-3}{2\sqrt{3}+3} = e^{2\sqrt{3}} \cdot \frac{(2\sqrt{3}-3)(2\sqrt{3}-3)}{(2\sqrt{3}+3)(2\sqrt{3}-3)} =$$

$$= e^{2\sqrt{3}} \frac{(12 - 12\sqrt{3} + 9)}{12-9} = e^{2\sqrt{3}}\left(7 - 4\sqrt{3}\right).$$

Если маятникъ предварительно установленъ на періодъ гальванометра, то формула (116) даетъ тотчасъ-же чрезвычайно простой критерій для сужденія о томъ, насколько маятникъ близокъ къ границѣ апперіодичности.

Если полученная изъ опыта величина $\alpha < \beta$, то $\mu^2 > 0$ и граница апеpіодичности еще не достигнута; если $\alpha > \beta$, то $\mu^2 < 0$ и граница апеpіодичности уже перейдена. Если $\alpha = \beta$, то маятникъ точно установленъ на границу апеpіодичности.

Этимъ можно воспользоваться, чтобы очень скоро установить маятникъ довольно точно на границу апеліодичности, для чего надо только соотвѣтственно измѣнять разстояніе между полюсами магнитовъ у мѣдной пластинки.

Интересно отмѣтить, что формула (116) сохраняетъ свою силу и для *любого типа* сейсмографа, и ею можно всегда пользоваться для опредѣленія коэффиціента μ^2, когда затуханіе очень сильное. Единственно, что для этого требуется, это то, чтобы соотвѣтствующій сейсмографъ былъ соединенъ съ гальванометромъ, установленнымъ на границу апеліодичности, и чтобы собственные періоды сейсмографа и гальванометра (безъ затуханія) мало отличались другъ отъ друга.

Въ таблицѣ X Сборника сейсмометрическихъ таблицъ даны величины β и $\beta\psi_1$, входящія въ формулу (116), для различныхъ значеній ξ, отъ $\xi = -0{,}15$ до $\xi = +0{,}15$.

Зная величину ξ, можно, слѣдовательно, по формулѣ (116), очень просто опредѣлить постоянную затуханія μ^2.

Но величина ξ намъ только приближенно извѣстна, по періоду маятника, опредѣленному при слабомъ затуханіи (см. формулу (58)).

$$\xi = \frac{n_1 - n}{n} = \frac{T - T_1}{T_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (58)$$

Теперь надо найти точную величину ξ, а затѣмъ и величину

$$n = \frac{n_1}{1+\xi}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (118)$$

когда магниты уже сближены между собою и самъ маятникъ находится вблизи границы апеліодичности.

Для этого служитъ, опредѣленный изъ опыта, промежутокъ времени t_0, протекшій отъ начала движенія гальванометра до момента его прохожденія черезъ положеніе равновѣсія.

Положивши, согласно обозначенію (65),

$$u_0 = nt_0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (119)$$

останется только найти значеніе u_0, при которомъ φ обращается въ нуль. Тогда мы получимъ уравненіе, связывающее u_0, ξ и μ^2.

Обращаясь къ формуламъ (85), (86), (87) и ограничиваясь членами порядка ξ, мы видимъ, что u_0 должно быть корнемъ слѣдующаго уравненія:

$$\omega_0(u) + \omega_1(u)\,u\xi + \mu^2\{f_0(u) + f_1(u)\,u\xi\} = 0 \quad \ldots\ldots (120)$$

Для нахожденія u_0, мы примѣнимъ опять способъ послѣдовательныхъ приближеній.

Полагая сначала $\mu^2 = 0$, будемъ имѣть

$$\omega_0(u) + \omega_1(u)\,u\,\xi = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (121)$$

Приближенный корень $(u_0)_0$ этого уравненія получится изъ соотношенія (см. первую изъ формулъ (88))

$$\omega_0(u) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}u = 0.$$

Слѣдовательно,

$$(u_0)_0 = 3.$$

Для второго приближенія $(u_0)_1$ мы можемъ положить

$$(u_0)_1 = 3 + \gamma_1 \xi.$$

Подставляя это выраженіе въ формулу (121), получимъ

$$\omega_0(3 + \gamma_1\xi) + \omega_1(3)\,.\,3\xi = 0$$

или

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}(3 + \gamma_1\xi) + 3\left\{\frac{1}{3} - \frac{1}{12}\cdot 3\right\}\xi$$

$$= \frac{1}{6}\gamma_1\xi + \frac{1}{4}\xi = 0,$$

или

$$\gamma_1 = -\frac{3}{2}.$$

Слѣдовательно,

$$(u_0)_1 = 3\left(1 - \frac{1}{2}\xi\right).$$

Теперь положимъ

$$u_0 = (u_0)_1 + \delta\mu^2$$

и подставимъ это выраженіе въ формулу (120).

$$\omega_0\left((u_0)_1 + \delta\mu^2\right) + \omega_1(3 + \delta\mu^2)\,.\,(3 + \delta\mu^2)\xi + \mu^2\left[f_0\left((u_0)_1\right) + f_1(3)\,.\,3\xi\right] = 0.$$

Далѣе мы имѣемъ:

$$\omega_0\left((u_0)_1 + \delta\mu^2\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left\{3\left(1 - \frac{1}{2}\xi\right) + \delta\mu^2\right\} = -\frac{1}{4}\xi + \frac{1}{6}\delta\mu^2,$$

$$\omega_1(3 + \delta\mu^2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12}(3 + \delta\mu^2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12}\delta\mu^2 = \frac{1}{12} - \frac{1}{12}\delta\mu^2,$$

$$\omega_1(3 + \delta\mu^2)\,.\,(3 + \delta\mu^2) = \frac{1}{12}(1 - \delta\mu^2)(3 + \delta\mu^2) = \frac{1}{12}(3 - 2\delta\mu^2).$$

Слѣдовательно,

$$\omega_0((u_0)_1 + \delta\mu^2) + \omega_1(3 + \delta\mu^2).(3 + \delta\mu^2).\xi = -\frac{1}{4}\xi + \frac{1}{6}\delta\mu^2 +$$

$$+ \frac{1}{4}\xi - \frac{1}{6}\delta\mu^2\xi = \frac{1}{6}\delta\mu^2(1 - \xi).$$

Съ другой стороны,

$$f_0((u_0)_1) = \frac{1}{6} - \frac{2}{9}\cdot 3\left(1 - \frac{1}{2}\xi\right) + \frac{1}{12}\left\{3\left(1 - \frac{1}{2}\xi\right)\right\}^2 - \frac{1}{120}\left\{3\left(1 - \frac{1}{2}\xi\right)\right\}^3 =$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\xi\right) + \frac{3}{4}(1 - \xi) - \frac{9}{40}\left(1 - \frac{3}{2}\xi\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{9}{40}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{27}{80}\right)\xi = \frac{1}{40} - \frac{19}{240}\xi.$$

$$f_1(3) = -\frac{1}{9} + \frac{1}{3} - \frac{9}{30} + \frac{27}{360} = -\frac{1}{9} + \frac{1}{3} - \frac{3}{10} + \frac{3}{40} = -\frac{1}{360}.$$

Слѣдовательно,

$$f_0((u_0)_1) + f_1(3).3\xi = \frac{1}{40} - \frac{19}{240}\xi - \frac{1}{120}\xi = \frac{1}{40} - \frac{7}{80}\xi = \frac{1}{80}[2 - 7\xi].$$

Подставивъ теперь найденныя выраженія въ предыдущее уравненіе, получимъ

$$\frac{1}{6}\delta\mu^2(1 - \xi) + \frac{1}{80}(2 - 7\xi)\mu^2 = 0.$$

Отсюда находимъ

$$\delta = -\frac{3}{40}\cdot\frac{2 - 7\xi}{1 - \xi} = -\frac{3}{40}\cdot(2 - 7\xi)(1 + \xi)$$

$$= -\frac{3}{40}(2 - 7\xi + 2\xi) = -\frac{3}{40}(2 - 5\xi).$$

Итакъ,

$$u_0 = 3\left(1 - \frac{1}{2}\xi\right) - \frac{3}{40}(2 - 5\xi)\mu^2$$

или

$$u_0 = 3\left[1 - \frac{1}{2}\xi\right] - \frac{3}{20}\left[1 - \frac{5}{2}\xi\right]\mu^2.$$

Если-бы мы произвели вычисленія, сохраняя члены порядка ξ^2, то получили-бы

$$u_0 = 3\left[1 - \frac{1}{2}\xi + \frac{2}{5}\xi^2\right] - \frac{3}{20}\left[1 - \frac{5}{2}\xi + \frac{183}{70}\xi^2\right]\mu^2 \ldots (122)$$

Введемъ теперь слѣдующія обозначенія:

и

$$\left.\begin{aligned} B_0 &= 3\left[1 - \frac{1}{2}\xi + \frac{2}{5}\xi^2\right] \\ B_2 &= \frac{3}{20}\left[1 - \frac{5}{2}\xi + \frac{183}{70}\xi^2\right] \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (123)$$

Тогда

$$u_0 = B_0 - B_2\mu^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (124)$$

B_0 и B_2 суть также двѣ вполнѣ опредѣленныя функціи отъ ξ.

Въ таблицѣ XII Сборника сейсмометрическихъ таблицъ даны величины B_0 и $\operatorname{Log} B_2$ для разныхъ значеній ξ, отъ $\xi = -0{,}15$ до $\xi = +0{,}15$.

Преобразуемъ теперь нѣсколько формулу (122).

Согласно формуламъ (119) и (118), мы будемъ имѣть

$$u_0 = \frac{n_1 t_0}{1 + \xi},$$

гдѣ n_1 есть величина извѣстная изъ собственнаго періода колебаній гальванометра (безъ затуханія) T_1.

Подставимъ это значеніе u_0 въ формулу (122).

Тогда

$$n_1 t_0 = 3\left[1 - \frac{1}{2}\xi + \frac{2}{5}\xi^2\right][1 + \xi] - \frac{3}{20}\left[1 - \frac{5}{2}\xi + \frac{183}{70}\xi^2\right][1 + \xi]\mu^2 =$$

$$= 3\left[1 - \frac{1}{2}\xi + \frac{2}{5}\xi^2 + \xi - \frac{1}{2}\xi^2\right] - \frac{3}{20}\left[1 - \frac{5}{2}\xi + \frac{183}{70}\xi^2 + \xi - \frac{5}{2}\xi^2\right]\mu^2 =$$

$$= 3\left[1 + \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{10}\xi^2\right] - \frac{3}{20}\left[1 - \frac{3}{2}\xi + \frac{4}{35}\xi^2\right]\mu^2$$

или

$$n_1 t_0 = \{3 - 0{,}15\mu^2\} + \{1{,}5 + 0{,}225\mu^2\}\xi - \{0{,}3 + 0{,}0171\mu^2\}\xi^2.$$

Введемъ въ заключеніе слѣдующія три послѣднія обозначенія:

$$\left.\begin{aligned} a &= 3 - 0{,}15\,\mu^2 \\ b &= 1{,}5 + 0{,}225\,\mu^2 \\ c &= 0{,}3 + 0{,}0171\,\mu^2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (125)$$

Тогда

$$\xi = \frac{n_1 t_0 - a + c\,\xi^2}{b} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (126)$$

Въ Сборникѣ сейсмометрическихъ таблицъ даны въ таблицѣ XIII величины a, а въ таблицѣ XIV величины Log b, для различныхъ значеній μ^2 отъ $-0{,}100$ до $+0{,}200$ черезъ каждыя тысячныя доли μ^2. Въ таблицѣ XV даны величины $c\xi^2$ для различныхъ значеній ξ, отъ 0 до $\pm 0{,}15$. Хотя c и есть функція отъ μ^2, но въ этой таблицѣ μ^2 не входитъ вторымъ аргументомъ, такъ какъ, въ предѣлахъ отъ $\mu^2 = -0{,}10$ до $\mu^2 = +0{,}20$, величина $c\xi^2$, съ точностью до единицы третьяго десятичнаго знака, съ каковой точностью и надо только опредѣлять $c\xi^2$, не зависитъ вовсе отъ величины μ^2. Наибольшее значеніе $c\xi^2$, при $\xi = \pm 0{,}15$, составляетъ всего только 0,007.

Мы получили, такимъ образомъ, всѣ необходимыя формулы; посмотримъ-же теперь какъ ими воспользоваться для опредѣленія трехъ постоянныхъ сейсмографа μ^2, T и k.

Основаніемъ для опредѣленія μ^2 и T служатъ формулы (125) и (126) и ранѣе выведенная формула (116):

$$\mu^2 = \frac{\beta - \alpha}{\alpha\psi_2 - \beta\psi_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (116)$$

Наблюденія даютъ намъ непосредственно α и t_0, а, такъ какъ для гальванометра n_1 извѣстно, то будемъ знать и $n_1 t_0$.

Сначала стараются поставить маятникъ, по возможности, близко къ границѣ апеpіодичности, мѣняя разстояніе между полюсами магнитовъ у мѣдной пластинки, и подгоняя величину α близко къ β.

Въ формулѣ (116) ψ_1, ψ_2 и β суть нѣкоторыя функціи отъ ξ (см. формулы (111) и (117)). Хотя точная величина ξ еще не извѣстна, но, для установки маятника на границу апеpіодичности, можно вполнѣ довольствоваться приближеннымъ значеніемъ ξ.

Дѣйствительно, легко видѣть изъ слѣдующей таблицы VIII, гдѣ приведены величины α для нѣкоторыхъ значеній μ^2 и ξ, что величины α, соотвѣтствующія опредѣленному μ^2, весьма мало зависятъ отъ ξ.

Эти величины α вычислены по слѣдующей формулѣ:

$$\alpha = \beta \cdot \frac{1 + \mu^2 \psi_1}{1 + \mu^2 \psi_2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (127)$$

которая вытекаетъ непосредственно изъ уравненія (116).

Для μ^2 взяты слѣдующія 7 значеній: $-0{,}10$, $-0{,}05$, 0, $+0{,}05$, $+0{,}10$, $+0{,}15$ и $+0{,}20$, а для ξ 3 значенія: $-0{,}10$, 0 и $+0{,}10$.

Величины α округлены при этомъ до одной единицы второго десятичнаго знака.

Таблица VIII.

Значенія $\alpha = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$

μ^2	$\xi = -0{,}10$	$\xi = 0$	$\xi = +0{,}10$
— 0,10	2,38	2,38	2,38
— 0,05	2,34	2,33	2,34
0	2,30	2,29	2,30
+ 0,05	2,26	2,25	2,26
+ 0,10	2,23	2,22	2,22
+ 0,15	2,19	2,18	2,18
+ 0,20	2,16	2,14	2,14

При помощи этой таблицы, очень легко, зная величину α, оріентироваться въ томъ, насколько маятникъ близокъ къ границѣ апе़ріодичности, такъ какъ, не зная даже точной величины ξ, можно получить довольно надежную величину μ^2. На практикѣ надо всегда стремиться къ тому, чтобы α было равно 2,29 — 2,30. Это то критическое число, которое свидѣтельствуетъ о границѣ аперіодичности.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что довольно точная установка сейсмографа на границу аперіодичности не представляетъ, при примѣненіи вышеописаннаго пріема, никакихъ практическихъ затрудненій.

Когда это достигнуто, то можно уже приступить къ точному опредѣленію μ^2 и T.

Сначала опредѣляютъ μ^2 и ξ, а потомъ уже, по извѣстной величинѣ ξ, находятъ, по формулѣ (118), величину n

$$n = \frac{n_1}{1+\xi} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (118)$$

Зная n, найдемъ тотчасъ-же и T, по формулѣ

$$T = \frac{2\pi}{n} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (128)$$

Для опредѣленія μ^2 и ξ служатъ уравненія (116) и (126), въ которыя эти величины входятъ какъ неизвѣстныя; извѣстными-же величинами являются α и $n_1 t_0$.

Опредѣленіе неизвѣстныхъ μ^2 и ξ изъ этихъ уравненій производится также по методу послѣдовательныхъ приближеній, который очень просто и быстро приводитъ къ цѣли.

Сначала полагаютъ $\xi = 0$; затѣмъ, по извѣстной величинѣ α, опредѣляютъ по формулѣ (116) соотвѣтствующее значеніе μ^2, пользуясь при этомъ таблицами X и XI, изъ которыхъ выбираютъ величины β, $\beta\psi_1$ и $\operatorname{Log}\psi_2$.

Съ этимъ первымъ, приближеннымъ значеніемъ μ^2 опредѣляютъ по таблицамъ XIII и XIV (см. формулы (125)) величины a и $\operatorname{Log}\frac{1}{b}$, а затѣмъ вычисляютъ величину ξ по формулѣ (126).

Для этой цѣли пренебрегаютъ сначала членомъ $c\xi^2$ и опредѣляютъ приближенное значеніе ξ по формулѣ

$$\xi = \frac{n_1 t_0 - a}{b}.$$

Съ этимъ значеніемъ ξ выбираютъ изъ таблицы XV поправку $c\xi^2$, а затѣмъ уже вычисляютъ ξ по болѣе точной формулѣ

$$\xi = \frac{n_1 t_0 - a + c\,\xi^2}{b}.$$

Поправка $c\xi^2$, въ виду ея малости, имѣетъ совершенно второстепенное значеніе.

Получивши ξ, повторяютъ съ этой новой величиной всѣ предыдущія операціи, т.-е. опредѣляютъ, по формулѣ (116), второе значеніе для μ^2, и съ этимъ новымъ μ^2, по формулѣ (126), слѣдующее значеніе для ξ и т. д.

Въ виду малости μ^2 и ξ, предыдущія выраженія обладаютъ большою сходимостью, такъ что обыкновенно уже вторыя значенія μ^2 и ξ бываютъ окончательными.

Опредѣливши ξ, найдемъ, по формулѣ (118), величину n, а затѣмъ, по формулѣ (128), и искомую величину собственнаго періода колебаній маятника (безъ затуханія) T.

При этихъ опредѣленіяхъ не ограничиваются, конечно, единичнымъ опредѣленіемъ α и t_0, а производятъ цѣлый рядъ такихъ измѣреній (напр. 10), и изъ полученныхъ величинъ берутъ затѣмъ среднее, причемъ величина $\alpha = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ опредѣляется, согласно выраженіямъ (56), по формулѣ

$$\alpha = \frac{m_1 - \Delta m_1}{m_2 - \Delta m_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (129)$$

Для контроля можно еще воспользоваться формулой (124).

По извѣстной величинѣ ξ, опредѣляютъ, по таблицѣ XII, величины B_0 и $\operatorname{Log} B_2$, и, зная еще величину μ^2, находятъ, по формулѣ (124), соотвѣтствующее значеніе u_0.

Тогда, по формулѣ (119), найдемъ величину

$$n = \frac{u_0}{t_0}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (130)$$

а отсюда уже, по формулѣ (128), и величину T.

Чтобы лучше оріентироваться въ этихъ вопросахъ, опредѣлимъ еще зависимость между T и t_0.

Изъ формулъ (128) и (130) слѣдуетъ, что

$$T = \frac{2\pi}{u_0} \cdot t_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (131)$$

Величина u_0 зависитъ отъ μ^2 и ξ (см. формулы (123) и (124)).

Въ слѣдующей таблицѣ IX приведены величины множителя $\frac{2\pi}{u_0}$ для нѣкоторыхъ опредѣленныхъ значеній μ^2 и ξ.

Таблица IX.

Значенія $\frac{2\pi}{u_0}$.

μ^2	$\xi = -0{,}10$	$\xi = 0$	$\xi = +0{,}10$
— 0,10	1,975	2,034	2,187
— 0,05	1,981	2,089	2,191
0	1,987	2,094	2,195
+ 0,05	1,993	2,100	2,200
+ 0,10	1,999	2,105	2,204
+ 0,15	2,005	2,110	2,209
+ 0,20	2,011	2,116	2,213

Мы видимъ, такимъ образомъ, что T, примѣрно, въ два раза больше t_0.

Опредѣливши двѣ постоянныя сейсмографа μ^2 и T, посмотримъ теперь, какъ опредѣляется величина переводнаго множителя k.

На основаніи отсчетовъ по шкаламъ m, m_1 и m_2, находятъ, на основаніи соотношеній (55) и (56), величины

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varphi_1}{\theta_m} &= \frac{D}{D_1}\cdot\frac{m_1 - \Delta m_1}{m} \\ \text{и} \quad \frac{\varphi_2}{\theta_m} &= \frac{D}{D_1}\cdot\frac{m_2 - \Delta m_2}{m} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (132)$$

Эти величины опредѣляются также какъ среднія изъ цѣлаго ряда отдѣльныхъ наблюденій.

По формуламъ (113) мы имѣли

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= n\frac{\varphi_1}{\theta_m}\cdot F_1 \\ k_2 &= n\frac{\varphi_2}{\theta_m}\cdot F_2 \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (113)$$

Въ этихъ формулахъ точная величина n теперь уже извѣстна, а величины $\operatorname{Log} F_1$ и $\operatorname{Log} F_2$ выбираются изъ таблицы XVI, по извѣстному уже аргументу ξ. Такимъ образомъ, мы можемъ вычислить величины k_1 и k_2.

Далѣе изъ формулъ (101) слѣдуетъ, что

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{k_1}{1+\mu^2\psi_1} \\ \text{и} \quad k &= \frac{k_2}{1+\mu^2\psi_2} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (133)$$

Въ этихъ послѣднихъ формулахъ k_1, k_2 и μ^2 извѣстны, а $\operatorname{Log}\psi_1$ и $\operatorname{Log}\psi_2$ опредѣляются, по аргументу ξ, изъ таблицы XI.

Такъ какъ ψ_1 очень мало, то истинная величина k очень мало отличается отъ k_1.

Формулы (101) или (133) показываютъ, что, въ виду того, что $\psi_1 < 0$, а $\psi_2 > 0$, то, при $\mu^2 > 0$, $k_2 > k_1$, а, при $\mu^2 < 0$, т.-е. когда граница апе077ріодичности перейдена, $k_2 < k_1$.

Для опредѣленія k достаточно-бы было воспользоваться одной изъ формулъ (133); другая можетъ служить, однако, для контроля.

Величина k зависитъ отъ разстоянія H_1 между полюсами магнитовъ у индукціонныхъ катушекъ. Поэтому, при опредѣленіи постоянныхъ сейсмографа, надо сначала установить H_1 соотвѣтственно требуемой величинѣ k, а потомъ уже, мѣняя разстояніе H между полюсами магнитовъ у мѣдной

пластинки и не трогая болѣе H_1, поставить маятникъ по возможности точно на границу аперіодичности.

Этотъ способъ опредѣленія постоянныхъ μ^2, T и k можно примѣнить къ разнымъ другимъ типамъ сейсмографовъ, при условіи примѣненія гальванометрическаго метода регистраціи.

Теорія этого способа нѣсколько сложна, но самыя наблюденія отличаются чрезвычайной простотой, причемъ всѣ вычисленія производятся, если только пользоваться вышеуказанными таблицами, очень быстро.

Для сейсмометрическихъ цѣлей, имѣя въ виду обработку сейсмограммъ, достаточно знать величины періодовъ T и T_1 съ точностью до 0,1 секунды, k къ точностью до единицы перваго десятичнаго знака, а μ^2 съ точностью до единицы второго или уже, въ крайнемъ случаѣ, третьяго десятичнаго знака.

Въ поясненіе всего вышеизложеннаго, приведемъ численный примѣръ опредѣленія постоянныхъ μ^2, T и k. Примѣръ этотъ относится къ маятнику № IV и гальванометру № VI, установленнымъ въ Парижѣ; предварительное-же опредѣленіе постоянныхъ этого сейсмографа было произведено въ Петербургѣ въ Физической Лабораторіи Академіи Наукъ. Условія наблюденій въ Петербургѣ очень неблагопріятны въ виду различныхъ сотрясеній зданія отъ уличной ѣзды. Если-бы произвести наблюденія въ болѣе спокойномъ мѣстѣ, то несомнѣнно получилось-бы лучшее согласіе между отдѣльными величинами α.

Данныя.

Разстояніе полюсовъ магнитовъ у индукціонныхъ катушекъ

$$H_1 = 10{,}0\ {}^{\text{м}}/_{\text{м}}.$$

Разстояніе полюсовъ магнитовъ у мѣдной пластинки

$$H = 15{,}0\ {}^{\text{м}}/_{\text{м}}.$$

Собственный періодъ гальванометра (безъ затуханія) $T_1 = 24{,}68$ с.

$$n_1 = \frac{2\pi}{T_1} = 0{,}2546$$

$$D = 7777\ {}^{\text{м}}/_{\text{м}}$$

$$D_1 = 1000\ {}^{\text{м}}/_{\text{м}}.$$

Въ слѣдующей таблицѣ приведены уже исправленные отсчеты $m_1 - \Delta m_1$ и $m_2 - \Delta m_2$ (см. таблицу VIII Сборника сейсмометрическихъ таблицъ).

$m_1-\Delta m_1$	$m_2-\Delta m_2$	m	Log $(m_1-\Delta m_1)$	Log $(m_2-\Delta m_2)$	Log m	Log α	Log $\frac{m_1-\Delta m_1}{m}$	Log $\frac{m_2-\Delta m_2}{m}$
223,1 м/м	96,1 м/м	27,8 м/м	2,3485	1,9827	1,4440	0,3658	0,9045	0,5387
274,0	116,7	33,8	2,4378	2,0671	1,5289	0,3707	0,9089	0,5382
195,4	78,8	23,7	2,2909	1,8965	1,3747	0,3944	0,9162	0,5218
283,0	123,4	34,5	2,4518	2,0913	1,5378	0,3605	0,9140	0,5535
270,8	112,5	33,5	2,4327	2,0512	1,5250	0,3815	0,9077	0,5262
315,4	136,2	39,0	2,4989	2,1342	1,5911	0,3647	0,9078	0,5431
256,3	110,5	31,7	2,4088	2,0434	1,5011	0,3654	0,9077	0,5423
169,3	71,2	21,3	2,2287	1,8525	1,3284	0,3762	0,9003	0,5241
298,5	127,3	37,0	2,4749	2,1048	1,5682	0,3701	0,9067	0,5366
245,9	104,4	30,5	2,3908	2,0187	1,4843	0,3721	0,9065	0,5344

	α	$\frac{m_1-\Delta m_1}{m}$	$\frac{m_2-\Delta m_2}{m}$	(t_0)
	2,32	8,03	3,46	$12^{c},22$
	2,35	8,11	3,45	12,36
	2,48 (!)	8,25	3,33	12,28
	2,29	8,20	3,58	12,36
	2,41	8,09	3,36	12,32
	2,32	8,09	3,49	12,27
	2,32	8,09	3,49	12,22
	2,38	7,95	3,34	12,34
	2,34	8,07	3,44	12,38
	2,36	8,06	3,42	12,28
Среднія	2,357	8,094	3,436	$12^{c},303$

$$\mathrm{Lg}\,\frac{m_1-\Delta m_1}{m}=0{,}9082 \qquad \mathrm{Lg}\,\frac{m_2-\Delta m_2}{m}=0{,}5361$$

$$\mathrm{Lg}\,\frac{D}{D_1}=0{,}8908 \qquad \mathrm{Lg}\,\frac{D}{D_1}=0{,}8908$$

$$\mathrm{Lg}\,\frac{\varphi_1}{\theta_m}=1{,}7990 \qquad \mathrm{Lg}\,\frac{\varphi_2}{\theta_m}=1{,}4269$$

См. формулы (132).

$$(t_0) = \quad 12{,}^{\circ}303$$

Поправка на ходъ секундомѣра $\quad - \; 0{,}140$

$$t_0 = \quad 12{,}^{\circ}163$$

$$\underline{n_1 t_0 = 3{,}097} \qquad \underline{\alpha = 2{,}357.}$$

Теперь можно уже приступить къ опредѣленію μ^2, ξ (или T) и k. Полагаемъ сначала

I) $\underline{\xi = 0}$

$\beta = \quad 2{,}294$ изъ табл. X $\qquad \mathrm{Lg}\,\alpha = \quad 0{,}3724$

$\alpha = \quad 2{,}357 \qquad \mathrm{Lg}\,\psi_2 = \quad \bar{1}{,}5313$ изъ табл. XI

$\beta - \alpha = -0{,}063 \qquad \mathrm{Lg}\,\alpha\psi_2 = \quad \bar{1}{,}9037$

$\mathrm{Lg}\,(\beta - \alpha) = \quad \bar{2}{,}7993\,(n) \qquad \alpha\psi_2 = \quad 0{,}8011$

$\mathrm{Lg}'\,(\alpha\psi_2 - \beta\psi_1) = \quad 0{,}0883 \qquad \beta\psi_1 = -0{,}0150$ изъ табл. X

$\mathrm{Lg}\,\mu^2 = \quad \bar{2}{,}8876\,(n) \qquad \alpha\psi_2 - \beta\psi_1 = \quad 0{,}8161$

$$\underline{\mu^2 = -0{,}077.}$$

$n_1 t_0 = \quad 3{,}097$

$a = \quad 3{,}012$ изъ табл. XIII

$n_1 t_0 - a = +0{,}085 \qquad \mathrm{Lg}\,(n_1 t_0 - a) = \quad \bar{2}{,}9294$

$\mathrm{Lg}\,\frac{1}{b} = \quad \bar{1}{,}8290$ изъ табл. XIV

$\mathrm{Lg}\,\xi = \quad \bar{2}{,}7584$

$\xi = +0{,}057$

$n_1 t_0 - a = +0{,}085$

$c\xi^2 = \quad 0{,}001$ изъ табл. XV

$n_1 t_0 - a + c\xi^2 = +0{,}086 \qquad \mathrm{Lg}\,(n_1 t_0 - a + c\xi^2) = \quad \bar{2}{,}9345$

$\mathrm{Lg}\,\frac{1}{b} = \quad \bar{1}{,}8290$

$\mathrm{Lg}\,\xi = \quad \bar{2}{,}7635$

$$\underline{\xi = +0{,}058.}$$

Второе приближенiе.

II) $\xi = +0{,}058.$

$$\beta = 2{,}295$$
$$\alpha = 2{,}357$$
$$\beta - \alpha = -0{,}062$$
$$\mathrm{Lg}\,(\beta - \alpha) = \bar{2}{,}7924\,(n)$$
$$\mathrm{Lg}'\,(\alpha\psi_2 - \beta\psi_1) = 0{,}0768$$
$$\mathrm{Lg}\,\mu^2 = \bar{2}{,}8692\,(n)$$
$$\mu^2 = -0{,}074.$$
$$n_1 t_0 = 3{,}097$$
$$a = 3{,}011$$
$$c\xi^2 = 0{,}001$$
$$n_1 t_0 - a + c\xi^2 = +0{,}087$$

$$\mathrm{Lg}\,\alpha = 0{,}3724$$
$$\mathrm{Lg}\,\psi_2 = \bar{1}{,}5404$$
$$\mathrm{Lg}\,\alpha\psi_2 = \bar{1}{,}9128$$
$$\alpha\psi_2 = 0{,}8181$$
$$\beta\psi_1 = -0{,}0199$$
$$\alpha\psi_2 - \beta\psi_1 = 0{,}8380$$

$$\mathrm{Lg}\,(n_1 t_0 - a + c\xi^2) = \bar{2}{,}9395$$
$$\mathrm{Lg}\,\frac{1}{b} = \bar{1}{,}8288$$
$$\mathrm{Lg}\,\xi = \bar{2}{,}7683$$
$$\xi = +0{,}059.$$

Съ этой величиной ξ получается прежнее значенiе μ^2.
Такимъ образомъ, окончательныя значенiя μ^2 и ξ будутъ

$$\mu^2 = -0{,}074$$
$$\xi = +0{,}059.$$

$$1 + \xi = 1{,}059 \qquad \mathrm{Lg}'\,(1+\xi) = \bar{1}{,}97510$$
$$n_1 = 0{,}2546 \qquad \mathrm{Lg}\,n_1 = \bar{1}{,}40586$$
$$\mathrm{Lg}\,n = \bar{1}{,}38096 \quad \text{См. форм. (118)}$$
$$\mathrm{Lg}'\,n = 0{,}61904$$
$$\mathrm{Lg}\,2\pi = 0{,}79818$$
$$\mathrm{Lg}\,T = 1{,}41722$$
$$T = 26^{\circ}{,}1.$$

Контрольныя вычисленія по формуламъ (124) и (130).

$\mu^2 = -0{,}074$	$\mathrm{Lg}\,\mu^2 = \bar{2}{,}8692(n)$	
$\xi = +0{,}059$	$\mathrm{Lg}\,B_2 = \bar{1}{,}1114$	изъ табл. XII
	$\mathrm{Lg}\,B_2\,\mu^2 = \bar{3}{,}9806(n)$	
	$B_2\,\mu^2 = -0{,}0096$	
	$B_0 = 2{,}9157$	изъ табл. XII
	$u_0 = 2{,}9253$	
	$\mathrm{Lg}\,u_0 = 0{,}46617$	
$t_0 = 12{,}^{\circ}163$	$\mathrm{Lg}'\,t_0 = \bar{2}{,}91496$	
	$\mathrm{Lg}\,n = \bar{1}{,}38113$	
	$\mathrm{Lg}'\,n = 0{,}61887$	
	$\mathrm{Lg}\,2\pi = 0{,}79818$	
	$\mathrm{Lg}\,T = 1{,}41705$	
	$T = 26{,}^{\circ}1.$	

Опредѣленіе k.

	$\mathrm{Lg}\,n = \bar{1}{,}3810$	$\mathrm{Lg}\,n = \bar{1}{,}3810$	
	$\mathrm{Lg}\,\frac{\varphi_1}{\theta_m} = 1{,}7990$	$\mathrm{Lg}\,\frac{\varphi_2}{\theta_m} = 1{,}4269$	
$\xi = +0{,}059$	$\mathrm{Lg}\,F_1 = 0{,}4749$	$\mathrm{Lg}\,F_2 = 0{,}8357$	изъ табл. XVI
	$\mathrm{Lg}\,k_1 = 1{,}6549$	$\mathrm{Lg}\,k_2 = 1{,}6436$	См. форм. (113)
	$k_1 = 45{,}2$	$k_2 = 44{,}0$	
$\mu^2 = -0{,}074$	$\mathrm{Lg}\,\mu^2 = \bar{2}{,}8692(n)$	$\mathrm{Lg}\,\mu^2 = \bar{2}{,}8692(n)$	
$\xi = +0{,}059$	$\mathrm{Lg}\,\psi_1 = \bar{3}{,}9411(n)$	$\mathrm{Lg}\,\psi_2 = \bar{1}{,}5406$	изъ табл. XI
	$\mathrm{Lg}\,\mu^2\,\psi_1 = \bar{4}{,}8103$	$\mathrm{Lg}\,\mu^2\,\psi_2 = \bar{2}{,}4098(n)$	
	$\mu^2\,\psi_1 = +0{,}0006$	$\mu^2\,\psi_2 = -0{,}0257$	
	$1 + \mu^2\,\psi_1 = 1{,}0006$	$1 + \mu^2\,\psi_2 = 0{,}9743$	

$$\left.\begin{array}{rlrl} \mathrm{Lg}'(1+\mu^2\psi_1) = & \bar{1},9997 & \mathrm{Lg}'(1+\mu^2\psi_2) = & 0,0113 \\ \mathrm{Lg}\, k_1 = & 1,6549 & \mathrm{Lg}\, k_2 = & 1,6436 \\ \hline \mathrm{Lg}\, k = & 1,6546 & \mathrm{Lg}\, k = & 1,6549 \end{array}\right\} \text{См. формулы (133)}$$

$$\underbrace{k = 45,14 \qquad\qquad k = 45,18}$$

Въ среднемъ
$$k = 45,16,$$

или, съ округленіемъ,
$$\underline{k = 45,2.}$$

Этотъ численный примѣръ наглядно показываетъ, что вычисленіе постоянныхъ μ^2, T и k, по существу дѣла, при наличіи разныхъ вспомогательныхъ таблицъ, очень просто.

Опытъ показалъ, что величина переводнаго множителя k, при неизмѣнной величинѣ H_1, съ теченіемъ времени очень мало подвержена измѣненіямъ.

Приведенныя здѣсь значенія μ^2 и k относятся къ тому случаю, когда разстояніе между полюсами магнитовъ у индукціонныхъ катушекъ

$$H_1 = 10,0\ ^{м}/_{м},$$

а разстояніе между полюсами магнитовъ у мѣдной пластинки

$$H = 15,0\ ^{м}/_{м}.$$

Въ слѣдующей таблицѣ приведены величины μ^2, T и k еще при нѣсколько иныхъ значеніяхъ H_1 и H.

$H_1 \rightarrow$	15,0 м/м			$H_1 \rightarrow$	10,0 м/м		
H	μ^2	T	k	H	μ^2	T	k
16,0 м/м	+0,007	25,9 с	28,4	16,0 м/м	+0,132	26,2 с	45,1
15,0	—0,165	26,0	28,0	15,0	—0,074	26,1	45,2

Таблица эта показываетъ, что уменьшеніе разстоянія H_1 всего только на $5\ ^{м}/_{м}$ сильно вліяетъ на величину k, т.-е. на чувствительность сейсмографа.

Такимъ образомъ, мѣняя H_1, можно очень просто регулировать по желанію чувствительность прибора.

Кромѣ того, мы видимъ, что, при $H = 16{,}0$ м/м, граница аперіодичности еще не достигнута, а, при $H = 15{,}0$ м/м, эта граница уже перейдена. Такимъ образомъ, измѣненіе H всего только на 1 миллиметръ оказываетъ уже сильное вліяніе на величину постоянной затуханія μ^2.

Граница аперіодичности ($\mu^2 = 0$) получится отсюда очень легко простой интерполяціей.

При $H_1 = 10{,}0$ м/м, граница аперіодичности будетъ имѣть мѣсто при $H = 15{,}4$ м/м.

Такъ какъ мѣдная пластинка у этого сейсмографа имѣетъ толщину въ 5,5 м/м, то мы видимъ, что, при границѣ аперіодичности, съ каждой стороны пластинки остается еще свободный зазоръ, примѣрно, въ 5 м/м. Такимъ образомъ, даже при такомъ сильномъ затуханіи, нѣтъ никакой опасности, чтобы пластинка, при движеніяхъ маятника, могла-бы коснуться полюсовъ магнитовъ. Это обстоятельство представляетъ собою немаловажное преимущество магнитнаго способа затуханія.

---

§ 4.

Прямой способъ опредѣленія переводнаго множителя k.

Въ предшествующемъ § описанъ очень удобный пріемъ опредѣленія переводнаго множителя k, который, однако, примѣнимъ только въ тѣхъ случаяхъ, когда сейсмографъ уже снабженъ весьма сильнымъ затуханіемъ, т.-е. когда абсолютная величина постоянной затуханія μ^2 не превышаетъ 0,20.

Теперь разсмотримъ другой, прямой способъ опредѣленія k, который примѣнимъ при любомъ значеніи μ^2 и при которомъ не требуется вовсе знать, ни собственнаго періода колебаній маятника безъ затуханія T, который можетъ быть, такимъ образомъ, совершенно произвольный, ни численнаго значенія постоянной затуханія μ^2.

Единственное требованіе, какъ всегда, заключается только въ томъ, чтобы соотвѣтствующій гальванометръ былъ-бы установленъ строго на границу аперіодичности ($\varepsilon_1 = n_1$).

Этотъ новый способъ опредѣленія k заключается въ слѣдующемъ.

Возьмемъ опять, для примѣра, горизонтальный маятникъ.

Стержень маятника быстро отклоняютъ рукой на весьма малый

уголъ θ_m и оставляютъ его затѣмъ неподвижнымъ въ отклоненномъ положеніи. Достигается это проще всего слѣдующимъ образомъ.

Съ двухъ сторонъ стержня маятника ставятъ весьма близко два обыкновенныхъ штатива, и затѣмъ, поворачиваніемъ бокового винта у подставки маятника, заставляютъ стержень маятника прислониться къ одному изъ этихъ штативовъ. Это будетъ исходное положеніе маятника.

Затѣмъ быстро переводятъ рукой стержень маятника до прикосновенія его съ другимъ штативомъ, и удерживаютъ его затѣмъ рукой въ этомъ новомъ положеніи. Соотвѣтствующій уголъ поворота маятника пусть будетъ θ_m. Этотъ уголъ опредѣляется по обыкновенному зеркальному способу измѣренія малыхъ угловъ.

При этомъ быстромъ смѣщеніи маятника, гальванометръ получитъ нѣкоторый начальный импульсъ, сообщающій его подвижной рамѣ нѣкоторую начальную угловую скорость φ_0'.

Отклоненіе гальванометра достигаетъ при этомъ нѣкотораго максимума φ_m, а затѣмъ уже гальванометръ ассимптотически возвращается къ положенію равновѣсія.

Уголъ φ_m также опредѣляется, другимъ наблюдателемъ, по трубѣ со шкалой.

Измѣривъ углы θ_m и φ_m, легко опредѣлить отсюда искомую величину переводнаго множителя k.

Обратимся для этого къ дифференціальному уравненію движенія гальванометра (см. формулу (32) § 3 главы VI)

$$\varphi'' + 2n_1\varphi' + n_1^2\varphi + k\theta' = 0,$$

гдѣ постоянная $n_1 = \varepsilon_1$ извѣстна.

Интегрируя почленно это уравненіе въ предѣлахъ отъ 0 до τ, гдѣ τ очень малая величина (въ предѣлѣ $\tau = 0$), и, принимая во вниманіе, что, при $t = 0$, $\varphi_0 = 0$, будемъ имѣть

$$\varphi_0' + n_1^2\int_0^\tau \varphi\, dt + k\theta_m = 0$$

или, въ предѣлѣ,

$$\varphi_0' = -k\theta_m.$$

Маятникъ надо отклонять настолько быстро, чтобы гальванометръ за это время не успѣлъ-бы еще выйти изъ положенія равновѣсія.

Послѣ этого, когда маятникъ опять въ покоѣ, дифференціальное урав-

неніе движенія гальванометра представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$\varphi'' + 2n_1 \varphi' + n_1^2 \varphi = 0.$$

Начальныя условія движенія (при $t = 0$) будутъ

$$\varphi_0 = 0$$

и

$$\varphi_0' = - k\,\theta_m.$$

Интегралъ этого уравненія, согласно формулѣ (33) § 2 главы V-ой, представится тогда въ слѣдующемъ видѣ:

$$\varphi = \varphi_0' t \,.\, e^{-n_1 t}$$

или

$$\varphi = - k\theta_m \,.\, t \,.\, e^{-n_1 t} \dots\dots\dots\dots\dots (134)$$

Для опредѣленія наибольшаго угла отклоненія гальванометра φ_m, опредѣлимъ значеніе $t = t_m$, при которомъ $\frac{d\varphi}{dt} = 0$.

Будемъ имѣть

$$e^{-n_1 t_m} [1 - n_1 t_m] = 0$$

или

$$t_m = \frac{1}{n_1}.$$

Подставляя эту величину въ формулу (134), получимъ

$$\varphi_m = - k\,\theta_m \cdot \frac{1}{n_1 e},$$

или, окончательно, не считаясь со знакомъ (—), который не имѣетъ никакого практическаго значенія,

$$k = n_1 e \cdot \frac{\varphi_m}{\theta_m} \dots\dots\dots\dots\dots (135)$$

Мы видимъ, такимъ образомъ, что этотъ способъ опредѣленія k чрезвычайно простой и не требуетъ вовсе предварительнаго опредѣленія другихъ постоянныхъ сейсмографа (кромѣ n_1).

При малыхъ значеніяхъ μ^2, предпочтительнѣе, однако, пользоваться ранѣе описаннымъ методомъ опредѣленія k, такъ какъ эта величина получается легко попутно при опредѣленіи другихъ постоянныхъ сейсмографа.

Этимъ новымъ пріемомъ опредѣленія k можно, въ случаѣ надобности, пользоваться для контроля.

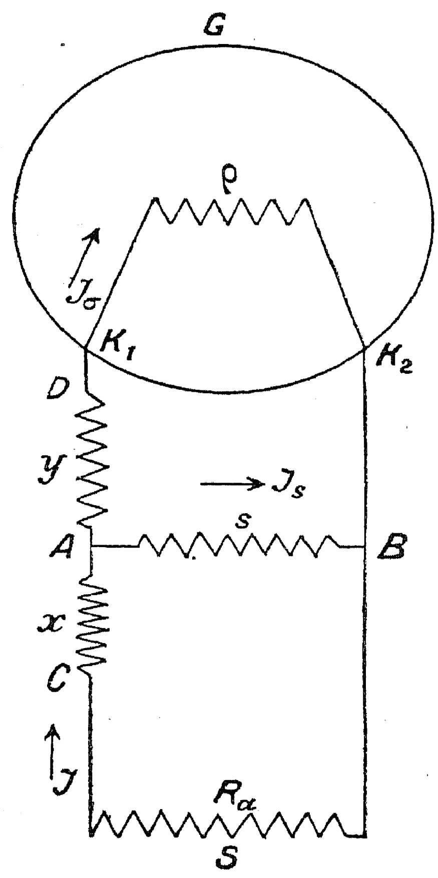
§ 5.

Примѣненіе шунта.

Мы видѣли раньше, что величину переводнаго множителя k можно уменьшать, увеличивая разстояніе H_1 между полюсами магнитовъ у индукціонныхъ катушекъ. Нельзя, однако, идти слишкомъ далеко въ этомъ направленіи, такъ какъ магнитное поле можетъ получиться тогда не достаточно однороднымъ.

Если желаютъ значительно уменьшить чувствительность сейсмографа, то можно воспользоваться для этого особымъ шунтомъ, устройство котораго видно на слѣдующемъ чертежѣ 115.

Черт. 115.



G представляетъ собою гальванометръ съ внутреннимъ сопротивленіемъ ρ, K_1 и K_2 его наружные зажимы, а S индукціонныя катушки.

По условію, гальванометръ долженъ находиться строго на границѣ апеіодичности, а потому наружное его сопротивленіе должно быть равно R_a, гдѣ R_a опредѣляется по формулѣ (24) § 2 главы VI:

$$R_a = \frac{c}{n_1 - c_0} - \rho.$$

R_a представляетъ собою, такимъ образомъ, сопротивленіе индукціонныхъ катушекъ вмѣстѣ съ соединительными проводами, идущими къ зажимамъ гальванометра.

На чертежѣ 115 это будетъ сопротивленіе контура CSB, причемъ, при отсутствіи шунта, точка C совпадаетъ съ K_1, а точка B съ K_2. Теперь предположимъ, что мы желаемъ ослабить силу тока въ гальванометрѣ въ отношеніи σ къ 1.

Тогда новое значеніе переводнаго множителя будетъ

$$k_\sigma = \sigma k \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (136)$$

Для этой цѣли введемъ между точками A и C сопротивленіе x, между точками A и D сопротивленіе y, а между точками A и B перекинемъ мостикъ съ сопротивленіемъ s. Сопротивленіемъ отрѣзка BK_2 мы пренебрежемъ; можно, конечно, и прямо приростить точку B къ зажиму K_2.

Такой шунтъ надо изготовить изъ хорошо изолированной проволоки, причемъ, для каждаго такого сопротивленія, надо соотвѣтствующую проволоку сначала сложить пополамъ и перекрутить самую на себя, для избѣжанія всякихъ постороннихъ индукціонныхъ вліяній, а затѣмъ уже намотать на деревянный цилиндрикъ. Три конца, сходящіеся въ A, можно припаять другъ къ другу, затѣмъ положить весь шунтъ въ маленькую коробку и залить все парафиномъ. Изъ такой коробки будутъ выступать, такимъ образомъ, только концы C, D и B.

Обозначимъ индукціонную электродвижущую силу въ катушкахъ S, вызванную движеніемъ маятника, черезъ E.

Тогда, при отсутствіи шунта, сила тока въ гальванометрѣ будетъ

$$I = \frac{E}{R_a + \rho} \qquad (137)$$

Сопротивленія x, y и s нельзя выбирать произвольно.

Наоборотъ, они должны удовлетворять двумъ вполнѣ опредѣленнымъ требованіямъ.

Во-первыхъ, если гальванометръ долженъ оставаться строго на границѣ апеpiодичности, то все внѣшнее сопротивленіе гальванометра между зажимами K_1 и K_2 должно по прежнему быть равно R_a.

Обозначивъ общее сопротивленіе между точками A и B по пути индукціонныхъ катушекъ, т.-е. сопротивленіе совокупности параллельныхъ вѣтвей $ACSB$ и AB, черезъ R_1, будемъ имѣть

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_a + x} + \frac{1}{s}, \qquad (138)$$

и первое требованіе сводится къ тому, чтобы

$$y + R_1 = R_a \qquad (139)$$

Во-вторыхъ, введеніе шунта не должно измѣнять величину коэффиціента затуханія μ^2, а потому все внѣшнее, по отношенію къ индукціоннымъ катушкамъ, сопротивленіе между точками C и B должно по прежнему равняться ρ.

Обозначивъ общее сопротивленіе между точками A и B по пути гальванометра, т.-е. сопротивленіе совокупности параллельныхъ вѣтвей AK_1K_2B и AB черезъ R_2, будемъ имѣть

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{\rho + y} + \frac{1}{s}, \qquad (140)$$

и второе требованіе сводится къ тому, чтобы

$$x + R_2 = \rho \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (141)$$

Въ этомъ случаѣ и сила тока I въ индукціонныхъ катушкахъ представится по прежнему формулой (137).

При наличіи шунта, сила тока въ гальванометрѣ I_σ опредѣлится по законамъ Кирхгофа.

Обозначивъ силу тока въ мостикѣ AB черезъ I_s, будемъ имѣть

$$I = I_\sigma + I_s$$

и

$$I_\sigma (y + \rho) = I_s . s.$$

Отсюда находимъ

$$I_\sigma (y + \rho) = (I - I_\sigma) s$$

или

$$\sigma = \frac{I_\sigma}{I} = \frac{s}{y + \rho + s} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (142)$$

Такъ какъ сопротивленія x, y и s подчинены двумъ условнымъ уравненіямъ (см. формулы (139) и (141)), то мы можемъ y, s и σ выразить черезъ x и извѣстныя сопротивленія ρ и R_a.

Для этой цѣли опредѣлимъ сначала R_1 и R_2.

Изъ формулъ (138) и (140) мы имѣемъ

$$s(R_a + x) = R_1 s + R_1 (R_a + x)$$

или

$$R_1 = \frac{s(R_a + x)}{R_a + x + s}$$

и

$$s(\rho + y) = R_2 s + R_2 (\rho + y)$$

или

$$R_2 = \frac{s(\rho + y)}{\rho + y + s}.$$

Подставляя эти величины соотвѣтственно въ формулы (139) и (141), получимъ

$$y + \frac{s(R_a + x)}{R_a + x + s} = R_a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (143)$$

и

$$x + \frac{s(\rho + y)}{\rho + y + s} = \rho.$$

Преобразуя, найдемъ

$$yR_a + yx + ys + sR_a + sx = R_a^2 + R_a x + R_a s$$

и

$$x\rho + yx + xs + s\rho + sy = \rho^2 + \rho y + \rho s.$$

Вычитая одно уравненіе изъ другого, получимъ

$$yR_a - x\rho = R_a^2 - \rho^2 + R_a x - \rho y$$

или

$$y(R_a + \rho) = x(R_a + \rho) + (R_a - \rho)(R_a + \rho),$$

или, окончательно,

$$y = R_a - \rho + x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (144)$$

Подставимъ теперь это выраженіе для y въ формулу (143). Тогда

$$(R_a - \rho + x)(R_a + x + s) + s(R_a + x) = R_a(R_a + x + s).$$

Отсюда легко найдемъ s.

$$s[R_a - \rho + x + R_a + x - R_a] = R_a(R_a + x) - (R_a - \rho + x)(R_a + x)$$

или

$$s[R_a - \rho + 2x] = (R_a + x)(\rho - x),$$

или, окончательно,

$$s = \frac{(R_a + x)(\rho - x)}{R_a - \rho + 2x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (145)$$

Величины y и s выражены, такимъ образомъ, черезъ x. Остается теперь только найти σ.

Изъ формулъ (144) и (145) мы имѣемъ

$$y + \rho + s = R_a - \rho + x + \rho + \frac{(R_a + x)(\rho - x)}{R_a - \rho + 2x}$$

$$= (R_a + x)\frac{R_a - \rho + 2x + \rho - x}{R_a - \rho + 2x} = \frac{(R_a + x)^2}{R_a - \rho + 2x}.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{s}{y + \rho + s} = \frac{\rho - x}{R_a + x}.$$

Подставляя эту величину въ формулу (142), получимъ окончательно

$$\sigma = \frac{\rho - x}{R_a + x} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots (146)$$

При изготовленіи шунта, величина x выбирается по желанію. Тогда, по формуламъ (144) и (145), опредѣлятся сопротивленія y и s; формула-же (146) дастъ намъ величину множителя σ, который характеризуетъ собою уменьшеніе чувствительности сейсмографа (см. соотношеніе (136)).

Уравненія (145) и (146) показываютъ, однако, что x никогда не можетъ быть больше ρ.

Итакъ, мы видимъ, что легко сдѣлать σ сколь угодно малымъ, но σ никогда не можетъ быть больше нѣкотораго предѣльнаго значенія σ_m (при $x = 0$), опредѣляемаго изъ условія

$$\sigma_m = \frac{\rho}{R_a} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots (147)$$

Мы видѣли, напримѣръ, въ § 2 главы VI, что, для гальванометра № VI,

$$\rho = 4{,}12\,\Omega,$$

а

$$R_a = 21{,}22\,\Omega;$$

слѣдовательно,

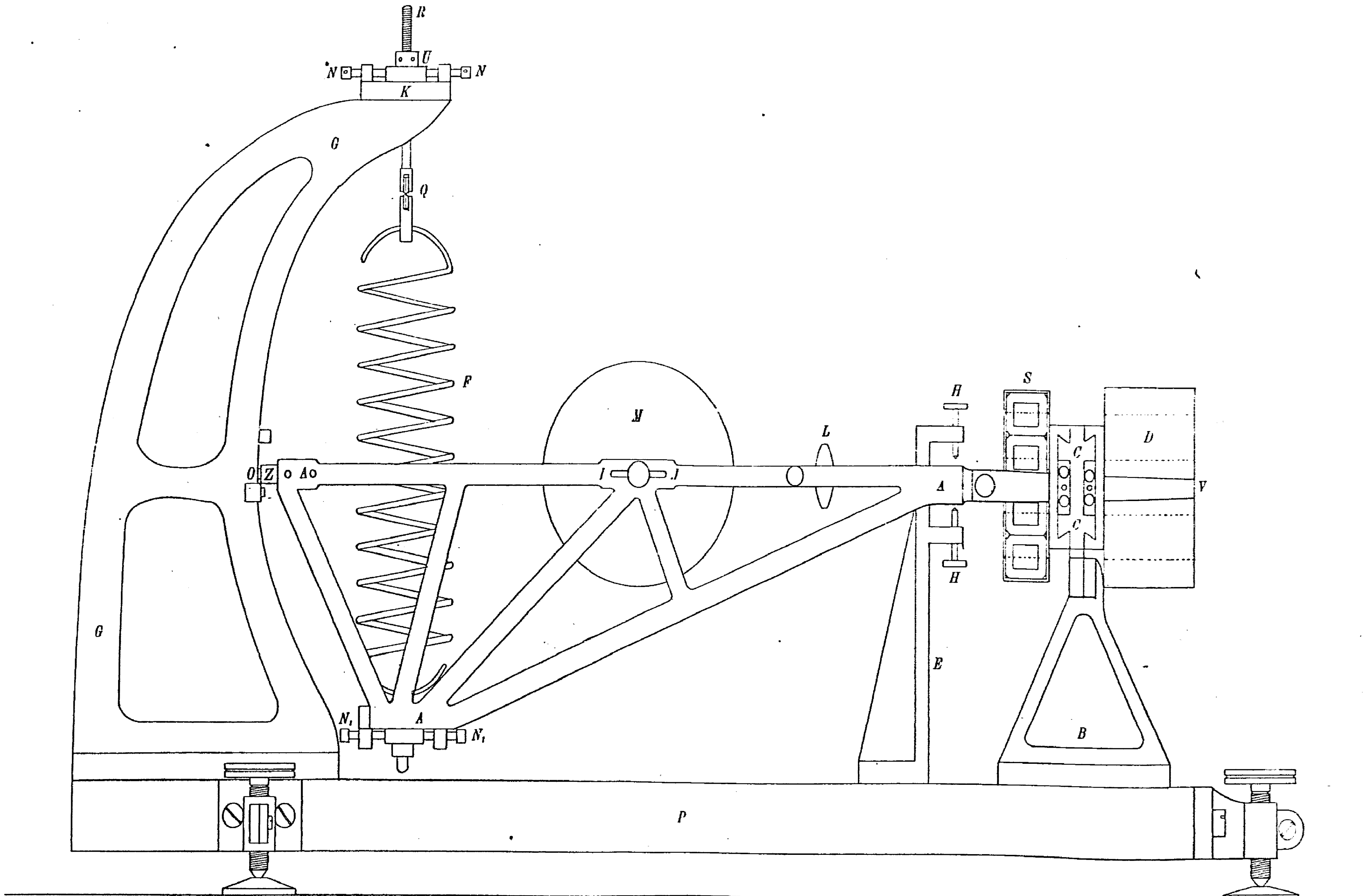
$$\sigma_m = 0{,}194.$$

Итакъ, при помощи такого шунта, можно уменьшить чувствительность соотвѣтствующаго сейсмографа, примѣрно, въ 5 разъ и болѣе, но σ не можетъ принять ни одного значенія, заключеннаго между 0,2 и 1. Если-бы требовалось, напримѣръ, уменьшить чувствительность регистраціи вдвое, то пришлось-бы уже соотвѣтственно увеличить разстояніе между полюсами магнитовъ у индукціонныхъ катушекъ.

При сейсмометрическихъ наблюденіяхъ, рѣдко приходится пользоваться такимъ шунтомъ, такъ какъ нѣтъ никакой цѣли чрезмѣрно уменьшать чувствительность сейсмографа; но, при опредѣленіи переводнаго множителя k изъ опыта, особенно, если k очень велико, такой шунтъ можетъ быть очень полезенъ. Введеніе шунта позволяетъ, именно, давать маятнику бо̀льшіе углы отклоненія θ_m, которые, слѣдовательно, легче точнѣе измѣрить.

По способу, описанному въ § 3 настоящей главы, опредѣлится, такимъ образомъ, изъ опыта k_σ, а, зная величину коеффиціента σ, легко опредѣлить, по формулѣ (136), и соотвѣтствующую инстинную величину переводнаго множителя k.

Черт. 116.



Глава VIII.

Теорія вертикальнаго сейсмографа.

Въ главѣ IV было дано краткое описаніе различныхъ типовъ вертикальныхъ сейсмографовъ, предназначенныхъ для изслѣдованія вертикальной составляющей смѣщенія почвы z.

Мы разсмотримъ теперь самую теорію вертикальныхъ сейсмографовъ примѣнительно къ тому типу приборовъ, которые предназначены для русскихъ сейсмическихъ станцій 1-го разряда и одинъ экземпляръ которыхъ работаетъ уже довольно долго и весьма успѣшно на Пулковской сейсмической станціи.

Въ этомъ приборѣ также примѣнено сильное магнитное затуханіе до апеѳріодичности и гальванометрическій методъ регистраціи. Схематическій рисунокъ такого сейсмографа представленъ на слѣдующемъ чертежѣ 116.

На прочной фундаментной доскѣ P прикрѣпленъ двойной, прочный штативъ G. Двойная подвижная рама AAA можетъ вращаться около горизонтальной оси O. Соединеніе этой рамы со штативомъ G осуществляется при помощи двухъ паръ весьма короткихъ, взаимно перпендикулярныхъ, тонкихъ стальныхъ пластинокъ.

Между двумя вѣтвями рамы AAA помѣщается тяжелая масса M, которая можетъ перемѣщаться нѣсколько вправо или влѣво въ прорѣзѣ IJ.

Рама эта удерживается въ горизонтальномъ положеніи при помощи прочной, стальной, спиральной пружины F. Пружина эта подвѣшена въ Q, также на тонкой стальной пластинкѣ; такое-же соединеніе имѣется и внизу. При помощи винта R и гайки U можно поднимать и опускать верхній конецъ пружины. Боковые винты, NN — наверху и N_1N_1 — внизу, даютъ возможность перемѣщать верхнюю и нижнюю точки прикрѣпленія пружины вправо или влѣво.

На особой стойкѣ B установлены постоянные магниты (не показанные на чертежѣ); D мѣдная пластинка для затуханія, а S система индукціонныхъ катушекъ, проволоки отъ которыхъ идутъ вдоль верхняго срѣза рамы къ оси вращенія O, гдѣ онѣ соединяются съ неподвижными зажимами при помощи тонкихъ серебряныхъ листочковъ.

Винты HH ограничиваютъ размахи прибора. L есть небольшой передвижной грузъ на винтовой нарѣзкѣ, служащій для приведенія всей рамы въ горизонтальное положеніе.

Особые микрометренные винты со шкалами и поніусами даютъ возможность устанавливать полюсы магнитовъ въ требуемое разстояніе другъ отъ друга.

Особый передвижной грузъ, закрѣпленный винтомъ на особомъ вертикальномъ стержнѣ на рамѣ около оси вращенія прибора (не показанъ на чертежѣ), даетъ возможность привести центръ тяжести всей подвижной системы на одну высоту съ осью вращенія. Это необходимо для того, чтобы горизонтальныя смѣщенія почвы, параллельныя OV, не вызывали бы отклоненія сейсмографа.

Выведемъ теперь дифференціальное уравненіе движенія прибора.

Возьмемъ для этого прямоугольныя координатныя оси Ox и Oz (см. черт. 117). Начало координатъ O возьмемъ на поверхности земли, а ось z-овъ направимъ вертикально вверхъ. Ось вращенія прибора пусть будетъ въ O_1, въ разстояніи d отъ O.

Вертикальная проэкція смѣщенія почвы пусть будетъ z, гдѣ z есть нѣкоторая функція времени t:

$$z = f(t) \qquad (1)$$

O_1H представляетъ собою линію, проходящую черезъ точку O_1 и центръ тяжести подвижной системы; при равновѣсіи прибора O_1H параллельна оси Ox.

A представляетъ собою верхнюю, а B нижнюю точку прикрѣпленія пружины. При нормальномъ положеніи прибора линія AB параллельна оси Oz. Обозначимъ эту нормальную длину пружины черезъ L_0.

Разстояніе точки B до оси вращенія обозначимъ черезъ c:

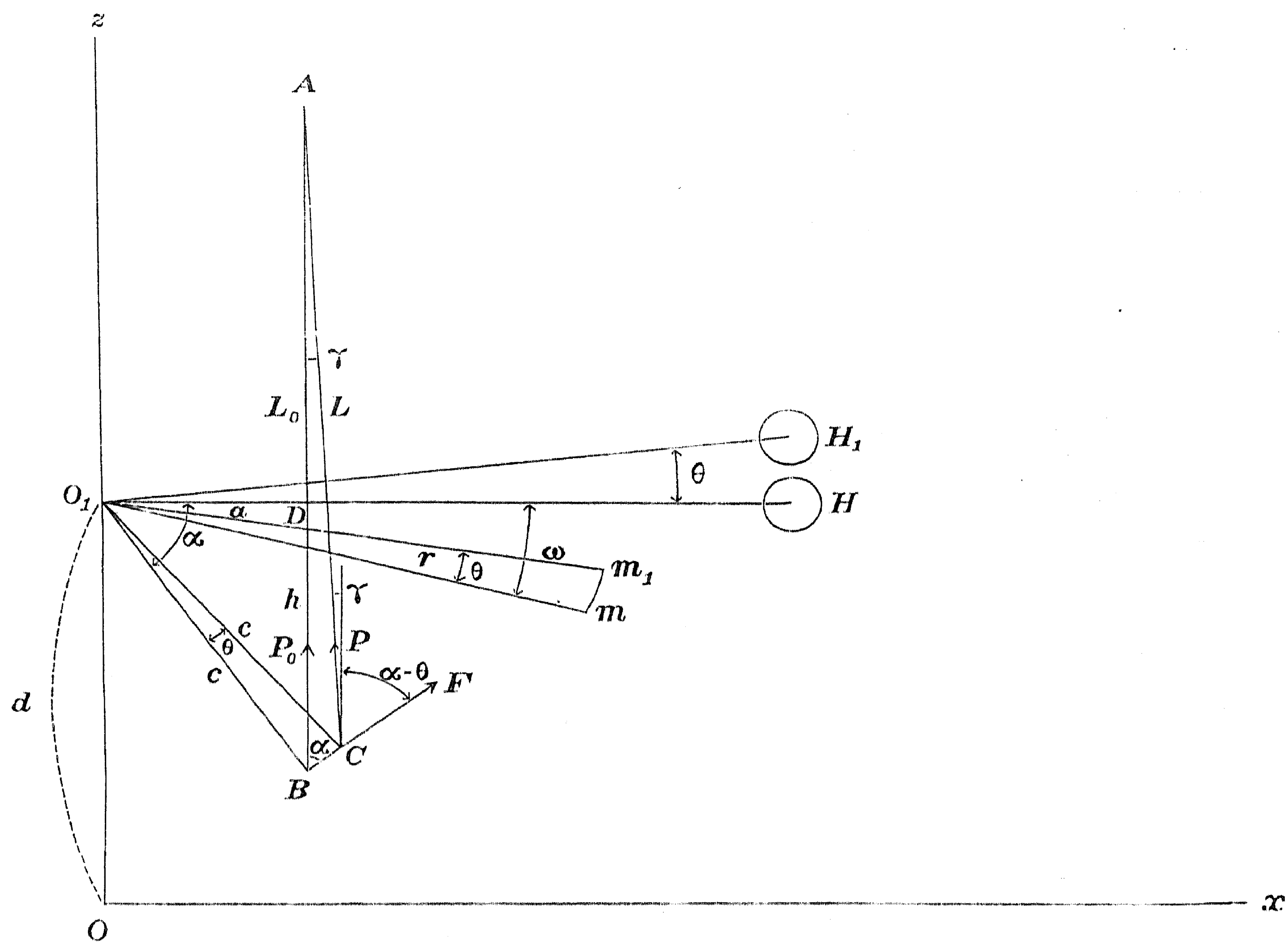
$$O_1B = c,$$

а уголъ HO_1B черезъ α.

Обозначивъ еще разстоянія O_1D и DB соотвѣтственно черезъ a и h, будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} a &= c\cos\alpha \\ h &= c\sin\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Черт. 117.



a, c, h и α суть нѣкоторыя постоянныя величины.

Предположимъ теперь, что приборъ отклоненъ отъ своего нормальнаго положенія равновѣсія на малый уголъ θ, причемъ мы будемъ считать θ положительнымъ, когда центръ тяжести поднимается. Тогда линія O_1H перемѣстится въ O_1H_1, а какая-нибудь масса m, находящаяся въ разстояніи r отъ оси вращенія, перемѣстится въ m_1. Уголъ HO_1m обозначимъ черезъ ω, а полную массу подвижной системы черезъ M.

$$M = \Sigma m.$$

Нашъ приборъ представляетъ собою ничто иное, какъ твердое тѣло, имѣющее опредѣленную ось вращенія, а потому мы можемъ примѣнить къ нему основную теорему механики, по которой произведеніе изъ момента инерціи тѣла $K = \Sigma mr^2$ на угловое ускореніе θ'' равно моменту $\mathfrak{M}$ всѣхъ

дѣйствующихъ силъ по отношенію къ оси вращенія (см. формулу (4) § 1 главы V-ой).

$$K\theta'' = \mathfrak{M} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

Весь вопросъ сводится, такимъ образомъ, къ опредѣленію $\mathfrak{M}$.

Дѣйствующими силами являются, во-первыхъ, сила тяжести, а, во-вторыхъ, натяженіе пружины. Моментъ первыхъ силъ обозначимъ черезъ $\mathfrak{M}_1$, а вторыхъ черезъ $\mathfrak{M}_2$.

Тогда

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2.$$

Вычислимъ сначала $\mathfrak{M}_1$.

Сила, дѣйствующая на массу m, будетъ mg, гдѣ g есть ускореніе силы тяжести. Сила эта направлена вертикально *внизъ*.

Проэкція этой силы на направленіе, перпендикулярное къ плечу $m_1 O_1$, при отклоненномъ положеніи прибора, будетъ

$$mg \cos(\omega - \theta),$$

а соотвѣтствующій моментъ

$$-mgr \cos(\omega - \theta).$$

Такимъ образомъ,

$$\mathfrak{M}_1 = -g \,.\, \Sigma mr \cos(\omega - \theta)$$
$$= -g \cos\theta \,.\, \Sigma mr \cos\omega - g \sin\theta \,.\, \Sigma mr \sin\omega.$$

Обозначивъ разстояніе центра тяжести, который, при нормальномъ положеніи прибора, лежитъ гдѣ-нибудь на линіи O_1H, до оси вращенія черезъ r_0, будемъ имѣть

$$\Sigma mr \cos\omega = Mr_0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

Съ другой-же стороны, по теоремѣ моментовъ,

$$\Sigma mr \sin\omega = 0.$$

Слѣдовательно, ограничиваясь малыми углами отклоненія θ, т.-е., пренебрегая членами порядка θ^2, будемъ имѣть

$$\mathfrak{M}_1 = -gMr_0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (5)$$

Вычислимъ теперь моментъ натяженія пружины $\mathfrak{M}_2$.

При нормальной длинѣ пружины L_0 (при $\theta = 0$), пусть сила натяженія ея будетъ P_0. Сила эта направлена отъ B къ A.

Когда длина пружины сдѣлается равной L, то пусть соотвѣтствующее натяженіе будетъ P.

Для малыхъ удлиненій, мы можемъ, на основаніи основныхъ положеній теоріи упругости, положить

$$P - P_0 = \beta (L - L_0), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

гдѣ β есть нѣкоторый коеффиціентъ, зависящій отъ упругихъ свойствъ пружины. Его, въ случаѣ надобности, легко получить прямо изъ опыта, изслѣдуя растяженіе пружины подъ вліяніемъ различныхъ растягивающихъ усилій и опредѣляя катетометромъ соотвѣтствующія удлиненія $L - L_0$.

Опредѣлимъ теперь новую длину пружины L.

При поворотѣ прибора на уголъ θ, точка B перемѣстится въ C, причемъ длина

$$BC = c\,\theta.$$

Уголъ BAC обозначимъ черезъ γ.

Тогда изъ треугольника BAC будемъ имѣть

$$L_0 - L = c\,\theta \cos\alpha$$

и

$$\gamma L = c\,\theta \sin\alpha,$$

или, принимая во вниманіе соотношенія (2) и пренебрегая членами высшихъ порядковъ,

$$L_0 - L = a\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

и

$$\gamma = \frac{h\,\theta}{L_0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Такимъ образомъ, мы будемъ, согласно формулѣ (6), имѣть

$$P = P_0 - \beta a \theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Сила эта направлена отъ C къ A. Проэкція F этой силы на направленіе, перпендикулярное къ плечу O_1C, представится, какъ то видно изъ чертежа 117, слѣдующимъ образомъ

$$F = P\cos(\alpha - \theta + \gamma),$$

а соотвѣтствующій моментъ

$$\mathfrak{M}_2 = + P.\cos(\alpha - \theta + \gamma).c.$$

Ограничиваясь членами перваго порядка, будемъ имѣть

$$\mathfrak{M}_2 = Pc\cos\alpha + Pc\sin\alpha.(\theta - \gamma).$$

Подставляя сюда выраженіе γ изъ формулы (8) и принимая во вниманіе обозначенія (2), получимъ

$$\mathfrak{M}_2 = P\left[a + h\left(1 - \frac{h}{L_0}\right)\theta\right].$$

Подставимъ теперь сюда значеніе P изъ формулы (9).

Тогда

$$\mathfrak{M}_2 = (P_0 - \beta a\theta)\left[a + h\left(1 - \frac{h}{L_0}\right)\theta\right].$$

Ограничиваясь членами перваго порядка, будемъ имѣть

$$\mathfrak{M}_2 = P_0 a + P_0 h\left(1 - \frac{h}{L_0}\right)\theta - \beta a^2\theta.$$

Мы нашли, такимъ образомъ, отдѣльно выраженія моментовъ $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$.

Слѣдовательно, для полнаго вращательнаго момента $\mathfrak{M}$ мы будемъ имѣть

$$\mathfrak{M} = (P_0 a - gMr_0) - \left\{\beta a^2 - P_0 h\left(1 - \frac{h}{L_0}\right)\right\}\theta.$$

При равновѣсіи прибора, когда $\theta = 0$, моментъ натяженія пружины уравновѣшиваетъ моментъ силы тяжести. Слѣдовательно,

$$P_0 a = gMr_0$$

или

$$P_0 = g\frac{Mr_0}{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Такимъ образомъ,

$$\mathfrak{M} = -\left\{\beta a^2 - P_0 h\left(1 - \frac{h}{L_0}\right)\right\}\theta \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Вращательный моментъ $\mathfrak{M}$ надо пополнить еще членомъ, зависящимъ отъ силы инерціи и обуславливаемымъ ускореніемъ вертикальнаго движенія почвы z''.

Если движеніе почвы направлено вертикально вверхъ съ соотвѣтствующимъ ускореніемъ z'', то въ *относительномъ движеніи* прибора по отношенію къ штативу, которое мы и можемъ только наблюдать, это равносильно тому, какъ-будто къ каждой массѣ m была-бы приложена сила инерціи mz'', направленная вертикально внизъ. Эта сила какъ-бы прибавляется къ силѣ тяжести mg.

На основаніи предыдущаго (см. формулы (4) и (5)), полный моментъ этой силы будетъ

$$-Mr_0 . z''.$$

Присоединяя эту величину къ ранѣе найденному выраженію момента $\mathfrak{M}$ и подставляя полученное, такимъ образомъ, выраженіе въ основную формулу (3), будемъ имѣть

$$K\theta'' + \left\{\beta a^2 - P_0 h\left(1 - \frac{h}{L_0}\right)\right\} \theta + Mr_0 . z'' = 0 \ldots\ldots\ldots (12)$$

Таково дифференціальное уравненіе движенія вертикальнаго сейсмографа.

Раздѣлимъ его теперь на K и введемъ слѣдующія обозначенія:

$$\frac{K}{Mr_0} = \frac{\Sigma mr^2}{Mr_0} = l \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

и

$$n^2 = \frac{\beta}{K} a^2 - \frac{P_0 h}{K}\left(1 - \frac{h}{L_0}\right).$$

Это послѣднее выраженіе можно еще такъ преобразовать.

Изъ формулъ (10) и (13) мы имѣемъ

$$\frac{P_0}{K} = g\frac{Mr_0}{a} \cdot \frac{1}{Mr_0 l} = \frac{g}{al};$$

слѣдовательно,

$$n^2 = \frac{\beta}{K} a^2 - \frac{g}{a} \cdot \frac{h}{l}\left(1 - \frac{h}{L_0}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Пополнивъ еще дифференціальное уравненіе (12) членомъ, зависящимъ отъ момента силъ затуханія, который мы, какъ и раньше, примемъ пропорціональнымъ угловой скорости вращенія прибора θ', что, при *магнитномъ затуханіи,* строго имѣетъ мѣсто, и принявъ еще во вниманіе, что моментъ этихъ силъ всегда отрицательный, мы можемъ привести дифференціальное уравненіе движенія нашего вертикальнаго сейсмографа къ слѣду-

ющей, извѣстной, канонической формѣ:

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta + \frac{1}{l}z'' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

Это уравненіе, по своей формѣ, вполнѣ тождественно съ дифференціальнымъ уравненіемъ движенія горизонтальнаго сейсмографа подъ вліяніемъ *горизонтальныхъ* смѣщеній почвы (см. формулу (25) § 1 главы V-ой).

Поэтому мы можемъ непосредственно распространить на данный типъ вертикальнаго сейсмографа различные выводы и формулы, разсмотрѣнные нами подробно въ пятой, шестой и седьмой главахъ настоящаго курса и которые касаются собственнаго движенія прибора, опредѣленія элементовъ движенія почвы, увеличенія прибора, гальванометрической регистраціи, опредѣленія постоянныхъ μ^2, T и k и пр.

Къ этому вопросу мы не будемъ, слѣдовательно, здѣсь болѣе возвращаться.

Для сейсмометрическихъ цѣлей также цѣлесообразно ставить этотъ вертикальный сейсмографъ на границу апеpіодичности, т.-е. сдѣлать $\varepsilon = n$ или $\mu^2 = 0$.

Въ формулѣ (15) l представляетъ собою приведенную длину сейсмографа.

Эту величину очень легко получить прямо изъ опыта.

Для этой цѣли освобождаютъ пружину и поворачиваютъ весь приборъ на 90° такъ, чтобы центръ тяжести приходился подъ осью вращенія, которая по прежнему остается горизонтальной. Регулируютъ затѣмъ положеніе небольшого подвижного груза около оси вращенія такъ, чтобы верхній срѣзъ подвижной рамы прибора былъ-бы вполнѣ вертикаленъ.

Тогда, въ нормальномъ положеніи прибора, центръ тяжести будетъ находиться на одной высотѣ съ осью вращенія.

Послѣ этого, раздвинувъ магниты, опредѣляютъ, по ранѣе описаннымъ пріемамъ, собственный періодъ колебаній прибора безъ затуханія T_0 въ опрокинутомъ положеніи. Такой опрокинутый приборъ представляетъ собою ничто иное, какъ простой, вертикальный, физическій маятникъ; слѣдовательно,

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

или

$$l = g \cdot \frac{T_0^2}{4\pi^2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

такъ какъ, по формулѣ (13),

$$l = \frac{\Sigma m r^2}{M r_0}.$$

До сихъ поръ мы совершенно пренебрегали массою M_1 пружины, которая также нѣсколько участвуетъ въ движенiи прибора.

Вслѣдствiе этого величина l, опредѣленная по формулѣ (16), требуетъ небольшой поправки.

Обозначивъ радiусъ инерцiи черезъ ρ, гдѣ (см. формулу (13))

$$\rho^2 = \frac{\Sigma m r^2}{M} = \frac{K}{M} = \frac{M r_0 l}{M} = l r_0,$$

не трудно доказать, что истинная величина l выразится слѣдующимъ образомъ:

$$l = g \frac{T_0^2}{4\pi^2} \left[1 - \frac{M_1}{M} \left\{ \frac{1}{2} \frac{a}{r_0} - \frac{1}{3} \frac{c^2}{\rho^2} \right\} \right] \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Въ виду малости отношенiя $\frac{M_1}{M}$, поправка эта совершенно несущественна.

Такъ, напримѣръ, въ Пулковскомъ экземплярѣ такого вертикальнаго сейсмографа истинная величина l равна $377{,}6$ $^{\text{м}}/_{\text{м}}$, а величина l безъ поправки $378{,}6$ $^{\text{м}}/_{\text{м}}$. Разница, такимъ образомъ, составляетъ всего только 1 $^{\text{м}}/_{\text{м}}$ почти на 400 $^{\text{м}}/_{\text{м}}$.

Вслѣдствiе влiянiя массы пружины M_1 и величина n^2, опредѣляемая формулой (14), требуетъ также небольшой поправки.

Истинная величина n^2 будетъ

$$n^2 = \left[\frac{\beta}{K} a^2 - \frac{g}{a} \cdot \frac{h}{l} \left(1 - \frac{h}{L_0} \right) \right] \left[1 - \frac{1}{3} \frac{c^2}{\rho^2} \cdot \frac{M_1}{M} \right] \ldots\ldots (18)$$

И эта поправка также совершенно несущественна, тѣмъ болѣе, что истинная величина n^2 опредѣляется всегда прямо изъ наблюденiй надъ собственнымъ перiодомъ колебанiй сейсмографа безъ затуханiя T.

$$n = \frac{2\pi}{T} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

Вопросъ-же объ опредѣленiи T изъ наблюденiй мы уже разсмотрѣли подробно раньше.

Остановимся теперь нѣсколько на формулѣ (14).

Мы видѣли раньше, что для сейсмометрическихъ цѣлей выгодно имѣть сейсмографъ съ длиннымъ собственнымъ перiодомъ колебанiй T, т.-е. выгодно уменьшать n.

Въ сейсмографѣ описаннаго устройства очень легко сдѣлать n^2 малымъ.

Формула (14) наглядно показываетъ все значеніе прикрѣпленія нижняго конца пружины ниже центра тяжести подвижной системы.

Отрицательная слагающая въ формулѣ (14) будетъ максимумъ, когда $h\left(1-\frac{h}{L_0}\right)$ максимумъ, т.-е. когда $h=\frac{L_0}{2}$. Слѣдовательно, выгодно, чтобы средина пружины приходилась-бы на высотѣ оси вращенія.

Для дальнѣйшаго уменьшенія n^2 у насъ еще въ распоряженіи количество a.

При уменьшеніи a, первая, положительная, слагающая уменьшается, а вторая, отрицательная, увеличивается. Теоретически разсуждая, мы могли-бы сдѣлать n произвольно малымъ, а, слѣдовательно, T, произвольно большимъ. Но, на практикѣ, нельзя итти слишкомъ далеко въ этомъ направленіи, такъ какъ, при значительныхъ величинахъ T, приборъ становится очень неустойчивымъ и легко перекидывается. Тѣмъ не менѣе легко получить собственный періодъ колебаній въ 13—14 секундъ, при совершенно достаточной устойчивости прибора, каковой періодъ для сейсмометрическихъ цѣлей является вполнѣ достаточнымъ.

Такой вертикальный сейсмографъ, при примѣненіи гальванометрическаго метода регистраціи, обладаетъ большою чувствительностью. Въ Пулковскомъ экземплярѣ, напримѣръ, величина переводнаго множителя k достигаетъ 235.

Такой сейсмографъ прекрасно передаетъ малѣйшія детали вертикальныхъ смѣщеній почвы.

Но особенно цѣнныя услуги онъ оказываетъ при опредѣленіи точнаго момента начала первой фазы землетрясенія P (моментъ вступленія первыхъ продольныхъ волнъ), особенно при удаленныхъ эпицентрахъ.

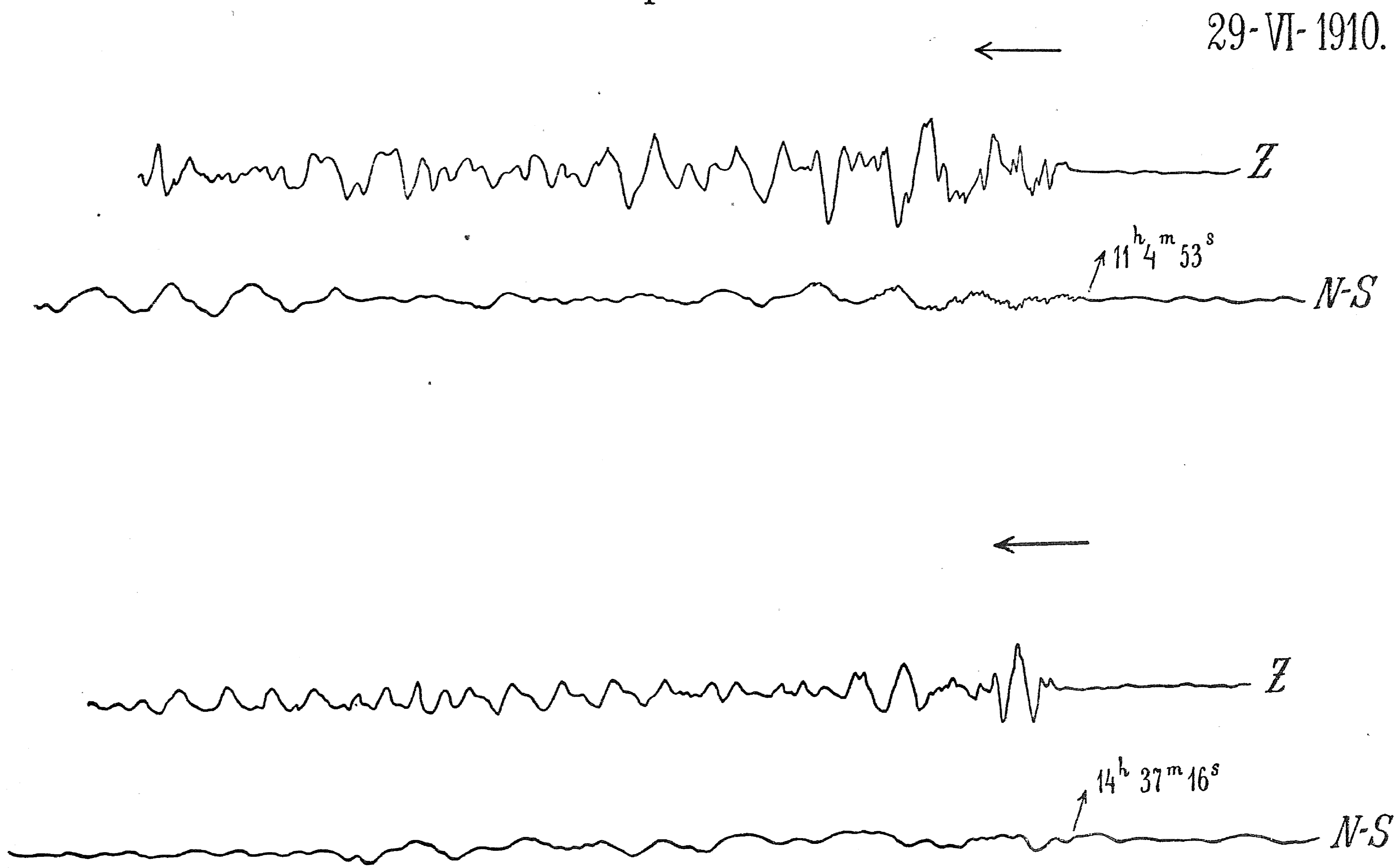
На соотвѣтствующихъ сейсмограммахъ моментъ P обыкновенно бываетъ рѣзко выраженъ, въ видѣ внезапнаго уклоненія прибора отъ положенія равновѣсія, тогда какъ на сейсмограммахъ отъ горизонтальнаго маятника соотвѣтствующая фаза часто бываетъ очень неотчетлива.

Въ поясненіе вышесказаннаго, на слѣдующемъ чертежѣ 118 приведены копіи записи начала двухъ землетрясеній, какъ вертикальнымъ сейсмографомъ Z, такъ и горизонтальнымъ сейсмографомъ для составляющей N—S.

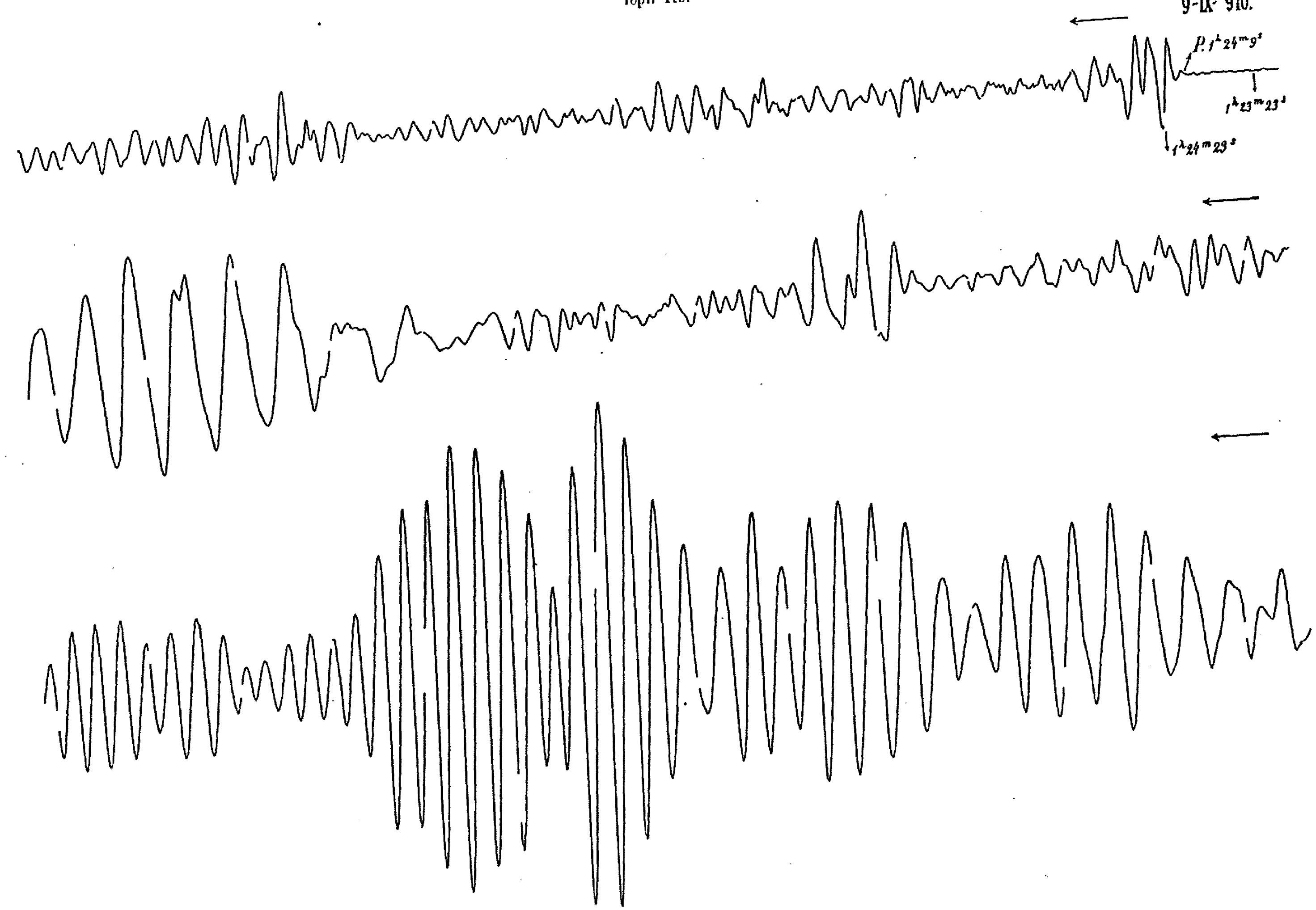
Въ максимальной фазѣ землетрясенія такой вертикальный сейсмографъ даетъ также очень интересныя и замѣчательно отчетливыя записи, какъ то видно изъ слѣдующаго чертежа 119, гдѣ приведена *въ натуральную величину* копія сейсмограммы, полученной въ Пулковѣ во время одного Курильскаго землетрясенія.

Нижнія кривыя представляютъ собою продолженіе верхнихъ; перерывы кривой соотвѣтствуютъ минутнымъ маркамъ.

Черт. 118.



Черт. 119.



Особенно интересна та часть сейсмограммы, которая соотвѣтствуетъ максимальной фазѣ землетрясенія. Несмотря на то, что эпицентръ этого землетрясенія находился, примѣрно, въ разстояніи 7500 километровъ, въ Пулковѣ получились весьма большіе размахи прибора, что наглядно свидѣтельствуетъ о его высокой степени чувствительности.

Обработка новѣйшихъ Пулковскихъ наблюденій, полученныхъ съ такимъ вертикальнымъ сейсмографомъ и съ двумя апереіодическими горизонтальными маятниками ранѣе описаннаго устройства, показала, что, въ максимальной фазѣ землетрясенія, отношеніе максимальной амплитуды вертикальной составляющей движенія почвы z_m къ соотвѣтствующей величинѣ *полной* горизонтальной составляющей h_m, т.-е. $\frac{z_m}{h_m}$, меньше ранѣе выведенной изъ теоріи Rayleigh'а теоретической величины 1,47, въ предположеніи, что коэффиціентъ поперечнаго сжатія Poisson'а равенъ $\frac{1}{4}$ (см. главу II § 2 формула (100))

$$\frac{z_m}{h_m} = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} = 1{,}47.$$

Наибольшая величина $\frac{z_m}{h_m}$, полученная изъ наблюденій, равняется всего только 1,28, но часто $\frac{z_m}{h_m}$ бываетъ значительно меньше. Причина этого явленія кроется быть можетъ въ томъ, что вертикальныя колебанія почвы болѣе быстро затухаютъ съ разстояніемъ, чѣмъ горизонтальныя. По мнѣнію Wiechert'а, это несогласіе можетъ быть объяснено отчасти и тѣмъ, что, кромѣ обычныхъ поверхностныхъ волнъ Rayleigh'а, существуютъ еще и *чисто поперечныя* поверхностныя волны, не имѣющія соотвѣтствующей вертикальной составляющей.

Глава IX.

Изслѣдованіе наклоновъ.

Вопросъ объ изслѣдованіи наклоновъ почвы при дальнихъ землетрясеніяхъ не былъ еще до сихъ поръ практически удовлетворительнымъ образомъ разрѣшенъ.

Въ главѣ IV упоминалось объ особомъ приборѣ, построенномъ Schlüter'омъ, и названный имъ *клинографомъ*, который былъ спеціально предназначенъ для изслѣдованія наклоновъ. По существу дѣла, клинографъ представляетъ собою ничто иное, какъ особые вѣсы, гдѣ у концовъ коромысла сосредоточены двѣ тяжелыя массы и у которыхъ разстояніе r_0 центра тяжести до оси вращенія очень мало. Такая система представляетъ собою, въ сущности, простой вертикальный маятникъ съ очень длиннымъ собственнымъ періодомъ колебаній T.

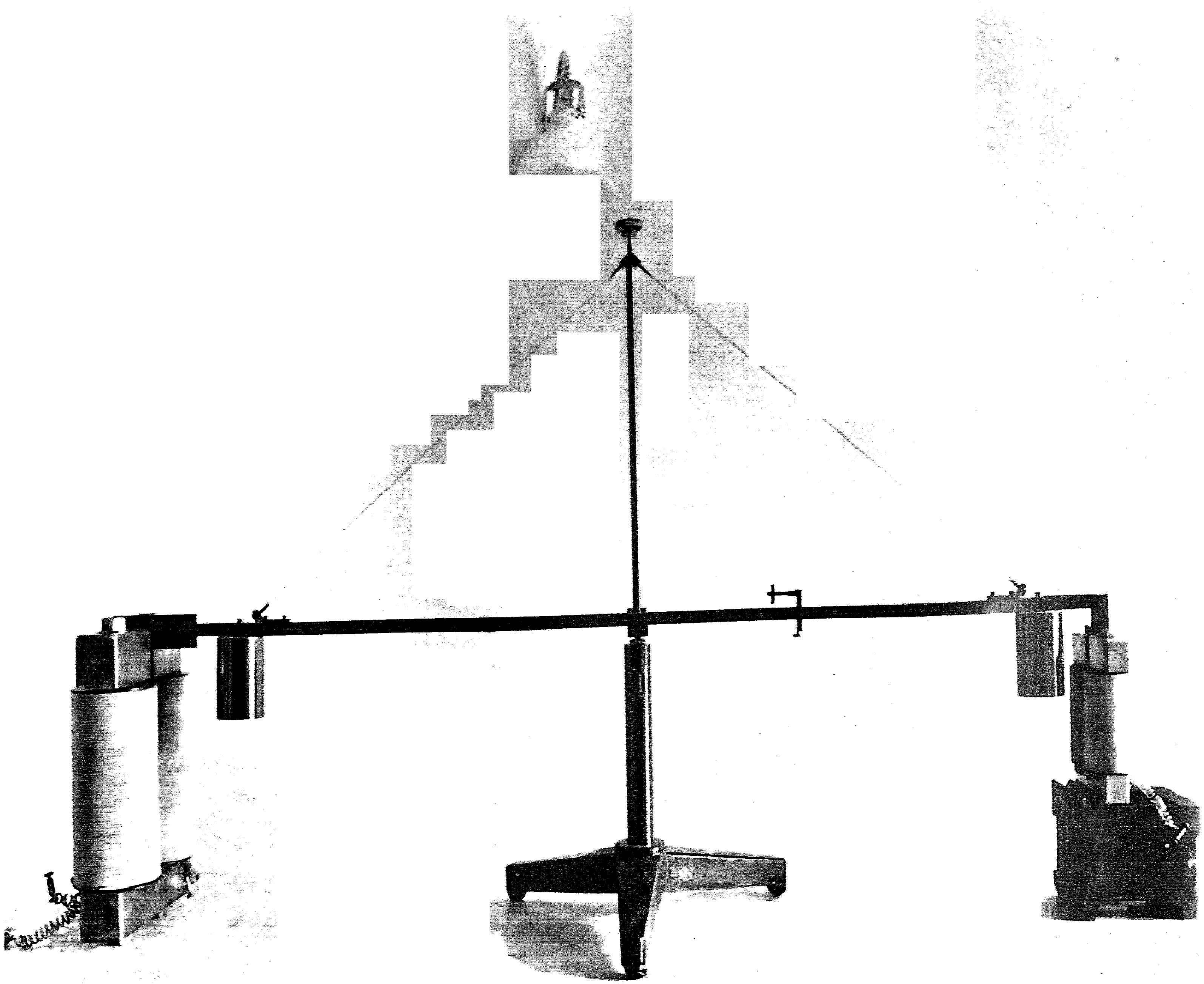
Рисунокъ такого клинографа, снабженнаго электромагнитнымъ затуханіемъ и приспособленнаго для гальванометрической регистраціи, представленъ на слѣдующемъ чертежѣ 120.

Если-бы r_0 было равно нулю, а, слѣдовательно, $T=\infty$, то клинографъ находился-бы въ безразличномъ равновѣсіи, и тогда, при наклонѣ почвы, коромысло, при отсутствіи всякаго тренія въ упорной призмѣ, сохранило-бы свое положеніе въ пространствѣ, и относительный наклонъ коромысла далъ-бы намъ тотчасъ соотвѣтствующую величину наклона почвы ψ.

Но, въ виду чрезвычайной малости угловъ ψ, такой приборъ былъ бы очень нечувствителенъ. Въ виду этого, Schlüter придѣлалъ къ концу коромысла особый увеличительный приборъ; на Пулковской-же станціи къ клинографу была приспособлена гальванометрическая регистрація.

Однако, на практикѣ, нельзя оставлять приборъ въ безразличномъ состояніи равновѣсія и дѣлать r_0 равнымъ нулю, такъ какъ въ такомъ случаѣ

Рис. 120.

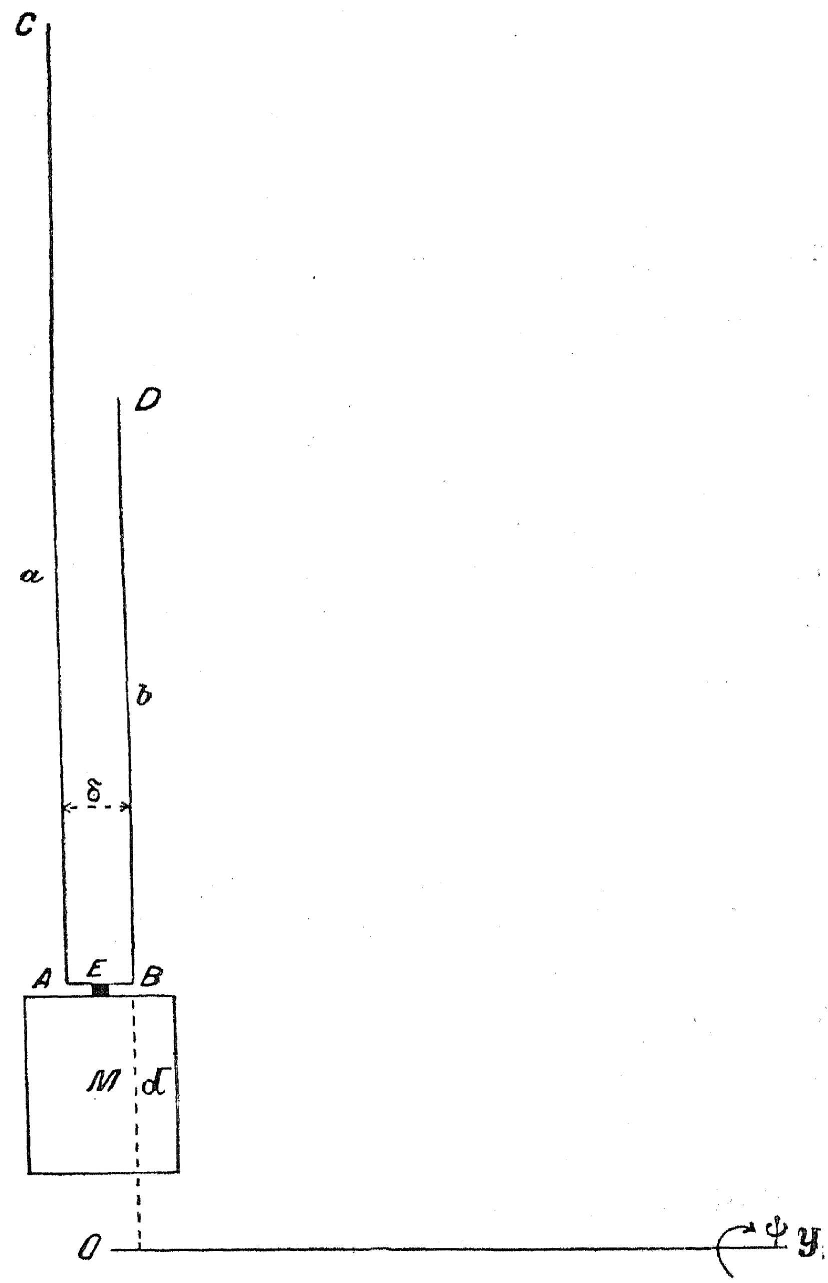


клинографъ будетъ слишкомъ неустойчивъ и подверженъ вліянію разныхъ случайныхъ причинъ и легко можетъ опрокинуться. Слѣдовательно, необходимо снабдить приборъ небольшимъ возстановляющимъ моментомъ, т.-е. помѣстить центръ тяжести нѣсколько ниже оси вращенія или прибѣгнуть къ содѣйствію весьма слабыхъ пружинъ. Но, если центръ тяжести находится ниже оси вращенія, то на такой клинографъ будутъ влiять и горизонтальныя смѣщенія почвы, параллельныя коромыслу, а потому такой клинографъ не будетъ въ состояніи регистрировать одни наклоны въ чистомъ видѣ.

Главный недостатокъ клинографа заключается въ его чрезвычайно малой чувствительности.

И, дѣйствительно, наблюденія надъ наклонами, произведенныя съ клинографомъ, какъ въ Göttingen'ѣ, такъ и въ Пулковѣ, ровно ничего не дали, а потому въ настоящее время приборъ этотъ совершенно оставленъ.

Черт. 121.



Другой, очень остроумный и простой приборъ, хорошо реагирующій на измѣненія наклоновъ почвы, былъ предложенъ англійскими учеными Davison'омъ и Sir H. Darwin'омъ. Устройство его видно изъ слѣдующаго схематическаго чертежа 121.

Тяжелая масса M, связанная съ перекладиной AB, подвѣшена на двухъ вертикальныхъ нитяхъ AC и BD неодинаковой длины; концы нитей C и D неизмѣнно связаны со штативомъ прибора.

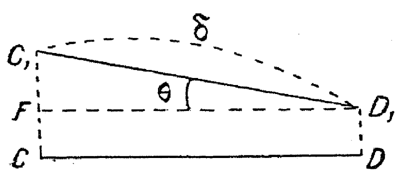
Обозначимъ длину первой нити черезъ a, а второй черезъ b, причемъ $a>b$.

Разстояніе между нитями вездѣ одинаково и равно δ.

Возвышеніе точекъ A и B надъ уровнемъ земли пусть будетъ d.

При равновѣсіи прибора, нити AC и BD должны находиться въ одной и той-же плоскости, такъ какъ въ данномъ положеніи у этого прибора не будетъ никакого крутящаго момента.

Черт. 122.



Предположимъ теперь, что поверхность земли наклонилась около оси Oy на весьма малый уголъ ψ.

Если смотрѣть на приборъ сверху (см. чертежъ 122), то, при нормальномъ положеніи прибора, верхнія точки прикрѣпленія нитей будутъ проэктироваться въ C и D, а, при наклонѣ ψ, точка C перемѣстится въ C_1, а точка D въ D_1, причемъ

$$CC_1 = (a + d)\psi$$

и

$$DD_1 = (b + d)\psi.$$

При новомъ положеніи равновѣсія прибора, нити должны находиться опять въ одной плоскости, а потому вся система не только подастся немного въ сторону, но и *повернется* на малый уголъ $C_1D_1F = \theta$.

Изъ треугольника C_1D_1F имѣемъ

$$\theta = \frac{C_1F}{\delta}.$$

Но, такъ какъ

$$C_1F = CC_1 - DD_1 = (a - b)\psi,$$

то мы получимъ окончательно

$$\theta = \frac{a-b}{\delta} \cdot \psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Формула (1) показываетъ, что, если $a - b$ велико, а δ мало, то такой приборъ можетъ обладать большою чувствительностью въ смыслѣ реагированія на измѣненіе наклоновъ.

Уголъ поворота θ можно регистрировать оптическимъ способомъ, прикрѣпивъ около середины перекладины AB въ E (см. черт. 121) небольшое зеркальце, причемъ предѣльная точность опредѣленія угла θ составляетъ, какъ мы видѣли раньше, если помѣстить регистрирный валъ въ разстояніи 4-хъ метровъ отъ зеркальца, около $2^1/_2''$.

Попробуемъ теперь оцѣнить, что такой приборъ можетъ дать.

Предположимъ, что $a = 4^1/_2$ метрамъ, а $b = \frac{1}{2}$ метра; δ возьмемъ равнымъ $2\ ^м/_м$.

Тогда

$$\frac{a-b}{\delta} = \frac{4000\ ^м/_м}{2\ ^м/_м} = 2000$$

и

$$\theta = 2000\,\psi.$$

Предѣльная точность опредѣленія угла ψ составляетъ, такимъ образомъ, примѣрно, $0{,}0012''$.

Это какъ разъ та-же предѣльная точность, которая, какъ мы видѣли въ концѣ § 2 главы VII, можетъ быть достигнута горизонтальнымъ маятникомъ, у котораго приведенная длина $l = 118\ ^м/_м$ и собственный періодъ колебаній $T = 31$ сек.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что приборъ Davison'а является столь же чувствительнымъ приборомъ для регистраціи наклоновъ, какъ и обыкновенный горизонтальный маятникъ, но онъ, тѣмъ не менѣе, также какъ и горизонтальный маятникъ, совершенно не пригоденъ для изслѣдованія наклоновъ *во время отдаленныхъ землетрясеній.*

Причина этого кроется въ томъ, что на приборъ Davison'а, какъ и на горизонтальный маятникъ, въ сильнѣйшей мѣрѣ вліяютъ горизонтальныя смѣщенія почвы.

Дѣйствительно, подъ вліяніемъ смѣщеній, приборъ Davison'а раскачивается на подобіе простого вертикальнаго маятника, а всякое такое движеніе, благодаря неодинаковой длинѣ нитей, неизбѣжно сопровождается *вращеніемъ* прибора, такъ что нѣтъ никакой возможности, какъ и при горизонтальномъ маятникѣ, отдѣлить смѣщенія отъ наклоновъ.

Общая теорія движенія прибора Davison'а съ бифилярнымъ подвѣсомъ при нитяхъ неодинаковой длины довольно сложная, но она представляетъ собою много любопытныхъ особенностей. Эта теорія изложена подробно въ особой статьѣ «Über die Methoden zur Beobachtung von Neigungswellen», помѣщенной въ Извѣстіяхъ Постоянной Центральной Сейсмической Комиссіи, Т. II, выпускъ 2.

Тѣмъ не менѣе приборъ Davison'а могъ-бы съ успѣхомъ служить для изслѣдованія наклоновъ почвы при брадисейсмическихъ явленіяхъ, напр., при изученіи деформацій земли подъ вліяніемъ лунно-солнечнаго притяженія, такъ какъ въ этомъ случаѣ съ быстрыми смѣщеніями почвы болѣе считаться не приходится.

Обратимся теперь къ горизонтальному маятнику.

Въ § 1 главы V-ой мы вывели уравненіе (24), представляющее собою дифференціальное уравненіе движенія горизонтальнаго маятника подъ совокупнымъ вліяніемъ смѣщеній и наклоновъ.

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta + \frac{1}{l}(x'' - g\psi) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Это уравненіе показываетъ, что уголъ отклоненія маятника θ зависитъ всегда отъ комбинаціи величинъ $x'' - g\psi$, и что съ однимъ такимъ маятникомъ никоимъ образомъ нельзя отдѣлить смѣщеній отъ наклоновъ. Если мы, однако, нашли возможнымъ примѣнить горизонтальный маятникъ къ изученію смѣщеній почвы при землетрясеніяхъ, то это обуславливалось исключительно тѣмъ обстоятельствомъ, что, при дальнихъ землетрясеніяхъ, въ виду большой длины волны λ поверхностныхъ сейсмическихъ волнъ, наклоны ψ такъ малы, что членомъ $g\psi$ можно, въ большинствѣ случаевъ, пренебречь въ сравненіи съ x''.

Наша-же задача заключается, однако, именно въ томъ, чтобы получить уголъ ψ какъ функцію времени t. Съ однимъ горизонтальнымъ маятникомъ этого, однако, никоимъ образомъ достигнуть нельзя, такъ какъ смѣщенія почвы будутъ всегда маскировать вліяніе наклоновъ. Для брадисейсмическихъ явленій, когда $x'' = 0$, такой горизонтальный маятникъ является вполнѣ подходящимъ приборомъ для измѣренія угловъ ψ; но насъ теперь спеціально интересуетъ вопросъ объ опредѣленіи ψ при *тахисейсмическихъ* явленіяхъ, т.-е. при землетрясеніяхъ.

Можно, однако, воспользоваться *двумя* горизонтальными маятниками и осуществить такой приборъ, который будетъ регистрировать наклоны въ чистомъ видѣ, т.-е. *совершенно независимо* отъ какихъ-либо смѣщеній, что ни клинографомъ, ни приборомъ Davison'а, совершенно недостижимо.

Разсмотримъ теперь теорію этого способа.

Возьмемъ два *совершенно одинаковыхъ* горизонтальныхъ маятника съ сильнымъ затуханіемъ и съ гальванометрической регистраціей, установленныхъ на тотъ-же періодъ T.

Постоянныя этихъ маятниковъ, т.-е. n, μ^2 или ε, l и k пусть будутъ равны между собою.

Одинъ маятникъ помѣстимъ у поверхности земли, а другой надъ нимъ, причемъ вертикальное разстояніе между соотвѣтствующими точками обоихъ маятниковъ пусть будетъ равно s.

Тогда, если горизонтальное смѣщеніе опредѣленной точки штатива перваго маятника есть x, то, при наличіи положительнаго наклона почвы ψ,

смѣщеніе соотвѣтствующей точки штатива второго маятника будетъ очевидно

$$x + s\psi.$$

Обозначимъ уголъ отклоненія перваго маятника черезъ θ_1, а второго черезъ θ_2.

Тогда θ_1 и θ_2 должны соотвѣтственно удовлетворять слѣдующимъ двумъ дифференціальнымъ уравненіямъ:

$$\theta_1'' + 2\varepsilon\theta_1' + n^2\theta_1 + \frac{1}{l}(x'' - g\psi) = 0$$

и

$$\theta_2'' + 2\varepsilon\theta_2' + n^2\theta_2 + \frac{1}{l}(x'' + s\psi'' - g\psi) = 0.$$

Вычитая первое уравненіе изъ второго и обозначая разность $\theta_2 - \theta_1$ черезъ θ,

$$\theta_2 - \theta_1 = \theta, \ldots\ldots \tag{3}$$

будемъ имѣть

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta + \frac{s}{l}\psi'' = 0 \ldots\ldots \tag{4}$$

Предположимъ теперь, что каждый такой маятникъ соединенъ съ *однимъ и тѣмъ-же* гальванометромъ, поставленнымъ на границу апе105ріодичности ($\varepsilon_1 = n_1$). Уголъ отклоненія гальванометра подъ вліяніемъ движенія перваго маятника обозначимъ черезъ φ_1; соотвѣтствующая-же величина для второго маятника пусть будетъ φ_2.

Тогда

$$\varphi_1'' + 2n_1\varphi_1' + n_1^2\varphi_1 + k\theta_1' = 0 \ldots\ldots \tag{5}$$

и

$$\varphi_2'' + 2n_1\varphi_2' + n_1^2\varphi_2 + k\theta_2' = 0 \ldots\ldots \tag{6}$$

Соединимъ теперь провода отъ маятниковъ съ гальванометромъ такимъ образомъ, чтобы индукціонные токи, проходящіе черезъ подвижную обмотку гальванометра, шли-бы въ противоположныхъ направленіяхъ.

Тогда то, что мы будемъ непосредственно наблюдать, будетъ разность угловъ φ_2 и φ_1, т.-е.

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Вычитая уравненіе (5) изъ уравненія (6), и принимая во вниманіе обозначеніе (3), будемъ имѣть

$$\varphi'' + 2n_1\varphi' + n_1^2\varphi + k\theta' = 0 \ldots\ldots \tag{7}$$

Формулы (7) и (4) показываютъ, что измѣряемые углы отклоненія гальванометра φ совершенно не зависятъ отъ смѣщеній почвы x, а обуславливаются исключительно только вліяніемъ наклоновъ ψ.

Такой *двойной маятникъ* даетъ, такимъ образомъ, полную возможность изучать наклоны почвы *въ чистомъ видѣ* при тахисейсмическихъ явленіяхъ.

Уравненія (4) и (7) имѣютъ *совершенно тотъ-же видъ*, какъ тѣ, которыми мы пользовались для изслѣдованія горизонтальныхъ смѣщеній почвы, при примѣненіи гальванометрическаго метода регистраціи, съ той лишь разницей, что теперь, вмѣсто x'', входитъ $s\psi''$ (см. уравненіе (25) § 1 главы V и уравненіе (32) § 3 главы VI, гдѣ еще $\varepsilon_1 = n_1$).

Мы можемъ, слѣдовательно, примѣнить къ этому случаю всѣ ранѣе выведенныя формулы.

Предположимъ теперь, что уголъ ψ удовлетворяетъ закону гармоническихъ колебаній

$$\psi = \psi_m \sin(pt + \delta), \dots\dots\dots\dots\dots\dots (8)$$

гдѣ

$$p = \frac{2\pi}{T_p} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (9)$$

T_p есть періодъ соотвѣтствующей сейсмической волны.

Предположимъ далѣе, для простоты, что собственный періодъ маятниковъ T точно установленъ на періодъ гальванометра T_1, и что оба маятника точно поставлены на границу апеуіодичности ($\mu^2 = 0$).

Тогда, обозначая черезъ y_m максимальную амплитуду синусоиды, записанной гальванометромъ на регистрирномъ валѣ, а черезъ u отношеніе $\frac{T_p}{T}$, будемъ, согласно формуламъ (46) и (47) § 3 главы VI, имѣть

$$s\psi_m = \frac{\pi l}{kA_1} \cdot (1 + u^2)^2 \frac{y_m}{T_p}, \dots\dots\dots\dots\dots (10)$$

откуда легко найдется искомая величина ψ_m.

Періодъ-же T_p непосредственно снимается съ сейсмограммы.

Посмотримъ-же теперь, что такой двойной маятникъ можетъ дать, иначе говоря, какъ велика его чувствительность.

Изъ формулы (10) находимъ, замѣняя T_p черезъ uT; что

$$y_m = s \cdot \frac{kA_1}{\pi l} \cdot T \cdot \frac{u}{(1 + u^2)^2} \cdot \psi_m \dots\dots\dots\dots (11)$$

Максимальное значеніе $\frac{u}{(1 + u^2)^2}$, какъ мы видѣли раньше въ § 4 главы VI, равно 0,325.

Примемъ ψ_m чрезвычайно малымъ, а именно

$$\psi''_m = 0{,}01''$$

или

$$\psi_m = 0{,}01''.\sin 1'' = \frac{0{,}01}{206000}$$

Примемъ далѣе

$$s = 10 \text{ метр.} = 10000 \,{}^{\text{м}}/_{\text{м}}$$

$$k = 300$$

$$A_1 = 4000 \,{}^{\text{м}}/_{\text{м}}$$

$$l = 100 \,{}^{\text{м}}/_{\text{м}}$$

и

$$T = 30 \text{ сек.}$$

Тогда

$$y_m = 10000 \cdot \frac{300.4000}{\pi.100} \cdot 30.0{,}325 \cdot \frac{0{,}01}{206000} = 18{,}1 \,{}^{\text{м}}/_{\text{м}}.$$

Считая предѣльную точность опредѣленія y_m въ $0{,}1 \,{}^{\text{м}}/_{\text{м}}$, мы видимъ, что предѣльная точность въ опредѣленіи угла ψ, т.-е. $\Delta\psi$, будетъ

$$\Delta\psi = 0{,}000055'',$$

т.-е. *55 милліонныхъ секунды дуги.*

Мы взяли здѣсь для вычисленія $\Delta\psi$ максимальное значеніе функціи $\frac{u}{(1+u^2)^2}$. Понятно, что, при другихъ значеніяхъ $u = \frac{T_p}{T}$, увеличеніе прибора будетъ меньше, но, во всякомъ случаѣ, такой двойной маятникъ обладаетъ вполнѣ достаточной чувствительностью для изслѣдованія наклоновъ почвы при дальнихъ землетрясеніяхъ.

Этотъ приборъ не былъ ни разу еще испытанъ на практикѣ при сейсмическихъ наблюденіяхъ, но, при лабораторныхъ испытаніяхъ съ подвижной платформой, онъ далъ въ высшей степени благопріятные результаты.

Платформѣ этой, представляющей собою какъ бы поверхность земли, можно было давать, при помощи особыхъ эксцентрическихъ валовъ, ритмическія горизонтальныя смѣщенія и одновременно наклоны. Вмѣсто горизонтальныхъ маятниковъ, были взяты два точно урегулированныхъ (равенство различныхъ постоянныхъ), вертикальныхъ маятника, подвѣшенные на сталь-

ныхъ пластинкахъ къ одной и той-же рамѣ, одинъ надъ другимъ, и имѣвшіе, слѣдовательно, опредѣленную плоскость колебаній.

Слѣдующій рисунокъ 123 представляетъ собою такой двойной вертикальный маятникъ, установленный на подвижной платформѣ.

Внизу видны электромагниты для магнитнаго затуханія и гальванометрической регистраціи движенія нижняго маятника.

Электромагниты для верхняго маятника помѣщались на особомъ деревянномъ помостѣ, установленномъ на той-же платформѣ (см. рисунокъ 124).

Истинное движеніе платформы регистрировалось также зеркальнымъ способомъ на той-же фотографической бумагѣ, что и движеніе гальванометра.

На слѣдующихъ чертежахъ 125, 126, 127, 128 и 129 внутреннія кривыя, съ меньшими амплитудами, представляютъ собою движеніе платформы, а наружныя, движеніе гальванометра.

Кривыя 125 и 126 соотвѣтствуютъ тому случаю, когда платформа имѣла только ритмическіе наклоны, причемъ періоды движенія были въ обоихъ случаяхъ различны. Мы видимъ, что кривая гальванометра въ точности воспроизводитъ характеръ движенія платформы, причемъ періоды T_p обоихъ движеній, — гальванометра и платформы, — вполнѣ тождественны.

Если-же давать платформѣ только *одни смѣщенія*, то гальванометръ остается все время совершенно въ покоѣ, что указываетъ на полную возможность компенсировать силу индукціонныхъ токовъ, идущихъ по противоположнымъ направленіямъ черезъ подвижную катушку гальванометра.

Чертежи 127 и 128 соотвѣтствуютъ тому случаю, когда платформа имѣла *одновременно* ритмическіе смѣщенія и наклоны, что видно изъ формы кривой движенія платформы — двойная синусоида. Гальванометръ-же даетъ въ этомъ случаѣ простую синусоиду, соотвѣтствующую *однимъ наклонамъ*, періодъ которой въ точности равенъ періоду наклоновъ платформы. Мы видимъ, слѣдовательно, что смѣщенія платформы совершенно не отзываются на данномъ приборѣ, который регистрируетъ, такимъ образомъ, одни лишь наклоны.

Но особенно поучительна кривая 129.

Она соотвѣтствуетъ тому случаю, когда платформа имѣла правильные, ритмическіе наклоны, но одновременно давали платформѣ рукой и рядъ совершенно неправильныхъ и произвольныхъ смѣщеній, которыя ясно видны на внутренней кривой. И въ этомъ случаѣ двойной маятникъ продолжалъ чертить правильную синусоиду, соотвѣтствующую однимъ лишь наклонамъ, нисколько не отзываясь на неправильныя смѣщенія платформы.

Рис. 123.

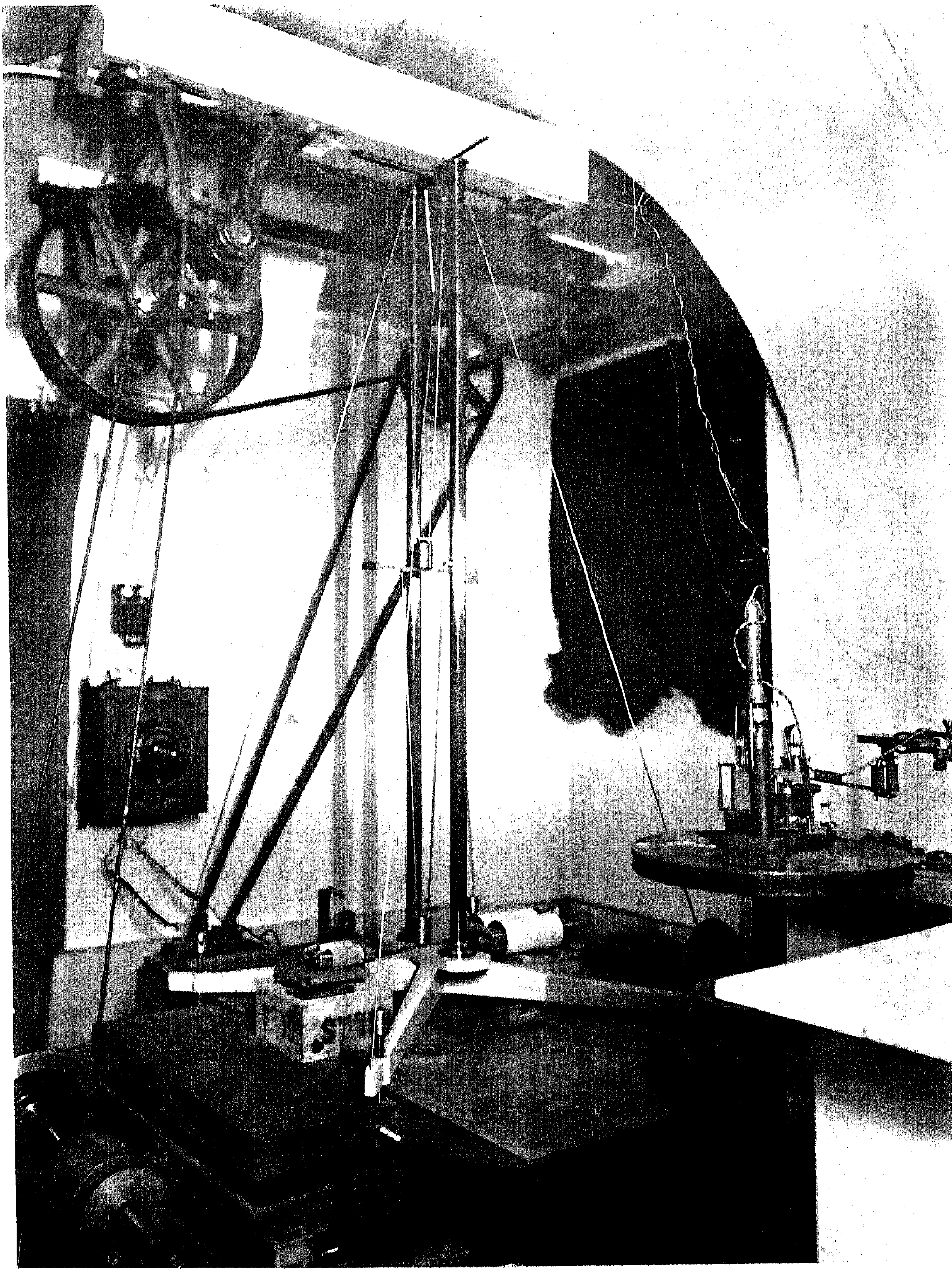
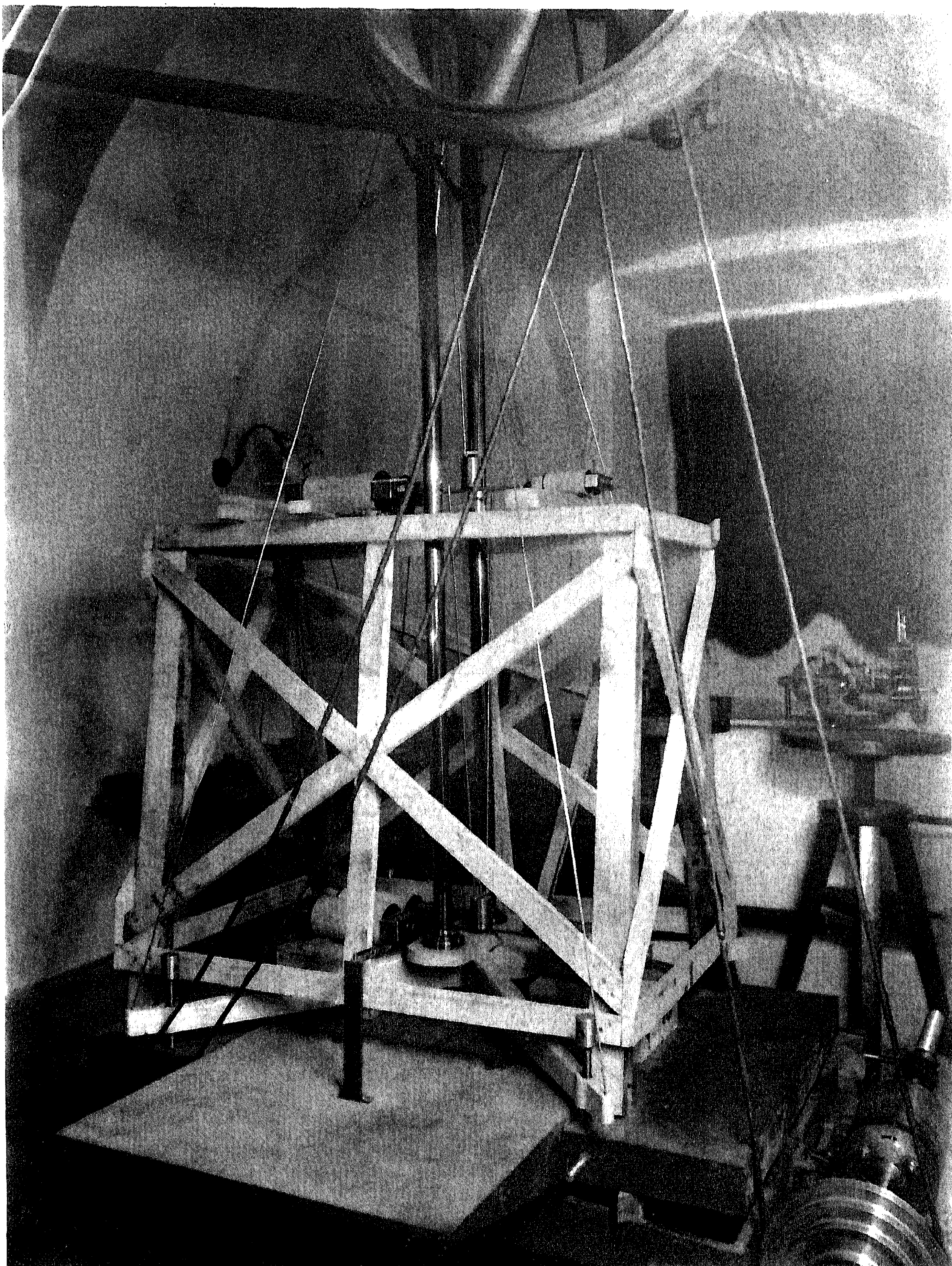
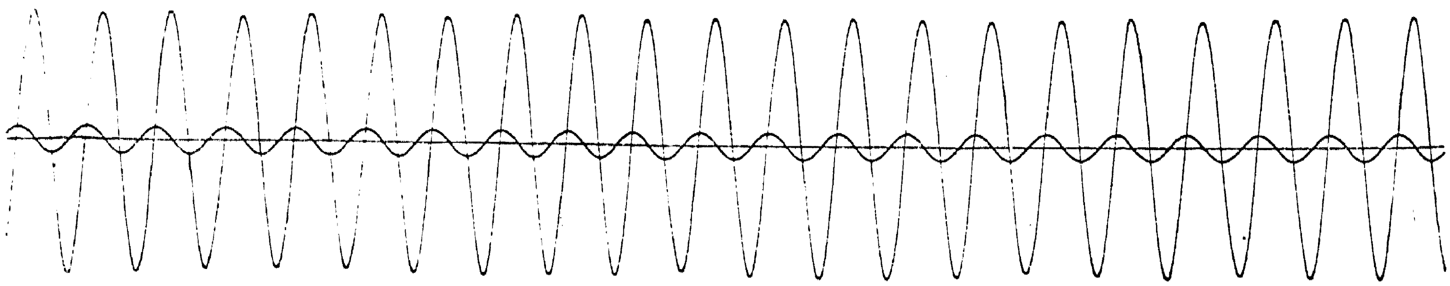


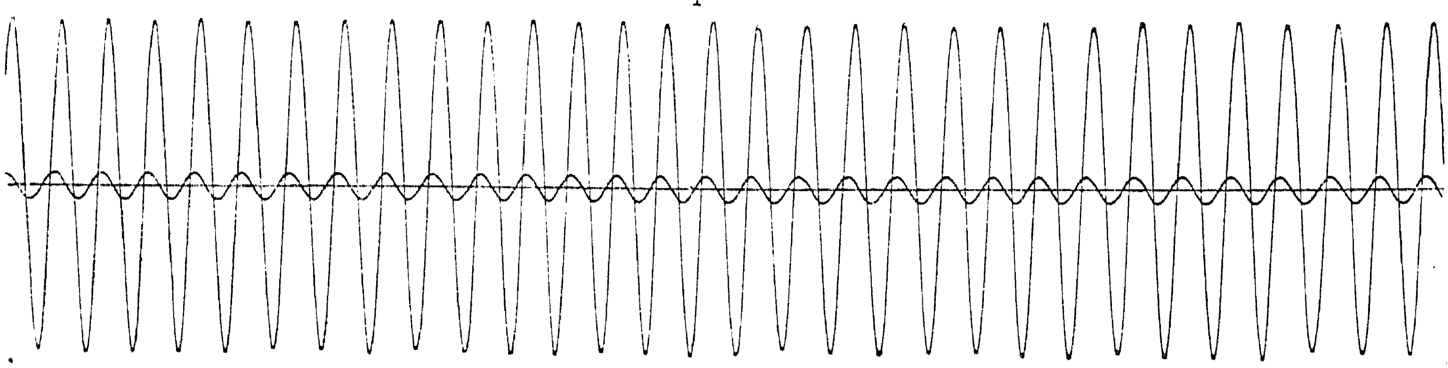
Рис. 124.



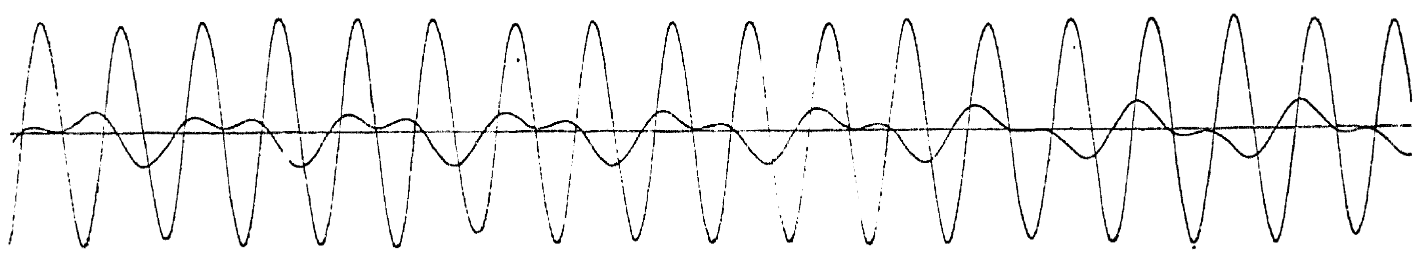
Черт. 125.



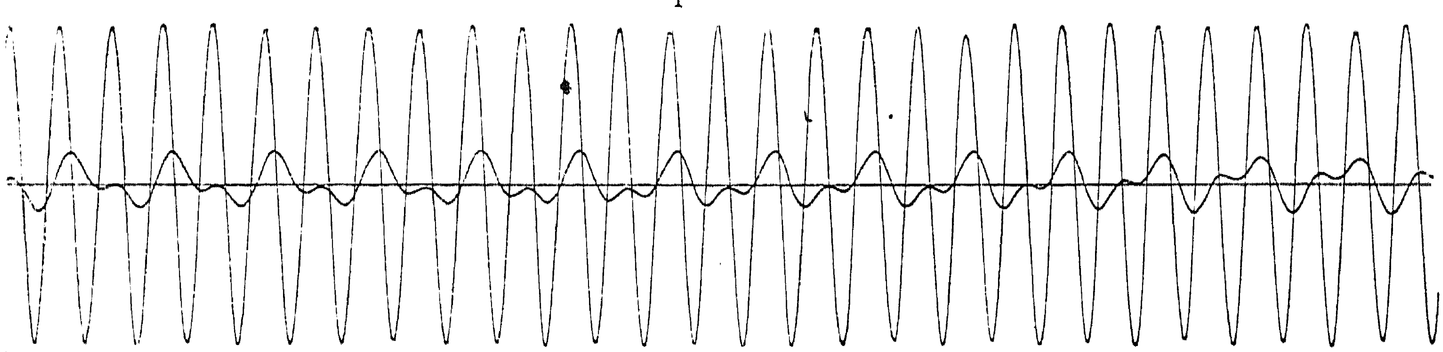
Черт. 126.



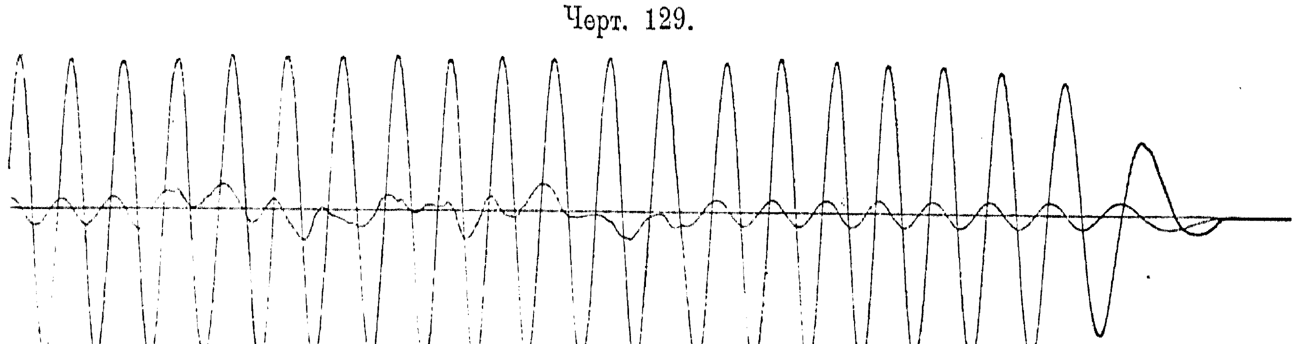
Черт. 127.



Черт. 128.



Черт. 129.



Эти опыты настолько убѣдительны, что не подлежитъ никакому сомнѣнію, что, при соблюденіи извѣстныхъ предосторожностей и при хорошей компенсаціи маятниковъ, такой двойной сейсмографъ могъ-бы съ успѣхомъ быть примѣненъ для изслѣдованія наклоновъ почвы при дальнихъ землетрясеніяхъ.

Въ заключеніе можно еще указать на то, что наклоны почвы ψ можно получить еще и косвеннымъ путемъ, изъ наблюденій съ вертикальнымъ сейсмографомъ.

Если по поверхности земли идетъ правильная сейсмическая волна съ періодомъ T_p, то, какъ мы видѣли въ § 3 главы IV, вертикальное смѣщеніе почвы z въ различныхъ разстояніяхъ s отъ эпицентра и въ опредѣленный моментъ t можетъ быть представлено слѣдующей формулой (см. стр. 257):

$$z = z_m \sin\left\{2\pi \frac{s}{\lambda} + \delta\right\}, \dots\dots\dots\dots (12)$$

гдѣ λ есть соотвѣтствующая длина волны, равная произведенію скорости распространенія V поверхностныхъ сейсмическихъ волнъ на періодъ T_p,

$$\lambda = VT_p, \dots\dots\dots\dots (13)$$

а δ нѣкоторая постоянная, не имѣющая дальнѣйшаго практическаго значенія.

По сейсмограммѣ отъ вертикальнаго сейсмографа можно опредѣлить, въ данномъ, опредѣленномъ мѣстѣ, величины T_p и z_m.

Наклонъ почвы ψ будетъ, въ данный моментъ t, равенъ $\frac{dz}{ds}$.

$$\psi = \frac{2\pi}{\lambda} z_m \cos\left\{2\pi \frac{s}{\lambda} + \delta\right\}$$

или, согласно формулѣ (13),

$$\psi = \frac{2\pi}{VT_p} z_m \cos\left\{2\pi \frac{s}{\lambda} + \delta\right\}.$$

Слѣдовательно, абсолютная величина максимальнаго наклона почвы ψ_m опредѣлится по слѣдующей простой формулѣ:

$$\psi_m = \frac{2\pi}{V} \cdot \frac{z_m}{T_p} \dots\dots\dots\dots (14)$$

Въ виду значительной величины V (около 3,5 километровъ въ секунду) и незначительности амплитуды z_m, которая только въ исключительныхъ случаяхъ достигаетъ, при дальнихъ землетрясеніяхъ, одного миллиметра, наклоны почвы въ большинствѣ случаевъ совершенно ничтожны.

Систематическимъ изслѣдованіемъ наклоновъ современная сейсмометрія еще не занималась.

Это задача будущаго.

Глава X.

Изслѣдованіе сейсмограммъ.

§ 1.

Опредѣленіе азимута эпицентра.

При обработкѣ сейсмограммъ, первымъ дѣломъ надо опредѣлить, по возможности точно, моменты начала первой и второй предварительной фазы землетрясенія P и S, соотвѣтствующія моментамъ вступленія первыхъ продольныхъ и поперечныхъ волнъ, прошедшихъ отъ очага землетрясенія къ мѣсту наблюденія сквозь толщу земли.

Моментъ P большею частью легко точно опредѣлить, особенно если прибѣгнуть къ содѣйствію вертикальнаго сейсмографа. Около начала первой фазы обыкновенно наблюдается рядъ весьма мелкихъ сейсмическихъ волнъ съ короткими періодами (preliminary tremors), имѣющія совершенно своеобразный характеръ, и въ этомъ отношеніи трудно бываетъ ошибиться, какую именно точку сейсмограммы слѣдуетъ принять за начало первой фазы P.

Другое дѣло со второй фазой S.

На нѣкоторыхъ сейсмограммахъ она бываетъ довольно неотчетливо выражена, и тогда бываетъ затруднительно точно опредѣлить моментъ начала S. Если, однако, внимательно прослѣдить запись прибора, то обыкновенно, особенно при гальванометрическомъ способѣ регистраціи, можно подмѣтить то мѣсто, гдѣ болѣе или менѣе рѣзко вступаетъ новая группа волнъ. Это мѣсто и надо принять за начало S. Гальванометрическій методъ регистраціи, въ виду его большой чувствительности, представляетъ въ этомъ отношеніи большія преимущества. Иногда заграничныя станціи, примѣня-

ющія другіе способы регистраціи, вовсе не даютъ S, тогда какъ на Пулковскихъ сейсмограммахъ начало второй фазы очень отчетливо видно.

Когда начало P или S очень рѣзко выражено, т.-е., когда наблюдается рѣзкое, внезапное уклоненіе прибора, то при буквахъ P и S ставится символъ i (impetus); когда-же вступленіе продольныхъ или поперечныхъ волнъ представляется болѣе или менѣе неотчетливымъ, то ставится символъ e (emersio).

Эти символы употребляются также и для самостоятельнаго обозначенія разныхъ характерныхъ мѣстъ на сейсмограммахъ, когда природа фазы не ясна.

Никакія поправки для моментовъ P и S на запаздываніе въ показаніяхъ прибора по отношенію къ истинному движенію почвы здѣсь не требуются, такъ какъ вступленіе волнъ первой и второй предварительной фазы представляетъ собою до извѣстной степени явленіе внезапное.

Когда моменты P и S сняты съ сейсмограммы, то по разности $S—P$ опредѣляется, по ранѣе приведенной таблицѣ II Zeissig'а (см. стр. 138) для разности временъ пробѣга поперечныхъ и продольныхъ волнъ, эпицентральное разстояніе Δ.

Чтобы найти географическія координаты эпицентра, надо еще опредѣлить его азимутъ.

Этимъ вопросомъ мы теперь и займемся.

Предположимъ, что къ мѣсту наблюденія пришла продольная, синусоидальная волна (начало P), и разсмотримъ пока только проэкцію горизонтальнаго смѣщенія почвы въ меридіанѣ.

За начало счета временъ возьмемъ моментъ вступленія этой волны.

Тогда мы можемъ положить

$$x = x_m \sin pt, \quad \ldots\ldots (1)$$

гдѣ

$$p = \frac{2\pi}{T_p} \quad \ldots\ldots (2)$$

Предположимъ, что это движеніе почвы регистрируется горизонтальнымъ маятникомъ съ гальванометрической регистраціей, причемъ, для простоты, мы примемъ, что маятникъ строго установленъ на границу апеDіодичности, слѣдовательно, $\mu^2 = 0$ или $\varepsilon = n$, и что собственный періодъ колебаній маятника безъ затуханія T въ точности равенъ собственному періоду колебаній гальванометра T_1.

Тогда

$$n = n_1. \qquad \left(n = \frac{2\pi}{T}\right).$$

Къ этому надо всегда стремиться, такъ какъ тогда всѣ выводы и формулы значительно упрощаются.

Въ этомъ случаѣ, согласно предыдущему, дифференціальное уравненіе движенія маятника представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$\theta'' + 2n\theta' + n^2\theta + \frac{1}{l}x'' = 0 \dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

Для гальванометра-же мы будемъ имѣть

$$\varphi'' + 2n\varphi' + n^2\varphi + k\theta' = 0 \dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

Подъ вліяніемъ такой волны гальванометръ отклонится отъ своего положенія равновѣсія и уголъ φ достигнетъ вскорѣ нѣкотораго максимума φ_m; соотвѣтствующій моментъ пусть будетъ t_m.

Обозначимъ соотвѣтствующее первому максимуму φ_m отклоненіе свѣтовой точки на барабанѣ черезъ y_m, а разстояніе поверхности регистрирнаго вала до зеркальца гальванометра, въ направленіи нормально падающаго луча, черезъ A_1.

Тогда

$$\varphi_m = \frac{y_m}{2A_1} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (5)$$

y_m соотвѣтствуетъ, такимъ образомъ, первому максимуму на сейсмограммѣ вслѣдъ за началомъ P.

y_m и T_p снимаются непосредственно съ сейсмограммы.

Задача состоитъ въ томъ, чтобы, зная y_m, T_p и постоянныя сейсмографа n, l, k и A_1, найти максимальное смѣщеніе почвы x_m.

Задача эта нѣсколько сложная, въ виду того, что максимумъ y_m наступаетъ весьма скоро послѣ начала движенія (черезъ 1—2 секунды), и теперь уже, при интегрированіи системы совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій (3) и (4), приходится уже считаться съ начальными условіями движенія, т.-е. опредѣлять значеніе постоянныхъ произвольныхъ, входящихъ въ выраженіе общихъ интеграловъ уравненій (3) и (4).

Эти начальныя условія движенія будутъ слѣдующія.

При $\qquad t = 0, \qquad \theta_0 = 0 \qquad$ и $\qquad \varphi_0 = 0.$

Начальныя угловыя скорости θ_0' и φ_0' найдутся по общему пріему почленнаго интегрированія уравненій (3) и (4) между предѣлами $t = 0$ и $t = \tau$, гдѣ τ очень малая величина, въ предѣлѣ равная нулю.

Изъ уравненія (3) находимъ

$$\theta'_0 + \frac{1}{l} x_0' = 0,$$

а, изъ уравненія (4),

$$\varphi_0' + k\theta_0 = 0$$

или

$$\varphi_0' = 0.$$

Формула (1) даетъ

$$x_0' = p\, x_m;$$

слѣдовательно,

$$\theta_0' = -\frac{p}{l} x_m \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (6)$$

Съ другой стороны,

$$x'' = -p^2 x_m \sin pt.$$

Такимъ образомъ, мы будемъ имѣть (см. формулу (3))

$$\theta'' + 2n\theta' + n^2\theta = \frac{p^2 x_m}{l} \sin pt \dots\dots\dots\dots\dots (7)$$

Введемъ теперь, для простоты, слѣдующія обозначенія:

$$A = \frac{p^2 x_m}{l} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (8)$$

и

$$\sin pt = \Phi(t) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (9)$$

Тогда уравненіе (7) можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\theta'' + 2n\theta' + n^2\theta = A\,\Phi(t) \dots\dots\dots\dots\dots (10)$$

Это уравненіе, по формѣ своей, вполнѣ похоже на уравненіе (70) § 3 главы VII, гдѣ, вмѣсто φ, входитъ θ, вмѣсто ν, n, вмѣсто u, t, а $\mu^2 = 0$.

Общій интегралъ этого уравненія былъ уже нами найденъ въ видѣ формулы (77) того-же § 3 главы VII.

Слѣдовательно,

$$\theta = e^{-nt}[\Gamma_1 + \Gamma_2 t] - Ae^{-nt}\left[\int t\, e^{nt}\,\Phi(t)\,dt - t\int e^{nt}\,\Phi(t)\,dt\right].$$

Обозначимъ первый изъ этихъ неопредѣленныхъ интеграловъ черезъ S_1, а второй черезъ S_2.

Тогда, подставляя сюда значеніе $\Phi(t)$ изъ формулы (9), будемъ имѣть

$$S_1 = \int t\, e^{nt} \sin pt\, dt, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

$$S_2 = \int e^{nt} \sin pt\, dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

и

$$\theta = e^{-nt}[\Gamma_1 + \Gamma_2 t] - Ae^{-nt}[S_1 - tS_2] \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Интегрируя S_1 по частямъ, находимъ

$$S_1 = \int t\, dS_2 = tS_2 - \int S_2\, dt;$$

слѣдовательно,

$$S_1 - tS_2 = -\int S_2\, dt = -\int dt \int e^{nt} \sin pt\, dt$$

и

$$\theta = e^{-nt}[\Gamma_1 + \Gamma_2 t] + Ae^{-nt} \int S_2\, dt \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Найдемъ теперь S_2.

Въ § 3 главы V-ой мы имѣли слѣдующія двѣ общія интегральныя формулы (см. формулы (80) и (81)):

$$\int e^{\varepsilon t} \cos(qt + \sigma)\, dt = \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2 + q^2}[q \sin(qt + \sigma) + \varepsilon \cos(qt + \sigma)] \ldots (15)$$

и

$$\int e^{\varepsilon t} \sin(qt + \sigma)\, dt = \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2 + q^2}[\varepsilon \sin(qt + \sigma) - q \cos(qt + \sigma)] \ldots (16)$$

Примѣняя ихъ къ нашему случаю, будемъ имѣть

$$S_2 = \frac{e^{nt}}{n^2 + p^2}[n \sin pt - p \cos pt].$$

Интегрируемъ еще разъ.

Тогда

$$\int S_2\, dt = \frac{n}{n^2 + p^2} \int e^{nt} \sin pt\, dt - \frac{p}{n^2 + p^2} \int e^{nt} \cos pt\, dt$$

или, на основаніи тѣхъ-же формулъ (15) и (16),

$$\int S_2\, dt = \frac{e^{nt}}{n^2 + p^2}\left[\frac{n}{n^2 + p^2}\{n \sin pt - p \cos pt\} - \frac{p}{n^2 + p^2}\{p \sin pt + n \cos pt\}\right]$$

$$= \frac{e^{nt}}{(n^2 + p^2)^2}[(n^2 - p^2) \sin pt - 2pn \cos pt].$$

Подставляя эту величину въ формулу (14) и замѣняя A его выраженіемъ изъ формулы (8), будемъ имѣть

$$\theta = e^{-nt}[\Gamma_1 + \Gamma_2 t] + \frac{p^2 x_m}{l} \cdot \frac{1}{(n^2+p^2)^2}[(n^2-p^2)\sin pt - 2pn\cos pt] \ldots (17)$$

Опредѣлимъ теперь постоянныя Γ_1 и Γ_2.

Возьмемъ для этого производную θ'.

$$\theta' = e^{-nt}[-n\Gamma_1 - n\Gamma_2 t + \Gamma_2] + \frac{p^3 x_m}{l} \cdot \frac{1}{(n^2+p^2)^2}[(n^2-p^2)\cos pt + 2pn\sin pt] \ldots (18)$$

Положимъ теперь въ формулахъ (17) и (18) $t = 0$.

Тогда

$$0 = \Gamma_1 - 2\frac{p^3 n x_m}{l(n^2+p^2)^2}$$

и

$$\theta_0' = -\frac{p x_m}{l} = -n\Gamma_1 + \Gamma_2 + \frac{p^3 x_m}{l} \cdot \frac{n^2-p^2}{(n^2+p^2)^2}.$$

Отсюда находимъ

$$\Gamma_1 = \frac{2p^3 n}{(n^2+p^2)^2} \cdot \frac{x_m}{l}$$

и

$$\Gamma_2 = \frac{2p^3 n^2}{(n^2+p^2)^2} \cdot \frac{x_m}{l} - \frac{p x_m}{l} - \frac{p^3(n^2-p^2)}{(n^2+p^2)^2} \cdot \frac{x_m}{l}$$

или

$$\Gamma_2 = \frac{p}{(n^2+p^2)^2} \cdot \frac{x_m}{l}\left[2p^2 n^2 - (n^2+p^2)^2 - p^2(n^2-p^2)\right]$$

$$= \frac{p}{(n^2+p^2)^2} \cdot \frac{x_m}{l}[2p^2 n^2 - n^4 - 2p^2 n^2 - p^4 - p^2 n^2 + p^4]$$

$$= \frac{p}{(n^2+p^2)^2} \cdot \frac{x_m}{l}[-n^2 - p^2]\, n^2,$$

или, окончательно,

$$\Gamma_2 = -\frac{p n^2}{n^2+p^2} \cdot \frac{x_m}{l}.$$

Подставляя эти величины для Γ_1 и Γ_2 въ формулу (17), получимъ

$$\theta = e^{-nt}\left[\frac{2p^3 n}{(n^2+p^2)^2} \cdot \frac{x_m}{l} - \frac{p n^2}{n^2+p^2} \cdot \frac{x_m}{l}\, t\right]$$

$$+ \frac{p^2}{(n^2+p^2)^2}[(n^2-p^2)\sin pt - 2pn\cos pt]\frac{x_m}{l} \ldots (19)$$

Таково выраженіе для θ.

Теперь надо опредѣлить отсюда θ' и подставить его въ дифференціальное уравненіе (4).

Изъ уравненія (19) находимъ

$$\theta' = \frac{x_m}{l}\left[e^{-nt}\left\{-\frac{2p^3 n^2}{(n^2+p^2)^2} + \frac{pn^3}{(n^2+p^2)}\cdot t - \frac{pn^2}{n^2+p^2}\right\}\right.$$
$$\left. + \frac{p^3}{(n^2+p^2)^2}\left\{(n^2-p^2)\cos pt + 2pn\sin pt\right\}\right]$$

или

$$\theta' = p\frac{x_m}{l}\left[e^{-nt}\left\{-\frac{n^2(n^2+3p^2)}{(n^2+p^2)^2} + \frac{n^3}{n^2+p^2}\cdot t\right\}\right.$$
$$\left. + \frac{p^2}{(n^2+p^2)^2}\left\{(n^2-p^2)\cos pt + 2pn\sin pt\right\}\right].$$

Введемъ теперь въ эту формулу ту величину u, съ которой мы неоднократно встрѣчались раньше, а именно

$$u = \frac{T_p}{T} = \frac{n}{p} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

Тогда мы будемъ имѣть

$$\theta' = p\frac{x_m}{l}\left[e^{-nt}\left\{-\frac{u^2(3+u^2)}{(1+u^2)^2} + \frac{nu^2}{1+u^2}\cdot t\right\}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{(1+u^2)^2}\left\{(u^2-1)\cos pt + 2u\sin pt\right\}\right] \ldots (21)$$

Подставимъ теперь это выраженіе въ формулу (4) и введемъ слѣдующія обозначенія:

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= \frac{u^2(3+u^2)}{(1+u^2)^2} \\ P_1 &= -n\frac{u^2}{1+u^2} \\ Q_0 &= \frac{1-u^2}{(1+u^2)^2} \\ Q_1 &= -\frac{2u}{(1+u^2)^2} \\ R &= kp\cdot\frac{x_m}{l}. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

и

Тогда мы получимъ

$$\varphi'' + 2n\varphi' + n^2\varphi = R\left[e^{-nt}\{P_0 + P_1 t\} + Q_0 \cos pt + Q_1 \sin pt\right].$$

Обозначивъ еще функцію, входящую въ правую часть этого уравненія, черезъ $\psi(t)$, будемъ имѣть

$$\psi(t) = e^{-nt}\{P_0 + P_1 t\} + Q_0 \cos pt + Q_1 \sin pt \ldots\ldots\ldots (23)$$

и

$$\varphi'' + 2n\varphi' + n^2\varphi = R\psi(t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

Общій интегралъ этого уравненія напишется на основаніи той-же формулы (77) § 3 главы VII, такъ какъ уравненіе (24) имѣетъ тотъ-же видъ, что и уравненіе (10) настоящаго §.

Итакъ,

$$\varphi = e^{-nt}[\Gamma_1 + \Gamma_2 t] - R e^{-nt}\left[\int t e^{nt}\psi(t)\,dt - t\int e^{nt}\psi(t)\,dt\right],$$

гдѣ Γ_1 и Γ_2 суть двѣ новыя постоянныя произвольныя.

Обозначимъ, по примѣру предыдущаго (см. формулы (11) и (12)), эти неопредѣленные интегралы черезъ I_1 и I_2.

и

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \int t e^{nt}\psi(t)\,dt \\ I_2 &= \int e^{nt}\psi(t)\,dt \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

Тогда

$$\varphi = e^{-nt}[\Gamma_1 + \Gamma_2 t] - R e^{-nt}[I_1 - tI_2] \ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

Интегрируя I_1 по частямъ, находимъ

$$I_1 = \int t\,dI_2 = tI_2 - \int I_2\,dt;$$

слѣдовательно,

$$I_1 - tI_2 = -\int I_2\,dt = -\int dt\int e^{nt}\psi(t)\,dt.$$

Подставляя это выраженіе въ формулу (26), будемъ имѣть

$$\varphi = e^{-nt}[\Gamma_1 + \Gamma_2 t] + R e^{-nt}\int I_2\,dt \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

Займемся теперь нахожденіемъ этого неопредѣленнаго интеграла.

$$I_2 = \int \Big[\{P_0 + P_1 t\} + e^{nt}\{Q_0 \cos pt + Q_1 \sin pt\}\Big] dt.$$

Принимая во вниманіе интегральныя формулы (15) и (16), будемъ имѣть:

$$I_2 = P_0 t + \frac{1}{2} P_1 t^2 + Q_0 \frac{e^{nt}}{p^2+n^2}\{p \sin pt + n \cos pt\} + Q_1 \frac{e^{nt}}{p^2+n^2}\{n \sin pt - p \cos pt\}$$

или

$$I_2 = P_0 t + \frac{1}{2} P_1 t^2 + \frac{e^{nt}}{p^2+n^2}\{(Q_0 p + Q_1 n) \sin pt + (Q_0 n - Q_1 p) \cos pt\}.$$

Далѣе имѣемъ

$$\int I_2 dt = \frac{1}{2} P_0 t^2 + \frac{1}{6} P_1 t^3 + \frac{1}{p^2+n^2}\Big[(Q_0 p + Q_1 n)\frac{e^{nt}}{p^2+n^2}\{n \sin pt - p \cos pt\}$$

$$+ (Q_0 n - Q_1 p)\frac{e^{nt}}{p^2+n^2}\{p \sin pt + n \cos pt\}\Big]$$

или

$$\int I_2 dt = \frac{1}{2} P_0 t^2 + \frac{1}{6} P_1 t^3 + \frac{e^{nt}}{(p^2+n^2)^2}\big[\{Q_0 n^2 - Q_1 p n - Q_0 p^2 - Q_1 p n\} \cos pt$$

$$+ \{Q_0 p n + Q_1 n^2 + Q_0 p n - Q_1 p^2\} \sin pt\big].$$

Введемъ теперь въ эту формулу количество u, опредѣляемое уравненіемъ (20):

$$n = pu.$$

Тогда

$$\int I_2 dt = \frac{1}{2} P_0 t^2 + \frac{1}{6} P_1 t^3 + \frac{e^{nt}}{p^4(1+u^2)^2} \cdot p^2 \big[\{Q_0(u^2-1) - 2Q_1 u\} \cos pt$$

$$+ \{2Q_0 u + Q_1(u^2-1)\} \sin pt\big] \ldots (28)$$

Коеффиціенты при $\cos pt$ и $\sin pt$ опредѣлятся на основаніи обозначеній (22).

$$Q_0(u^2-1) - 2Q_1 u = \frac{1}{(1+u^2)^2}[(1-u^2)(u^2-1) + 4u^2]$$

$$= \frac{1}{(1+u^2)^2}[-(1-u^2)^2 + 4u^2] = \frac{1}{(1+u^2)^2}[-1 + 6u^2 - u^4] = -\frac{1-6u^2+u^4}{(1+u^2)^2}$$

и

$$2Q_0 u + Q_1(u^2 - 1) = \frac{1}{(1+u^2)^2}\left[2(1-u^2)u - 2u(u^2-1)\right] = \frac{4u(1-u^2)}{(1+u^2)^2}.$$

Подставляя эти выраженія въ формулу (28) и замѣняя P_0 и P_1 ихъ выраженіями изъ формулъ (22), будемъ имѣть

$$\int I_2\,dt = \frac{1}{2}\frac{u^2(3+u^2)}{(1+u^2)^2}\cdot t^2 - \frac{1}{6}p\cdot\frac{u^3}{(1+u^2)}t^3$$
$$+ \frac{1}{p^2}\cdot\frac{e^{nt}}{(1+u^2)^4}\left[-\{1-6u^2+u^4\}\cos pt + 4u(1-u^2)\sin pt\right].$$

Подставимъ теперь значеніе этого интеграла въ формулу (27).

Тогда

$$\varphi = e^{-nt}[\Gamma_1 + \Gamma_2 t] + \frac{R}{p^2}\left[e^{-nt}\left\{\frac{1}{2}\frac{u^2(3+u^2)}{(1+u^2)^2}(pt)^2 - \frac{1}{6}\cdot\frac{u^3}{(1+u^2)}(pt)^3\right\}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(1+u^2)^4}\left\{-(1-6u^2+u^4)\cos pt + 4u(1-u^2)\sin pt\right\}\right].$$

Введемъ теперь новую перемѣнную независимую

$$\xi = pt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

и замѣнимъ R его выраженіемъ изъ послѣдней изъ формулъ (22).

Тогда мы получимъ окончательно

$$\varphi = e^{-u\xi}\left[\Gamma_1 + \frac{1}{p}\Gamma_2\xi\right] + \frac{kx_m}{pl}\left[e^{-u\xi}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{u^2(3+u^2)}{(1+u^2)^2}\xi^2 - \frac{1}{6}\cdot\frac{u^3}{(1+u^2)}\xi^3\right\}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(1+u^2)^4}\left\{-(1-6u^2+u^4)\cos\xi + 4u(1-u^2)\sin\xi\right\}\right] \quad \ldots (30)$$

Остается теперь только опредѣлить значеніе постоянныхъ Γ_1 и Γ_2 изъ условія, что, при $\xi = 0$, $\varphi = 0$ и $\frac{d\varphi}{d\xi} = 0$.

Первое условіе даетъ намъ

$$\Gamma_1 = \frac{kx_m}{pl}\cdot\frac{1-6u^2+u^4}{(1+u^2)^4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

Найдемъ теперь значеніе $\frac{d\varphi}{d\xi}$.

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = e^{-u\xi}\left[-u\Gamma_1 - \frac{u}{p}\Gamma_2\xi + \frac{\Gamma_2}{p}\right] + \frac{kx_m}{pl}\left[e^{-u\xi}\left\{-\frac{1}{2}\frac{u^3(3+u^2)}{(1+u^2)^2}\xi^2 + \frac{1}{6}\frac{u^4}{(1+u^2)}\xi^3\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{u^2(3+u^2)}{(1+u^2)^2}\cdot\xi - \frac{1}{2}\frac{u^3}{(1+u^2)}\cdot\xi^2\right\} + \frac{1}{(1+u^2)^4}\left\{(1-6u^2+u^4)\sin\xi + 4u(1-u^2)\cos\xi\right\}\right].$$

Положимъ теперь $\xi = 0$.

Тогда

$$0 = -u\Gamma_1 + \frac{\Gamma_2}{p} + \frac{kx_m}{pl} \cdot \frac{4u(1-u^2)}{(1+u^2)^4}$$

или

$$\frac{\Gamma_2}{p} = \frac{kx_m}{pl} \cdot \frac{1}{(1+u^2)^4} [u(1-6u^2+u^4) - 4u(1-u^2)] = \frac{kx_m}{pl} \cdot \frac{u}{(1+u^2)^4} [-3-2u^2+u^4]$$

$$= -\frac{kx_m}{pl} \cdot \frac{u(3+2u^2-u^4)}{(1+u^2)^4} = -\frac{kx_m}{pl} \cdot \frac{u\{3(1+u^2)-u^2(1+u^2)\}}{(1+u^2)^4}$$

$$= -\frac{kx_m}{pl} \cdot \frac{u(3-u^2)}{(1+u^2)^3} \quad \ldots\ldots\ldots (32)$$

Подставимъ теперь выраженія для Γ_1 и $\frac{\Gamma_2}{p}$ изъ уравненій (31) и (32) въ уравненіе (30).

Тогда мы получимъ

$$\varphi = \frac{kx_m}{pl} \Big[e^{-u\xi} \Big\{ \frac{1-6u^2+u^4}{(1+u^2)^4} - \frac{u(3-u^2)}{(1+u^2)^3}\xi + \frac{1}{2}\frac{u^2(3+u^2)}{(1+u^2)^2}\xi^2 - \frac{1}{6}\frac{u^3}{1+u^2}\xi^3 \Big\}$$
$$- \frac{1-6u^2+u^4}{(1+u^2)^4}\cos\xi + \frac{4u(1-u^2)}{(1+u^2)^4}\sin\xi \Big] \quad \ldots\ldots\ldots (33)$$

Введемъ теперь для удобства слѣдующія сокращенныя обозначенія:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1-6u^2+u^4}{(1+u^2)^4} \\ a_1 &= -\frac{u(3-u^2)}{(1+u^2)^3} \\ a_2 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^2(3+u^2)}{(1+u^2)^2} \\ a_3 &= -\frac{1}{6} \cdot \frac{u^3}{1+u^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (34)$$

и

$$\left.\begin{aligned} g &= -\frac{1-6u^2+u^4}{(1+u^2)^4} = -a_0 \\ h &= \frac{4u(1-u^2)}{(1+u^2)^4} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (35)$$

Принимая еще во вниманіе, что отклоненіе y_1 свѣтовой точки на барабанѣ отъ положенія равновѣсія, соотвѣтствующее углу отклоненія гальванометра φ, равно (см. формулу (5))

$$2A_1\varphi,$$

а

$$p = \frac{2\pi}{T_p},$$

и, подставляя всѣ эти выраженія въ уравненіе (33), получимъ окончательно

$$y_1 = x_m \,.\, T_p \,.\left(\frac{kA_1}{\pi l}\,.\right).\, F(\xi), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(36)}$$

гдѣ

$$F(\xi) = e^{-u\xi}\left[a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3\right] + g\cos\xi + h\sin\xi \ldots\ldots \text{(37)}$$

Такова зависимость отклоненія свѣтовой точки на барабанѣ, при гальванометрическомъ способѣ регистраціи, отъ аргумента $\xi = pt$, при условіи, что продольная сейсмическая волна, приведшая маятникъ въ движеніе, удовлетворяетъ закону гармоническихъ колебаній

$$x = x_m \sin\xi.$$

Различные коеффиціенты, входящіе въ выраженіе $F(\xi)$, суть только функціи параметра $u = \frac{T_p}{T}$.

При этомъ выводѣ мы предположили, что, какъ маятникъ, такъ и гальванометръ, оба строго установлены на границу апеdoдичности, и что собственный періодъ маятника безъ затуханія T равенъ періоду гальванометра T_1. Если-бы эти условія не были въ точности удовлетворены, то пришлось-бы ввести въ предыдущія формулы нѣкоторые поправочные члены. На этомъ вопросѣ мы, однако, останавливаться не будемъ.

Такъ какъ въ формулу (37) входитъ показательная функція $e^{-u\xi}$, то въ выраженіи для y_1 приняты уже во вниманіе начальныя условія движенія, которыми, при малыхъ значеніяхъ t или ξ, никоимъ образомъ пренебрегать нельзя.

При болѣе значительныхъ величинахъ ξ, членами, содержащими множитель $e^{-u\xi}$, можно уже пренебречь и тогда $F(\xi)$ приметъ слѣдующій простой видъ:

$$F(\xi) = g\cos\xi + h\sin\xi.$$

Положимъ въ этомъ выраженіи

$$\frac{h}{\sqrt{h^2 + g^2}} = \cos\Delta$$

и

$$\frac{g}{\sqrt{h^2 + g^2}} = -\sin\Delta.$$

Тогда

$$\operatorname{tg}\Delta = + \frac{1 - 6u^2 + u^4}{4u(1 - u^2)}$$

и

$$F(\xi) = \sqrt{h^2 + g^2}\,.\sin(\xi - \Delta).$$

$$h^2 + g^2 = \frac{1}{(1+u^2)^8}[16u^2 - 32u^4 + 16u^6 + 1 + 36u^4 + u^8$$

$$- 12u^2 + 2u^4 - 12u^6]$$

$$= \frac{1}{(1+u^2)^8}[1 + 4u^2 + 6u^4 + 4u^6 + u^8] = \frac{(1+u^2)^4}{(1+u^2)^8} = \frac{1}{(1+u^2)^4},$$

а, слѣдовательно,

$$F(\xi) = \frac{1}{(1+u^2)^2}\cdot\sin(\xi - \Delta).$$

Въ этомъ случаѣ максимальное значеніе y_m будетъ, согласно формулѣ (36), равно

$$y_m = x_m T_p \cdot \frac{kA_1}{\pi l}\cdot\frac{1}{(1+u^2)^2}$$

и

$$x_m = \frac{\pi l}{kA_1}\cdot(1+u^2)^2\cdot\frac{y_m}{T_p} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (38)$$

Эта формула тождественна съ формулой (47) § 3 главы VI, при условіи, что $\mu^2 = 0$ (граница апеtherіодичности) и что $u = u_1$ $(T = T_1)$.

Этой формулой можно, однако, пользоваться только въ тѣхъ случаяхъ, когда время t, протекшее отъ начала движенія, не слишкомъ мало.

Въ нашемъ-же случаѣ, такъ какъ первый максимумъ на кривой наступаетъ весьма скоро, черезъ 1—2 секунды, послѣ начала первой фазы P, то максимумъ y_m приходится уже вычислять по строгой формулѣ (36).

Эта формула показываетъ намъ, что y_1 будетъ максимумъ, когда $F(\xi)$ максимумъ, т.-е. когда $\frac{dF(\xi)}{d\xi} = 0$.

Обозначимъ наименьшій положительный корень уравненія

$$\frac{dF(\xi)}{d\xi} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (39)$$

черезъ ξ_m.

Тогда мы будемъ имѣть, вводя прежнее обозначеніе (см. формулу (46) § 3 главы VI-ой)

$$C_1 = \frac{\pi l}{kA_1}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (40)$$

$$x_m = C_1\,\frac{y_m}{T_p}\cdot\frac{1}{F(\xi_m)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (41)$$

По этой формулѣ можно опредѣлить первое максимальное смѣщенie почвы при вступленiи первыхъ, продольныхъ сейсмическихъ волнъ.

y_m и T_p снимаются непосредственно съ сейсмограммы, причемъ, при опредѣленiи T_p, надо нѣсколько отступить отъ момента P, чтобы избавиться, по возможности, отъ возмущающаго влiянiя собственнаго движенiя прибора.

Зная T_p и T будемъ знать и величину параметра u, т.-е. численное значенie коеффицiентовъ, входящихъ въ формулу (37).

Затѣмъ находимъ корень ξ_m трансцендентнаго уравненiя (39) и, подставляя его въ формулу (41) и зная величину постоянной C_1, найдемъ соотвѣтствующую искомую величину x_m.

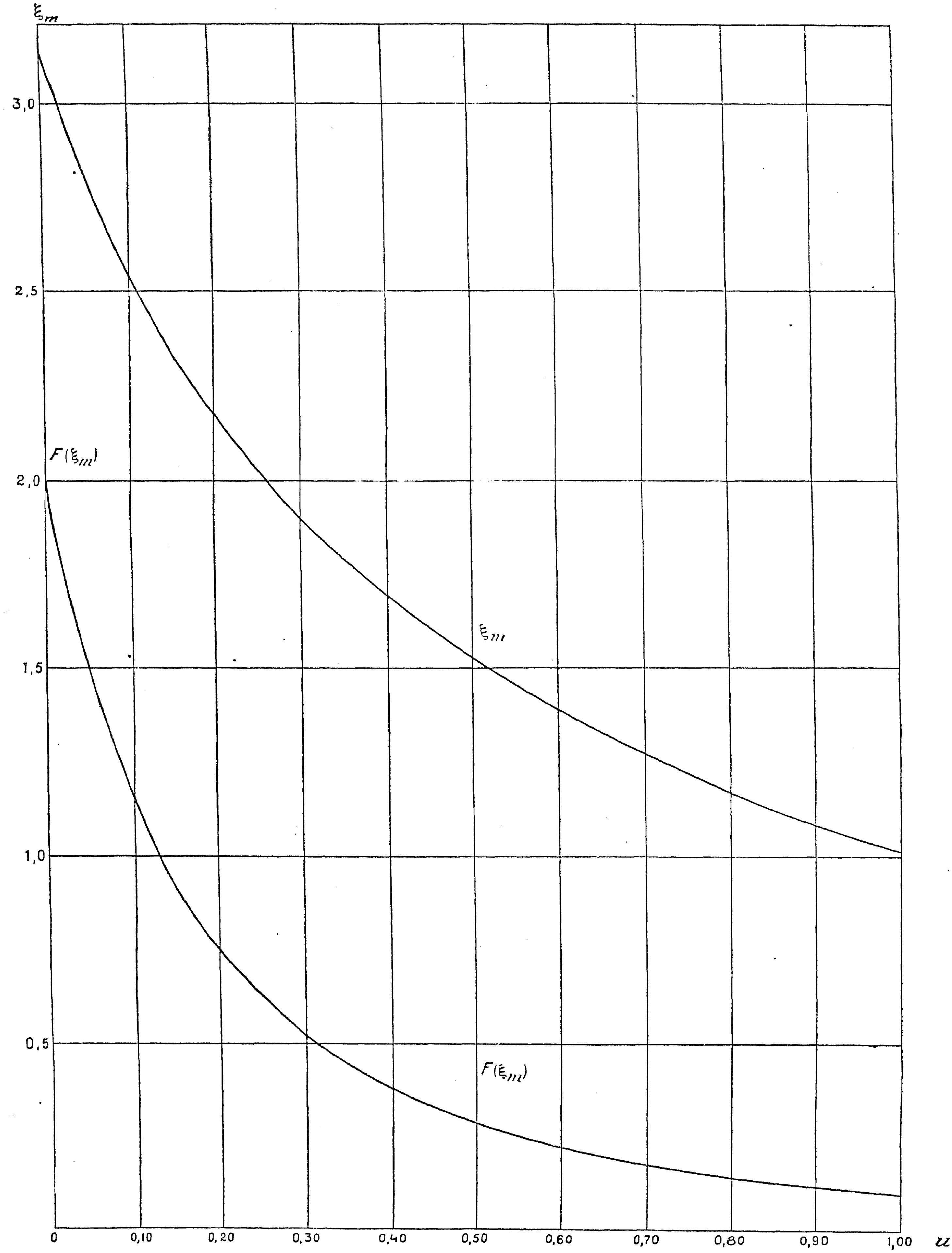
Такъ какъ эти вычисленiя нѣсколько сложны, то въ слѣдующей таблицѣ X даны величины ξ_m и $F(\xi_m)$ для нѣкоторыхъ значенiй параметра u.

Таблица X.

u	ξ_m	$F(\xi_m)$
0	3,1416 (= π)	2,000
0,04	2,863	1,580
0,06	2,747	1,418
0,08	2,643	1,280
0,10	2,549	1,161
0,20	2,175	0,754
0,30	1,904	0,525
0,40	1,695	0,384
0,4141 [1]	1,669	0,369
0,50	1,528	0,292
0,60	1,389	0,228
0,70	1,273	0,183
0,80	1,173	0,149
0,90	1,087	0,124
1,00	1,012	0,104

[1] $a_0 = -g = 0$.

Черт. 130.



ξm
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
F(ξm)
ξm
F(ξm)
0
0,10
0,20
0,30
0,40
0,50
0,60
0,70
0,80
0,90
1,00
u

ξ_m и $F(\xi_m)$ суть нѣкоторыя функціи отъ u.

Эти величины вычислены непосредственно по вышеприведеннымъ формуламъ. Чтобы имѣть значенія ξ_m и $F(\xi_m)$ для промежуточныхъ значеній u, можно прибѣгнуть къ такъ называемому методу графической интерполяціи. Для этой цѣли по оси абсциссъ откладываются величины u, а по оси ординатъ значенія ξ_m и $F(\xi_m)$, и черезъ соотвѣтствующія точки проводятся согласныя кривыя.

Ходъ этихъ кривыхъ представленъ на слѣдующемъ чертежѣ 130.

Верхняя кривая даетъ значенія ξ_m, а нижняя значенія $F(\xi_m)$. Какъ u, такъ и обѣ эти функціи суть отвлеченныя числа.

Кривыя эти вычерчены на основаніи чиселъ предыдущей таблицы X.

При помощи нижней кривой, по величинѣ u, легко опредѣляется значеніе $F(\xi_m)$, а, имѣя эту величину, легко, по формулѣ (41), опредѣлить и искомую величину x_m.

Верхняя кривая для ξ_m можетъ служить для контроля, а именно слѣдующимъ образомъ.

Снимая y_m и T_p съ сейсмограммы, опредѣлимъ еще промежутокъ времени t_m, протекшій отъ начала первой фазы P, до даннаго перваго максимума на сейсмограммѣ.

Тогда, согласно обозначенію (29),

$$t_m = \frac{\xi_m}{p} = \frac{\xi_m}{2\pi} \cdot T_p.$$

Но, такъ какъ

$$T_p = uT,$$

то мы будемъ имѣть

$$t_m = \frac{T}{2\pi} \cdot u \,.\, \xi_m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (42)$$

Сравнивая вычисленную по формулѣ (42) величину t_m съ соотвѣтствующей величиной, снятой непосредственно съ сейсмограммы, можно судить о томъ, насколько надежно опредѣлена величина параметра u.

Вмѣсто того, чтобы снимать каждый разъ величины ξ_m и $F(\xi_m)$ съ кривыхъ, для удобства вычисленій составлены, на основаніи этихъ данныхъ, слѣдующія двѣ таблицы XI и XII величинъ ξ_m и $F(\xi_m)$ для различныхъ значеній u, отъ $u = 0{,}01$ до $u = 1{,}00$.

Изложивши теорію, можно теперь уже приступить непосредственно къ вопросу объ опредѣленіи азимута эпицентра по наблюденіямъ одной сейсмической станціи.

Таблица XI.

u	ξ_m	Δ	u	ξ_m	Δ
0,01	3,065	−0,072	0,51	1,513	−0,015
0,02	2,993	67	0,52	1,498	14
0,03	2,926	63	0,53	1,484	14
0,04	2,863	60	0,54	1,470	14
0,05	2,803	56	0,55	1,456	14
0,06	2,747	53	0,56	1,442	14
0,07	2,694	51	0,57	1,428	13
0,08	2,643	48	0,58	1,415	13
0,09	2,595	46	0,59	1,402	13
0,10	2,549	44	0,60	1,389	13
0,11	2,505	42	0,61	1,376	12
0,12	2,463	41	0,62	1,364	12
0,13	2,422	39	0,63	1,352	12
0,14	2,383	38	0,64	1,340	12
0,15	2,345	36	0,65	1,328	11
0,16	2,309	35	0,66	1,317	11
0,17	2,274	34	0,67	1,306	11
0,18	2,240	33	0,68	1,295	11
0,19	2,207	32	0,69	1,284	11
0,20	2,175	31	0,70	1,273	11
0,21	2,144	30	0,71	1,262	10
0,22	2,114	29	0,72	1,252	10
0,23	2,085	28	0,73	1,242	10
0,24	2,057	27	0,74	1,232	10
0,25	2,030	27	0,75	1,222	10
0,26	2,003	26	0,76	1,212	10
0,27	1,977	25	0,77	1,202	10
0,28	1,952	24	0,78	1,192	10
0,29	1,928	24	0,79	1,182	9
0,30	1,904	23	0,80	1,173	9
0,31	1,881	23	0,81	1,164	9
0,32	1,858	22	0,82	1,155	9
0,33	1,836	22	0,83	1,146	9
0,34	1,814	21	0,84	1,137	9
0,35	1,793	20	0,85	1,128	9
0,36	1,773	20	0,86	1,119	8
0,37	1,753	20	0,87	1,111	8
0,38	1,733	19	0,88	1,103	8
0,39	1,714	19	0,89	1,095	8
0,40	1,695	19	0,90	1,087	8
0,41	1,676	18	0,91	1,079	8
0,42	1,658	18	0,92	1,071	8
0,43	1,640	17	0,93	1,063	8
0,44	1,623	17	0,94	1,055	8
0,45	1,606	16	0,95	1,047	7
0,46	1,590	16	0,96	1,040	7
0,47	1,574	16	0,97	1,033	7
0,48	1,558	15	0,98	1,026	7
0,49	1,543	15	0,99	1,019	7
0,50	1,528	15	1,00	1,012	

Таблица XII.

u	$F(\xi_m)$	Δ		u	$F(\xi_m)$	Δ
0,01	1,879	−0,109		0,51	0,284	−0,007
0,02	1,770	99		0,52	0,277	7
0,03	1,671	91		0,53	0,270	7
0,04	1,580	84		0,54	0,263	6
0,05	1,496	78		0,55	0,257	6
0,06	1,418	72		0,56	0,251	6
0,07	1,346	66		0,57	0,245	6
0,08	1,280	61		0,58	0,239	6
0,09	1,219	58		0,59	0,233	5
0,10	1,161	54		0,60	0,228	5
0,11	1,107	51		0,61	0,223	5
0,12	1,056	47		0,62	0,218	5
0,13	1,009	45		0,63	0,213	5
0,14	0,964	41		0,64	0,208	5
0,15	0,923	39		0,65	0,203	4
0,16	0,884	36		0,66	0,199	4
0,17	0,848	34		0,67	0,195	4
0,18	0,814	31		0,68	0,191	4
0,19	0,783	29		0,69	0,187	4
0,20	0,754	28		0,70	0,183	4
0,21	0,726	26		0,71	0,179	4
0,22	0,700	25		0,72	0,175	4
0,23	0,675	24		0,73	0,171	4
0,24	0,651	23		0,74	0,167	3
0,25	0,628	22		0,75	0,164	3
0,26	0,606	21		0,76	0,161	3
0,27	0,585	21		0,77	0,158	3
0,28	0,564	20		0,78	0,155	3
0,29	0,544	19		0,79	0,152	3
0,30	0,525	18		0,80	0,149	3
0,31	0,507	17		0,81	0,146	3
0,32	0,490	16		0,82	0,143	3
0,33	0,474	15		0,83	0,140	3
0,34	0,459	14		0,84	0,137	3
0,35	0,445	13		0,85	0,134	2
0,36	0,432	13		0,86	0,132	2
0,37	0,419	12		0,87	0,130	2
0,38	0,407	12		0,88	0,128	2
0,39	0,395	11		0,89	0,126	2
0,40	0,384	11		0,90	0,124	2
0,41	0,373	10		0,91	0,122	2
0,42	0,363	10		0,92	0,120	2
0,43	0,353	10		0,93	0,118	2
0,44	0,343	9		0,94	0,116	2
0,45	0,334	9		0,95	0,114	2
0,46	0,325	9		0,96	0,112	2
0,47	0,316	8		0,97	0,110	2
0,48	0,308	8		0,98	0,108	2
0,49	0,300	8		0,99	0,106	2
0,50	0,292	8		1,00	0,104	

Предположимъ, что мы имѣемъ два апериодическихъ ($\mu^2 = 0$) горизонтальныхъ маятника съ гальванометрической регистраціей, причемъ собственный періодъ каждаго маятника равенъ періоду соотвѣтствующаго гальванометра. Одинъ изъ этихъ маятниковъ регистрируетъ меридіанальную составляющую горизонтальнаго смѣщенія почвы N—S, а другой составляющую E—W. Постоянную C_1 для этихъ сейсмографовъ обозначимъ соотвѣтственно черезъ C_N и C_E, первыя максимальныя амплитуды на сейсмограммѣ черезъ y_N и y_E, а проэкціи перваго максимальнаго смѣщенія почвы около P черезъ x_N и x_E.

Снявши T_p, y_N и y_E съ сейсмограммы, опредѣляютъ по формулѣ (41) x_N и x_E.

Обозначивъ черезъ α искомый азимутъ эпицентра, будемъ имѣть

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_E}{x_N} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (43)$$

При опредѣленіи α по формулѣ (43), надо учитывать всегда знакъ при количествахъ x_E и x_N, считая смѣщеніе почвы къ N'у и E'у положительнымъ, а къ S'у и W'у отрицательнымъ, а также принимать во вниманіе, была-ли первая сейсмическая продольная волна волной сжатія или волной разрѣженія, на что даетъ указаніе вертикальный сейсмографъ. Этотъ вопросъ былъ уже разсмотрѣнъ нами раньше (см. стр. 228).

Вопросъ объ опредѣленіи азимута эпицентра въ значительной мѣрѣ упрощается, если оба маятника имѣютъ тотъ-же самый собственный періодъ колебаній T. Тогда величины параметра u и функціи $F(\xi_m)$ будутъ для обоихъ маятниковъ однѣ и тѣ-же, такъ что, при составленіи отношенія $\frac{x_E}{x_N}$, эта функція просто сократится; такимъ образомъ, нѣтъ вовсе никакой надобности ее вычислять.

Въ этомъ случаѣ изъ формулъ (41) и (43) будемъ имѣть

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{C_E}{C_N} \cdot \frac{y_E}{y_N} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (44)$$

Эта формула отличается чрезвычайной простотой.

Мы видимъ, такимъ образомъ, какъ важно, для опредѣленія азимута эпицентра, имѣть два маятника съ одинаковымъ собственнымъ періодомъ колебаній, равнымъ при томъ соотвѣтственно собственному періоду колебаній гальванометра. Въ этомъ случаѣ не надо вовсе знать періода T_p сейсмической волны, который около начала первой фазы P бываетъ иногда довольно трудно точно опредѣлить. Для опредѣленія α, требуется только знать

отношеніе извѣстныхъ максимальныхъ амплитудъ на сейсмограммѣ $\frac{y_E}{y_N}$ и умножить затѣмъ полученное число на отношеніе постоянныхъ сейсмографовъ $\frac{C_E}{C_N}$.

Для лучшаго поясненія вышеизложеннаго, приведемъ два численныхъ примѣра, заимствованныхъ изъ наблюденій Пулковской сейсмической станціи.

Землетрясеніе 22/V (новаго стиля) 1910 г.

Ощущалось въ сѣверной Японіи.

Постоянныя сейсмографовъ.

Маятникъ E — W.		*Маятникъ N — S.*	
$l =$	$186{,}2\ ^м/_м$	$l =$	$185{,}8\ ^м/_м$
$k =$	$48{,}4$	$k =$	$55{,}3$
$A_1 =$	$1104\ ^м/_м$	$A_1 =$	$1099\ ^м/_м$
$T =$	$23{,}^s0$	$T =$	$23{,}^s0$
$T_1 =$	$23{,}0$	$T_1 =$	$23{,}2$
$\mu^2 = -$	$0{,}02$	$\mu^2 = +$	$0{,}03$
$\operatorname{Log} C_E =$	$\bar{2}{,}0393$	$\operatorname{Log} C_N =$	$\bar{3}{,}9825$

$$\operatorname{Log} \frac{C_E}{C_N} = 0{,}0568.$$

Всѣ періоды можно принять равными между собою; маятники можно считать практически установленными на границу апеaccording періодичности.

Наблюденія въ Пулковѣ дали:

$$\left.\begin{array}{l} P = 6^ч\ 34^м\ 48^с \\ S = 6\ \ 43\ \ 27 \end{array}\right\} \text{среднаго Гринвичскаго времени.}$$

$$S - P = 0\ \ 8\ \ 39.$$

Эпицентральное разстояніе $\Delta = 7200$ килом. (по таблицѣ II Zeissig'a, см. стр. (138)).

$$y_E = -7{,}89\ {}^{\text{м}}/_{\text{м}} \qquad \operatorname{Log} y_E = 0{,}8971\,(n)$$

$$y_N = -8{,}39\ {}^{\text{м}}/_{\text{м}} \qquad \operatorname{Log}' y_N = \bar{1}{,}0778\,(n)$$

$$\operatorname{Log}\frac{C_E}{C_N} = 0{,}0568$$

$$\operatorname{Log}\operatorname{tg}\alpha = 0{,}0317$$

$$\alpha = 47^\circ\,5'$$

Измѣреніе y_E и y_N производилось подъ микроскопомъ, при помощи особаго прибора, служащаго для измѣренія координатъ.

Смѣщеніе почвы было на SW. Но, такъ какъ первая волна была волной сжатія, то азимутъ эпицентра будетъ

$$\alpha = NE - 47^\circ\,5'.$$

Эпицентральному разстоянію $\Delta = 7200$ клм. соотвѣтствуетъ дуга

$$\Delta^\circ = 64^\circ\,44' \text{. . . . . (см. стр. 143)}$$

Съ этими данными для α и Δ°, по формуламъ (48), (49), (50), (51) и (52) § 2 главы III, получается

$$\chi = 55^\circ\,16',$$

а для географическихъ координатъ эпицентра E

$$\varphi_e = \ \ 42^\circ\,45'\,N$$

$$\lambda_e = 145^\circ\,55'\,E,$$

принимая географическія координаты φ и λ Пулкова равными

$$\varphi = 59^\circ\,46'\,N$$

$$\lambda = 30^\circ\,20'\,E.$$

Эта точка находится около восточныхъ береговъ острова Іезо, т.-е. около того мѣста, гдѣ дѣйствительно ощущалось землетрясеніе.

Чтобы имѣть понятіе о степени надежности подобнаго рода опредѣленій, сопоставимъ разстоянія Δ_e этой точки E до нѣкоторыхъ наиболѣе на-

дежныхъ сейсмическихъ станцій съ тѣми эпицентральными разстояніями Δ_s, которыя даны самими этими станціями на основаніи наблюденныхъ ими моментовъ P и S.

Разница между Δ_e и Δ_s и служитъ до извѣстной степени мѣриломъ надежности способа опредѣленія положенія эпицентра по наблюденіямъ *одной* только сейсмической станціи.

Такимъ образомъ получилось:

Станціи.	$\Delta_e - \Delta_s$
Геттингенъ	— 20 кил.
Гамбургъ	— 30 —
Батавія	—170 —
Страсбургъ	— 80 —
Вѣна.	—100 —

Такое согласіе слѣдуетъ признать весьма хорошимъ, такъ какъ ошибка въ 100 и болѣе километровъ для большихъ эпицентральныхъ разстояній всегда возможна.

Для этого существуютъ слѣдующія четыре причины: 1) эпицентръ землетрясенія не есть какая-нибудь опредѣленная точка, а всегда болѣе или менѣе обширная область; 2) кривыя временъ пробѣга еще не извѣстны съ такой точностью, чтобы можно было вполнѣ надежно опредѣлять эпицентральныя разстоянія Δ, (къ этому присоединяется еще вліяніе глубины залеганія очага землетрясенія); 3) при опредѣленіи азимута эпицентра, въ виду малости y_E и y_N, всегда возможны разныя случайныя ошибки измѣреній, особенно, если, до наступленія землетрясенія, маятники не находились вполнѣ въ покоѣ, а были подвержены вліянію разныхъ микросейсмическихъ движеній, и 4) теоретическія условія $T = T_1$, $\mu^2 = 0$ и равенство собственныхъ періодовъ обѣихъ маятниковъ не всегда бываютъ строго выполнены.

Возьмемъ теперь другой примѣръ волны разрѣженія.

Землетрясеніе 18/II 1911 г.

Ощущалось на Балканскомъ полуостровѣ въ Албаніи около города Монастыря.

Постоянныя сейсмографовъ.

Маятникъ E — W.		*Маятникъ N — S.*	
$l =$	$186{,}2$ м/м.	$l =$	$185{,}8$ м/м.
$k =$	$48{,}2$	$k =$	$56{,}5$
$A_1 =$	1108 м/м.	$A_1 =$	1086 м/м.
$T =$	$23^{с},4$	$T =$	$22^{с},7$
$T_1 =$	$23{,}0$	$T_1 =$	$22{,}8$
$\mu^2 =$	$0{,}00$	$\mu^2 =$	$+\ 0{,}11$
$\operatorname{Log} C_E =$	$\bar{2}{,}0395$	$\operatorname{Log} C_N =$	$\bar{3}{,}9783$

$$\operatorname{Log} \frac{C_E}{C_N} = 0{,}0612.$$

Практически можно, въ первомъ приближеніи, считать всѣ періоды равными между собою и оба маятника какъ-бы установленными на границу апеpіодичности, такъ какъ, хотя для маятника $N - S$ μ^2 и было равно $+\ 0{,}11$, то этой величинѣ μ^2 соотвѣтствуетъ, согласно таблицѣ I-ой Сборника сейсмометрическихъ таблицъ, коеффиціентъ затуханія $v = 7600$; а, при такомъ сильномъ затуханіи, маятникъ почти уже обладаетъ свойствами вполнѣ апеpіодическаго прибора.

Наблюденія въ Пулковѣ дали:

$$P = 21^{ч}\ 39^{м}\ 49^{с}$$

$$S = 21\ \ 43\ \ 34$$

$$S - P = 0\ \ 3\ \ 45.$$

Слѣдовательно,

$$\Delta = 2260 \text{ килом.}$$

$$y_E = -2{,}68 \text{ м/м} \qquad \operatorname{Log} y_E = 0{,}4281\,(n)$$

$$y_N = -7{,}31 \text{ м/м} \qquad \operatorname{Log}' y_N = \bar{1}{,}1361\,(n)$$

$$\operatorname{Log} \frac{C_E}{C_N} = 0{,}0612$$

$$\operatorname{Log} \operatorname{tg} \alpha = \bar{1}{,}6254$$

$$\alpha = 22^\circ\ 53'.$$

По знакамъ у y_E и y_N слѣдуетъ заключить, что смѣщеніе почвы было на SW; но, такъ какъ вертикальный сейсмографъ показалъ, что первое вертикальное движеніе почвы было направлено *книзу,* т.-е., что первая продольная волна была волной разрѣженія, то и азимутъ эпицентра будетъ

$$\alpha = SW - 22^\circ\, 53'.$$

Эпицентральному разстоянію $\Delta = 2260$ килом. соотвѣтствуетъ дуга

$$\Delta^\circ = 20^\circ\, 19'.$$

При вычисленіи географическихъ координатъ эпицентра по приведеннымъ въ § 2 главы III формуламъ, слѣдуетъ принять здѣсь за α дополненіе вышеприведеннаго угла до 180°, т.-е. положить $\alpha = 157^\circ\, 7'$. Далѣе, принимая во вниманіе, что эпицентръ лежитъ къ западу отъ Пулкова, надлежитъ опредѣленный изъ вычисленій уголъ γ *вычесть* изъ долготы Пулкова λ.

Съ этими данными для α и Δ° получается

$$\chi = 161^\circ\, 10'$$
$$\varphi_e = 40^\circ\, 29'\, N$$
$$\lambda_e = 20^\circ\ \ 7'\, E.$$

Эта точка, дѣйствительно, лежитъ на Балканскомъ полуостровѣ, недалеко отъ города Монастыря.

Сопоставленіе величинъ $\Delta_e - \Delta_s$ дало слѣдующіе результаты. Въ эту таблицу включены и станціи сравнительно близко отстоящія отъ Монастыря.

Станціи.	$\Delta_e - \Delta_s$
Гамбургъ	+ 10 килом.
Вѣна	+ 20 »
Тифлисъ	0 »
Тріестъ	+ 10 »
Лайбахъ	+ 30 »
Краковъ	+ 50 »
Картуха (Испанія)	— 90 »

Согласіе въ высшей степени удовлетворительное.

Для этого-же землетрясенія Walker, завѣдующій обсерваторіей въ Eskdalemuir въ Шотландіи, гдѣ установлены такіе-же горизонтальные сейсмографы, какъ въ Пулковѣ, опредѣлилъ совершенно самостоятельно и по тому-же самому методу географическія координаты эпицентра и нашелъ

$$\varphi_e = 40^\circ\, 19'\, N$$

$$\lambda_e = 20^\circ\, 26'\, E,$$

что находится въ прекрасномъ согласіи съ вышеприведенными Пулковскими данными.

Эти примѣры наглядно доказываютъ полную возможность, при наличіи подходящихъ сейсмографовъ, весьма удовлетворительнымъ образомъ разыскивать, по наблюденіямъ *одной* лишь сейсмической станціи, положеніе эпицентра землетрясенія. Это обстоятельство, а именно возможность опредѣленія азимута эпицентра, по первымъ максимальнымъ смѣщеніямъ почвы при наступленіи фазы P, можно разсматривать, какъ прямое доказательство тому, что волны первой предварительной фазы дѣйствительно обязаны своимъ происхожденіемъ *продольнымъ* упругимъ колебаніямъ, распространяющимся сквозь толщу земли.

Въ заключеніе слѣдуетъ еще указать на то, что той-же формулой (44) можно воспользоваться для опредѣленія направленія горизонтальнаго смѣщенія почвы при первомъ вступленіи поперечныхъ волнъ второй предварительной фазы S, откуда уже можно вывести заключеніе и о направленіи колебаній частицъ въ поперечныхъ сейсмическихъ волнахъ.

Къ этому вопросу мы вернемся еще въ § 3 настоящей главы.

---

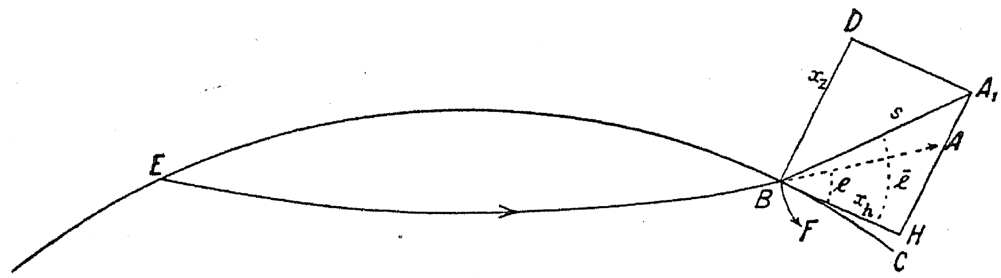
§ 2.

Опредѣленіе угла выхода сейсмической радіаціи.

Въ главѣ III-ей мы видѣли, какое важное значеніе имѣетъ уголъ выхода сейсмической радіаціи e, т.-е. уголъ, составляемый касательной къ траекторіи сейсмическаго луча, въ точкѣ встрѣчи ея съ поверхностью земли, съ плоскостью горизонта въ мѣстѣ наблюденія (см. черт. 131).

Этотъ уголъ есть *истинный* уголъ выхода сейсмической радіаціи. На черт. 131 онъ представленъ угломъ ABH; E — эпицентръ, B — мѣсто наблюденій.

Черт. 131.



Мы видѣли также, что уголъ e можно получить очень просто изъ кривой временъ пробѣга для волнъ первой предварительной фазы, по формулѣ

$$\cos e = V_1 \frac{dT_1}{d\Delta}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (45)$$

гдѣ V_1 есть скорость распространенія продольныхъ сейсмическихъ волнъ въ самыхъ верхнихъ слояхъ земли (см. формулу (54) § 3 главы III).

Подъ вліяніемъ продольной волны, ударяющей снизу въ точку B, элементъ поверхности земли получитъ нѣкоторое максимальное смѣщеніе s, направленное по линіи BA_1.

Возьмемъ прямоугольную систему координатныхъ осей.

Ось x-овъ направимъ въ плоскости горизонта на N, ось y-овъ на E, а ось z-овъ въ зенитъ. Проэкціи перваго максимальнаго смѣщенія почвы s по этимъ тремъ направленіямъ обозначимъ соотвѣтственно черезъ x_N, x_E и x_z.

При помощи двухъ аперіодическихъ горизонтальныхъ маятниковъ съ гальванометрической регистраціей, можно опредѣлить величины x_N и x_E по формулѣ (41), снявши y_N, y_E и T_p съ сейсмограммы.

Полное горизонтальное смѣщеніе x_h точки земной поверхности получится тогда по формулѣ

$$x_h = \sqrt{x_N^2 + x_E^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (46)$$

Располагая еще вертикальнымъ аперіодическимъ сейсмографомъ, уравненіе движенія котораго, по существу дѣла, какъ мы видѣли, ничѣмъ не отличается отъ уравненія движенія аперіодическаго *горизонтальнаго* сейсмографа, можно, точно такимъ-же образомъ, вывести абсолютную величину и вертикальной составляющей x_z перваго максимальнаго смѣщенія почвы. На черт. 131 x_h и x_z представлены соотвѣтственно отрѣзками BH и BD.

Отношеніе $\frac{x_z}{x_h}$ дастъ намъ тангенсъ угла A_1BH, который мы обозначимъ черезъ $\bar{e}$.

$$\operatorname{tg} \bar{e} = \frac{x_z}{\sqrt{x_N^2 + x_E^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (47)$$

Уголъ $\bar{e}$ называется *кажущимся* угломъ выхода сейсмической радіаціи; его легко получить изъ наблюденій, имѣя въ распоряженіи три отдѣльныхъ, подходящихъ сейсмографа.

Уголъ $\bar{e}$ вообще не равенъ углу e, такъ какъ у поверхности земли, въ точкѣ B, могутъ происходить разные сложные процессы превращенія сейсмической энергіи, причемъ, между прочимъ, въ точкѣ B происходитъ частичное отраженіе сейсмическаго луча въ направленіи BF.

Вопросъ о зависимости между углами e и $\bar{e}$ представляетъ собою одинъ изъ весьма сложныхъ вопросовъ современной теоретической сейсмометріи, который не былъ до сихъ поръ окончательно и вполнѣ строгимъ и убѣдительнымъ образомъ разрѣшенъ.

Проф. Wiechert даетъ слѣдующую формулу, связывающую углы e и $\bar{e}$:

$$\cos e = \frac{V_1}{V_2}\sqrt{\frac{1-\sin\bar{e}}{2}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (48)$$

гдѣ V_1 и V_2 представляютъ собою скорости распространенія продольныхъ и поперечныхъ волнъ въ самыхъ верхнихъ слояхъ земли.

Такимъ образомъ, опредѣливъ кажущійся уголъ выхода сейсмической радіаціи $\bar{e}$ изъ наблюденій, можно, по формулѣ (48), найти и истинный уголъ e.

Подставляя въ формулу (48) выраженіе $\cos e$ изъ формулы (45) и сокращая на V_1, будемъ имѣть

$$V_2 = \frac{\sqrt{\frac{1-\sin\bar{e}}{2}}}{\frac{dT_1}{d\Delta}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (49)$$

Эта формула даетъ прямой методъ опредѣленія скорости распространенія поперечныхъ сейсмическихъ волнъ V_2 въ самыхъ верхнихъ слояхъ земли, независимо отъ какихъ-либо предположеній о величинѣ скорости распространенія продольныхъ волнъ V_1. Въ виду этого, непосредственное опредѣленіе угла $\bar{e}$ изъ наблюденій пріобрѣтаетъ особый интересъ.

Хотя изъ наблюденій у поверхности земли надъ тремя составляющими смѣщенія почвы можно непосредственно, независимо отъ какихъ-либо теоретическихъ соображеній, вывести только *кажущійся* уголъ выхода сейсмической радіаціи $\bar{e}$, но это обстоятельство не имѣетъ особенно существеннаго значенія, такъ какъ разница между углами $\bar{e}$ и e, вычисляемая по формулѣ Wiechert'а, для эпицентральныхъ разстояній Δ, превышающихъ 1500 километровъ, вообще говоря очень незначительна.

Чтобы убѣдиться въ справедливости вышесказаннаго, въ слѣдующей таблицѣ XIII сопоставлены (съ округленіемъ до 1°), для различныхъ эпицентральныхъ разстояній Δ, величины истиннаго угла выхода сейсмической радіаціи e, выведенныя Zoeppritz'омъ и Geiger'омъ изъ кривой временъ пробѣга продольныхъ волнъ (см. таблицу III на стр. 151), съ величинами кажущагося угла $\bar{e}$, вычисленными по слѣдующей формулѣ (50), вытекающей непосредственно изъ формулы (48), принимая, согласно предыдущему, для верхнихъ слоевъ земли, $V_1 = 7{,}17$ кил./сек., $V_2 = 4{,}01$ кил./сек., а, слѣдовательно, $\frac{V_2}{V_1} = 0{,}559$.

$$\sin \bar{e} = 1 - 2\,.(0{,}559)^2 \cos^2 e \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(50)$$

Таблица эта показываетъ, что, для эпицентральныхъ разстояній Δ меньшихъ 2000 километровъ, $\bar{e} > e$, а, для всѣхъ бо̀льшихъ значеній Δ, $\bar{e}$ всегда меньше e, но разница нигдѣ не превышаетъ $2 - 3°$, слѣдовательно, она вообще несущественна.

Только для весьма близкихъ землетрясеній $\bar{e}$ значительно больше e. Въ предѣлѣ, при $\Delta = 0$, $e = 0$, а $\bar{e} = 22°$. Такимъ образомъ, по теоріи Wiechert'а, кажущійся уголъ выхода сейсмической радіаціи никогда не можетъ быть меньше 22°.

Первый, занимавшійся опытнымъ опредѣленіемъ угла $\bar{e}$ изъ наблюденій, былъ молодой, къ несчастію умершій въ раннемъ возрастѣ, германскій сейсмологъ Schlüter. Однако, онъ, при выводѣ проэкцій смѣщеній почвы x_N, x_E и x_z около P, пользовался формулой для опредѣленія максимальныхъ смѣщеній почвы, при установившихся, гармоническихъ колебаніяхъ, не считаясь вовсе съ начальными условіями движенія прибора, чего, какъ мы видѣли раньше, въ данномъ случаѣ никоимъ образомъ дѣлать нельзя, такъ какъ первый максимумъ на сейсмограммѣ наступаетъ весьма скоро послѣ начала P, когда вліяніе собственнаго движенія прибора можетъ еще въ сильной мѣрѣ сказаться (члены, содержащіе множителемъ показательную функцію, не сдѣлались еще достаточно малыми).

Послѣ Schlüter'а этимъ вопросомъ никто болѣе не занимался.

Въ послѣднее время, послѣ установки лѣтомъ прошлаго, 1910 года на Пулковской сейсмической станціи вертикальнаго, апеdo̧іодическаго сейсмографа вышеописаннаго устройства, получился наблюдательный матеріалъ, изъ котораго явилась возможность вывести, для различныхъ эпицентральныхъ разстояній Δ, величину кажущагося угла выхода сейсмической радіаціи $\bar{e}$.

Для лучшаго поясненія того, какимъ образомъ уголъ $\bar{e}$ выводится изъ наблюденій, приведемъ одинъ численный примѣръ, относящійся къ землетрясенію 24/VI 1910 г., эпицентръ коего находился въ Алжирѣ.

Таблица XIII.

Δ	e	$\overline{e}$
0 кил.	0°	22°
500	11	23
1000	21	27
1500	30	32
2000	37	37
2500	44	42
3000	49	47
3500	53	52
4000	57	54
4500	60	58
5000	63	60
5500	65	62
6000	65	62
6500	65	63
7000	65	63
7500	66	63
8000	66	64
8500	67	64
9000	67	65
9500	68	66
10000	69	67
10500	70	67
11000	70	68
11500	71	69
12000	72	70
12500	73	71
13000	74	72

У всѣхъ трехъ сейсмографовъ собственный періодъ колебаній (безъ затуханія) весьма мало отличался отъ собственнаго періода колебаній соотвѣтствующаго гальванометра, а потому эти періоды можно было считать равными между собою ($T = T_1$), но T у вертикальнаго сейсмографа было значительно меньше, чѣмъ у горизонтальныхъ маятниковъ.

Постоянныя сейсмографовъ.

Маятникъ E—W.	*Маятникъ N—S.*	*Вертикальный сейсмографъ Z.*
$l = 186{,}2\ ^{м}/_{м}$	$l = 185{,}8\ ^{м}/_{м}$	$l = 377{,}6\ ^{м}/_{м}$
$k = 48{,}6$	$k = 54{,}3$	$k = 236{,}5$
$A_1 = 1105\ ^{м}/_{м}$	$A_1 = 1099\ ^{м}/_{м}$	$A_1 = 915\ ^{м}/_{м}$
$T = T_1 = 23^{s}{,}2$	$T = T_1 = 23^{s}{,}2$	$T = T_1 = 13^{s}{,}7$
$\mu^2 = +\ 0{,}02$	$\mu^2 = +\ 0{,}12$	$\mu^2 = -0{,}01$
$\operatorname{Log} C_E = \bar{2}{,}0371$	$\operatorname{Log} C_N = \bar{3}{,}9904$	$\operatorname{Log} C_z = \bar{3}{,}7389$

$$\operatorname{Log} \frac{C_E}{C_N} = 0{,}0467.$$

Въ первомъ приближеніи можно, какъ мы раньше видѣли, практически считать вездѣ $\mu^2 = 0$.

Наблюденія въ Пулковѣ дали:

$$P = 13^{ч}\ 33^{м}\ \ 0^{с}$$
$$S = 13\ \ 37\ \ 53$$
$$S - P = 0\ \ \ 4\ \ 53$$
$$\Delta = 3140 \text{ килом.}$$

Первыя максимальныя отклоненія около P были

$$y_E = +0{,}55\ ^{м}/_{м},\quad y_N = +0{,}54\ ^{м}/_{м},\quad y_z = +0{,}95\ ^{м}/_{м},\quad T_p = 4^{s}{,}4 \text{ и } t_m = 1^{s}{,}3.$$

Слѣдовательно, горизонтальное смѣщеніе почвы было на NE.

Но, такъ какъ y_z положительно, то первая сейсмическая волна была волной сжатія, а, слѣдовательно, азимутъ эпицентра будетъ SW.

$$\mathrm{Log}\, y_E = \bar{1},7404$$
$$\mathrm{Log}'\, y_N = 0,2676$$
$$\mathrm{Log}\, \frac{C_E}{C_N} = 0,0467$$
$$\mathrm{Log}\, \mathrm{tg}\, \alpha = 0,0547.$$
$$\alpha = SW - 48^\circ\, 36'.$$

Съ этими данными для Δ и α получаются слѣдующія координаты эпицентра:

$$\varphi_e = 37^\circ\ \ 8'\, N$$
$$\lambda_e = \ \ 3^\circ\, 54'\, E.$$

Эга точка находится около Алжира.

Вычисленіе ē по формуламъ (41) и (47).

	$E-W.$	$N-S.$	$Z.$	
T_p	$4{,}^{\mathrm{c}}4$	$4{,}^{\mathrm{c}}4$	$4{,}^{\mathrm{c}}4$	
T	23,2	23,2	13,7	
$u = \frac{T_p}{T}$	0,190	0,190	0,321	(по таб. II Сборн.)
$F(\xi_m)$	0,783	0,783	0,488	(по таб. XII; см. стр. 505)
y_m	0,55 м/м	0,54 м/м	0,95 м/м	
$\mathrm{Log}\, y_m$	$\bar{1},7404$	$\bar{1},7324$	$\bar{1},9777$	
$\mathrm{Log}'\, T_p$	$\bar{1},3565$	$\bar{1},3565$	$\bar{1},3565$	
$\mathrm{Log}\, C_1$	$\bar{2},0371$	$\bar{3},9904$	$\bar{3},7389$	
$\mathrm{Log}'\, F(\xi_m)$	0,1062	0,1062	0,3116	
$\mathrm{Log}\, x_m$	$\bar{3},2402$	$\bar{3},1855$	$\bar{3},3847$	
x_m	0,00174 м/м	0,00153 м/м	0,00242 м/м.	

Выражая эти величины въ микронахъ, будемъ имѣть

$$x_E = 1,74^{\mu}$$
$$x_N = 1,53^{\mu}$$
$$x_z = 2,42^{\mu}$$

$$x_h = \sqrt{x_E^2 + x_N^2} = 2{,}32^{\mu}.$$

$$\operatorname{tg} \bar{e} = \frac{x_z}{x_h}.$$

$$\mathrm{Log}\, x_z = 0{,}3838$$

$$\mathrm{Log}'\, x_h = \bar{1}{,}6345$$

$$\mathrm{Log}\, \operatorname{tg} \bar{e} = 0{,}0183$$

$$\bar{e} = 46^\circ\, 12'$$

при

$$\Delta = 3140 \text{ килом.}$$

Вычисленіе t_m по формулѣ (42) для вертикальнаго сейсмографа.

$u = 0{,}321$ $\quad$ $\mathrm{Log}\, u = \bar{1}{,}5065$

$\xi_m = 1{,}856$ $\quad$ $\mathrm{Log}\, \xi_m = 0{,}2686$ (по таб. XI; см. стр. 504).

$T = 13{,}7$ $\quad$ $\mathrm{Log}\, T = 1{,}1367$

$$\mathrm{Log}'\, 2\pi = \bar{1}{,}2018$$

$$\mathrm{Log}\, t_m = 0{,}1136$$

$$t_m = 1{,}^s3.$$

Это t_m совпадаетъ въ данномъ случаѣ вполнѣ точно съ разностью моментовъ максимума на сейсмограммѣ и начала движенія (P). Однако, разницы въ нѣсколько десятыхъ долей секунды между вычисленной и наблюденной величиной t_m всегда возможны.

Этотъ примѣръ наглядно показываетъ, что опредѣленіе кажущагося угла выхода сейсмической радіаціи $\bar{e}$ изъ наблюденій съ тремя сейсмографами не представляетъ никакихъ практическихъ затрудненій.

Вышеуказаннымъ способомъ и былъ обработанъ новѣйшій Пулковскій наблюдательный матеріалъ, причемъ результаты вычисленій были нанесены графически на чертежъ. По оси абсциссъ были отложены эпицентральныя разстоянія Δ, а по оси ординатъ соотвѣтствующіе углы $\bar{e}$, и черезъ всѣ эти точки была затѣмъ проведена по возможности согласная кривая.

Эти данныя не охватываютъ достаточно большого числа наблюденій, чтобы изъ нихъ можно было теперь уже дѣлать вполнѣ надежные выводы

и заключенія, но, тѣмъ не менѣе, полученные результаты представляютъ извѣстный интересъ.

Въ слѣдующей таблицѣ XIV сопоставлены (съ округленіемъ до 1°) величины угла $\bar{e}$, снятыя съ вышеупомянутой сглаженной кривой, съ числами, данными Schlüter'омъ.

Таблица XIV.

Δ	$\bar{e}$ (по Пулкову)	$\bar{e}$ (по Schlüter'у)
2000 клм.	—	29° — 39° при $\Delta = 2000$ — — 2100 клм.
2500	48°	57
3000	44	59
3500	43	—
4000	42	—
4500	43	—
5000	44	—
5500	46	—
6000	48	—
6500	51	—
7000	54	—
7500	58	64
8000	62	69
8500	65	73
9000	67	75
9500	68	—
10000	70	—
10500	71	—
11000	72	—
11500	72	78
12000	73	—
12500	73	—
13000	74	—

Сравнивая эти величины $\bar{e}$, выведенныя на основаніи Пулковскихъ наблюденій, съ величинами e и $\bar{e}$, данными въ предыдущей таблицѣ XIII, видно, что, при $\Delta = 2500 — 3000$, и начиная отъ $\Delta = 8000$, согласіе между этими числами вообще вполнѣ удовлетворительное. Однако, таблица XIII указываетъ на то, что e и $\bar{e}$ *непрерывно* возрастаютъ вмѣстѣ съ Δ, тогда какъ Пулковскія наблюденія даютъ намекъ на то, что уголъ $\bar{e}$ проходитъ черезъ нѣкоторый минимумъ въ 42° около $\Delta = 4000$ клм.

Въ настоящее время трудно еще, за недостаткомъ наблюдательнаго матеріала, съ увѣренностью утверждать, что этотъ минимумъ дѣйствительно реаленъ, а не обуславливается, напримѣръ, несовершенствомъ самихъ наблюденій или какими-нибудь случайными причинами. Дѣйствительно, на величину угла $\bar{e}$ могутъ несомнѣннымъ образомъ вліять разныя геологическія особенности, могущія встрѣтиться на пути сейсмическаго луча, равно какъ и направленіе откуда идетъ соотвѣтствующая сейсмическая волна. Такимъ образомъ, общаго закона для зависимости угла e отъ Δ можетъ, въ сущности, вовсе и не быть, и слѣдуетъ трактовать каждый встрѣчающійся на практикѣ случай отдѣльно. Но можно, конечно, говорить о нѣкоторой *средней* зависимости $\bar{e}$ отъ Δ, къ каковому случаю и относятся, въ сущности, числа предыдущей таблицы XIV. Но, во всякомъ случаѣ, тщательныя и всестороннія *непосредственныя* наблюденія надъ кажущимся угломъ выхода сейсмической радіаціи $\bar{e}$ чрезвычайно важны, такъ какъ они могутъ открыть намъ новый путь къ изученію геологическихъ особенностей внутренняго строенія земли.

Вышеописанный методъ опредѣленія угла $\bar{e}$ страдаетъ, однако, нѣкоторыми существенными недостатками.

Во-первыхъ, въ основаніи формулы (41), служащей для вычисленія x_m, лежитъ предположеніе, что первая падающая продольная сейсмическая волна удовлетворяетъ въ точности закону гармоническихъ колебаній.

Во-вторыхъ, опредѣленіе проэкцій максимальныхъ смѣщеній почвы по тремъ взаимно перпендикулярнымъ осямъ координатъ требуетъ предварительнаго вычисленія функціи $F(\xi_m)$.

Въ-третьихъ, вычисленіе $F(\xi_m)$ требуетъ точнаго знанія періода T_p соотвѣтствующей сейсмической волны (для опредѣленія u), а вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣленіе T_p около начала первой фазы P, гдѣ гармоническое движеніе *прибора* еще не установилось и вліяніе начальныхъ условій движенія еще сказывается, подчасъ очень затруднительно, не говоря уже о томъ, что около P легко можетъ встрѣтиться не простая сейсмическая волна, а суперпозиція двухъ или нѣсколькихъ волнъ съ различными періодами T_p.

Отъ всѣхъ этихъ неудобствъ можно, однако, совершенно избавиться и

дать методъ, который можетъ служить для опредѣленія кажущагося угла выхода сейсмической радіаціи $\bar{e}$, совершенно независимо отъ какихъ-либо апріорныхъ предположеній о характерѣ движенія почвы и который вовсе не требуетъ опредѣленія T_p и вычисленія функціи $F(\xi_m)$.

Къ описанію этого метода мы теперь и перейдемъ.

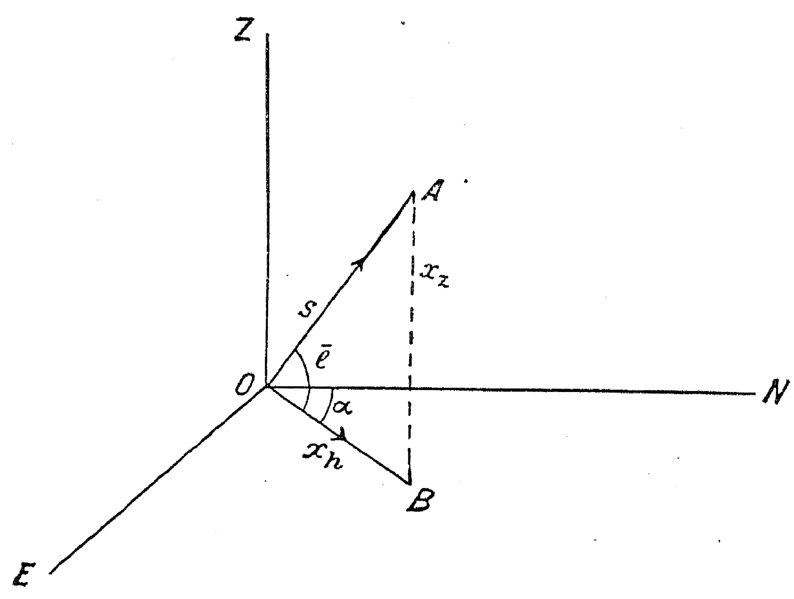
Для этого предположимъ, что всѣ три сейсмографа, — два горизонтальныхъ и одинъ вертикальный, — установлены строго на границу апериодичности ($\mu^2 = 0$) и что всѣ они имѣютъ одинъ и тотъ-же собственный періодъ колебаній T, равный въ точности соотвѣтствующему собственному періоду колебанія гальванометровъ T_1.

Абсолютное смѣщеніе элемента земной поверхности въ моментъ t пусть будетъ s, гдѣ s есть *совершенно произвольная* функція отъ t.

$$s = f(t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

Пусть уголъ, составляемый направленіемъ s съ плоскостью горизонта въ мѣстѣ наблюденія, будетъ $\bar{e}$, а уголъ, составляемый плоскостью, проходящей черезъ s и вертикальную линію, съ плоскостью меридіана — α (азимутъ). См. черт. 132.

Черт. 132.



Проэкцію s на направленіе меридіана (къ N'у) обозначимъ черезъ x_N, проэкцію на направленіе перваго вертикала (къ E'у) черезъ x_E, а вертикальную проэкцію (къ зениту) черезъ x_z.

Тогда

$$\left.\begin{aligned} x_N &= s \cos \bar{e} \cos \alpha \\ x_E &= s \cos \bar{e} \sin \alpha \\ x_z &= s \sin \bar{e} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

Полное горизонтальное смѣщеніе почвы будетъ

$$x_h = \sqrt{x_N^2 + x_E^2} \qquad (53)$$

Разсмотримъ теперь, напримѣръ, движеніе гальванометра, связаннаго съ сейсмографомъ, регистрирующимъ составляющую $N - S$.

На основаніи сдѣланныхъ предположеній, мы будемъ имѣть слѣдующія два дифференціальныхъ уравненія:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2n\frac{d\theta}{dt} + n^2\theta + \frac{1}{l}\cdot\cos\bar{e}\cos\alpha\frac{d^2s}{dt^2} = 0 \qquad (54)$$

и

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2n\frac{d\varphi}{dt} + n^2\varphi + k\frac{d\theta}{dt} = 0, \qquad (55)$$

гдѣ θ есть уголъ поворота маятника, φ соотвѣтствующій уголъ поворота гальванометра, а

$$n = \frac{2\pi}{T} \qquad (56)$$

n одинаково для всѣхъ трехъ приборовъ.

Введемъ теперь новую перемѣнную

$$\xi = nt \qquad (57)$$

Тогда

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{d\xi}\cdot n,$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2\theta}{d\xi^2}\cdot n^2,$$

и наши дифференціальныя уравненія (54) и (55) примутъ слѣдующій видъ:

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + 2\frac{d\theta}{d\xi} + \theta + \frac{1}{l}\cdot\cos\bar{e}\cos\alpha\frac{d^2s}{dt^2}\cdot\frac{1}{n^2} = 0 \qquad (58)$$

и

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + 2\frac{d\varphi}{d\xi} + \varphi + \frac{k}{n}\cdot\frac{d\theta}{d\xi} = 0 \qquad (59)$$

Введемъ теперь слѣдующее обозначеніе:

$$\frac{1}{n^2}\cdot\frac{d^2s}{dt^2} = -\Phi(\xi, n) \qquad (60)$$

Тогда уравненіе (58) представится слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + 2\frac{d\theta}{d\xi} + \theta = \frac{1}{l}\cdot\cos\bar{e}\ \cos\alpha\,.\,\Phi(\xi, n) \qquad (61)$$

На основаніи формулъ (70) и (77) § 3 Главы VII, общій интегралъ этого уравненія можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\theta = e^{-\xi}[\Gamma_1 + \Gamma_2 \xi] - \frac{1}{l}\cdot \cos \bar{e} \cos \alpha . \psi(\xi, n), \ldots\ldots\ldots (62)$$

гдѣ

$$\psi(\xi, n) = e^{-\xi}\left[\int \xi e^{\xi} \Phi(\xi, n)\, d\xi - \xi \int e^{\xi} \Phi(\xi, n)\, d\xi\right] \ldots\ldots (63)$$

Для опредѣленія постоянныхъ Γ_1 и Γ_2 обратимся къ начальнымъ условіямъ движенія.

При $t = 0$ или, что то-же, $\xi = 0$, $\theta_0 = 0$, а, на основаніи уравненій (54) и (57),

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t=0} = \left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=0}\cdot n = -\frac{1}{l}\cdot \cos \bar{e} \cos \alpha \left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=0}.$$

Слѣдовательно, мы будемъ имѣть

$$0 = \Gamma_1 - \frac{1}{l}\cdot \cos \bar{e} \cos \alpha . \psi(o, n)$$

и

$$-\frac{1}{l} \cos \bar{e} \cos \alpha \cdot \frac{1}{n}\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=0} = -\Gamma_1 + \Gamma_2 - \frac{1}{l}\cdot \cos \bar{e} \cos \alpha \left[\frac{d\psi(\xi, n)}{d\xi}\right]_{\xi=0}$$

или

$$\Gamma_1 = \frac{1}{l} \cos \bar{e} \cos \alpha . \psi(o, n)$$

и

$$\Gamma_2 = \frac{1}{l} \cos \bar{e} \cos \alpha \left[\psi(o, n) - \frac{1}{n}\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=0} + \left(\frac{d\psi(\xi, n)}{d\xi}\right)_{\xi=0}\right].$$

Такимъ образомъ, θ можетъ быть окончательно представлено функціей слѣдующаго вида:

$$\theta = \frac{1}{l} \cos \bar{e} \cos \alpha . \chi(\xi, n) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (64)$$

Обратимся теперь къ дифференціальному уравненію (59).

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + 2\frac{d\varphi}{d\xi} + \varphi = \frac{k}{l} \cos \bar{e} \cos \alpha . \Omega(\xi, n), \ldots\ldots\ldots\ldots (65)$$

гдѣ

$$\Omega(\xi, n) = -\frac{1}{n}\cdot \frac{d\chi(\xi, n)}{d\xi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (66)$$

Трактуя уравненіе (65) точно также, какъ мы трактовали уравненіе (61), и, принимая во вниманіе, что начальныя условія движенія для φ

суть слѣдующія:

$$\text{при } t=0 \text{ или } \xi=0, \quad \varphi=0 \text{ и } \frac{d\varphi}{dt}=\frac{d\varphi}{d\xi}\cdot n=0,$$

мы можемъ окончательное выраженіе для φ представить слѣдующимъ образомъ:

$$\varphi=\frac{k}{l}\cdot\cos\bar{e}\,\cos\alpha\,.\,F(\xi,n)\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(67)$$

Первый максимумъ для φ, а именно φ_m, опредѣлится изъ условія

$$\frac{dF(\xi,n)}{d\xi}=0\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(68)$$

Обозначивъ соотвѣтствующій корень этого уравненія черезъ ξ_m, будемъ имѣть

$$\varphi_m=\frac{k}{l}\cdot\cos\bar{e}\cos\alpha\,.\,F(\xi_m,n).$$

Обозначивъ еще черезъ A_1 разстояніе зеркала у гальванометра до поверхности регистрирнаго вала въ направленіи нормально падающаго луча, а черезъ y_m отклоненіе свѣтовой точки на барабанѣ, соотвѣтствующее углу отклоненія гальванометра φ_m, будемъ имѣть

$$y_m=2A_1\varphi_m$$

или

$$y_m=\frac{kA_1}{l}\cdot\cos\bar{e}\cos\alpha\,.\,2F(\xi_m,n)\,\ldots\ldots\ldots\ldots(69)$$

Отличая теперь первыя максимальныя отклоненія у всѣхъ трехъ сейсмографовъ, равно какъ и ихъ постоянныя, соотвѣтственно индексами N, E и z, будемъ имѣть

$$y_N=\left(\frac{kA_1}{l}\right)_N\cos\bar{e}\cos\alpha\,.\,2F(\xi_m,n)$$

$$y_E=\left(\frac{kA_1}{l}\right)_E\cos\bar{e}\sin\alpha\,.\,2F(\xi_m,n)$$

$$y_z=\left(\frac{kA_1}{l}\right)_z\sin\bar{e}\,.\,2F(\xi_m,n).$$

Такъ какъ $F(\xi_m,n)$ для всѣхъ трехъ сейсмографовъ имѣетъ одно и то-же численное значеніе, то мы будемъ имѣть

$$\cos\bar{e}=\frac{1}{2F(\xi_m,n)}\sqrt{\left(\frac{l}{kA_1}\right)_N^2 y_N^2+\left(\frac{l}{kA_1}\right)_E^2 y_E^2}$$

и

$$\sin \bar{e} = \frac{1}{2F(\xi_m, n)} \cdot \left(\frac{l}{kA_1}\right)_z y_z$$

или, окончательно,

$$\operatorname{tg} \bar{e} = \frac{\left(\frac{l}{kA_1}\right)_z y_z}{\sqrt{\left(\frac{l}{kA_1}\right)_N^2 y_N^2 + \left(\frac{l}{kA_1}\right)_E^2 y_E^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (70)$$

По этой послѣдней формулѣ и можно вычислять кажущійся уголъ выхода сейсмической радіаціи $\bar{e}$ при *совершенно произвольномъ* значеніи функціи $s = f(t)$.

Вычисленіе функціи $F(\xi_m, n)$ при этомъ способѣ совершенно отпадаетъ, причемъ постоянныя сейсмографовъ l, k и A_1 могутъ имѣть различныя значенія. Единственно что здѣсь требуется, это то, чтобы собственный періодъ (безъ затуханія) всѣхъ трехъ сейсмографовъ T былъ-бы одинаковъ и равенъ T_1, и чтобы всѣ три прибора находились на границѣ апериодичности.

Окончательная формула (70) для вычисленія $\bar{e}$ отличается при этомъ большой простотой.

Способъ этотъ еще не примѣнялся на практикѣ, но не подлежитъ сомнѣнію, что, въ виду его теоретической обоснованности, онъ долженъ привести къ вполнѣ надежнымъ результатамъ.

---

§ 3.

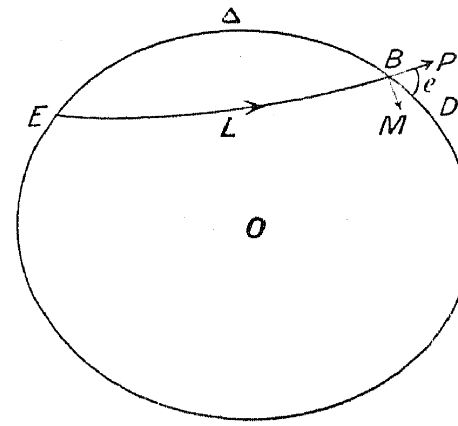
Опредѣленіе плоскости колебаній частицъ въ поперечныхъ волнахъ второй фазы.

Изложенные въ двухъ предшествующихъ параграфахъ методы для опредѣленія абсолютнаго направленія смѣщенія точки земной поверхности при первомъ вступленіи продольныхъ сейсмическихъ волнъ, а именно опредѣленіе азимута α и кажущагося угла выхода сейсмической радіаціи $\bar{e}$, могутъ быть непосредственно примѣнены и къ первой *поперечной* волнѣ второй предварительной фазы S, что даетъ возможность рѣшить вопросъ о положеніи плоскости колебаній частицъ въ поперечной упругой волнѣ въ моментъ ея встрѣчи съ поверхностью земли.

На слѣдующемъ чертежѣ 133 E представляетъ собою эпицентръ землетрясенія, B — мѣсто наблюденій, а ELB траекторію сейсмическихъ лучей.

Уголъ PBD, составляемый касательной къ траекторіи луча, въ точкѣ ея встрѣчи съ поверхностью земли, съ плоскостью горизонта, есть *истинный* уголъ выхода сейсмической радіаціи e.

Черт. 133.



Направленіе BM колебаній частицъ въ поперечной волнѣ перпендикулярно къ BP; плоскостью колебаній частицъ мы назовемъ плоскость, проходящую черезъ BP и BM.

По аналогіи съ оптикой, мы можемъ, придерживаясь теоріи Neumann'a, назвать эту плоскость условно плоскостью поляризаціи поперечныхъ сейсмическихъ лучей.

Интересно теперь опредѣлить величину угла β, составляемаго этой плоскостью поляризаціи съ плоскостью большого круга, проходящаго черезъ эпицентръ и мѣсто наблюденій.

Если-бы земля состояла изъ вполнѣ однородныхъ концентрическихъ слоевъ, физическія свойства которыхъ зависѣли-бы только отъ разстоянія до центра земли, то, изъ соображеній симметріи, можно было-бы ожидать, что уголъ β или равенъ $0°$, или $90°$, т.-е., что колебаніе частицъ совершается или въ плоскости большого круга EOB, или перпендикулярно къ ней. Отступленіе же дѣйствительной величины β отъ этихъ предѣльныхъ теоретическихъ значеній можетъ дать интересныя указанія о неправильномъ расположеніи пластовъ въ верхнихъ слояхъ земли.

Для опредѣленія угла β требуется только опредѣлить истинный азимутъ смѣщенія точки земной поверхности въ моментъ перваго вступленія поперечныхъ сейсмическихъ волнъ (S). Этотъ азимутъ мы обозначимъ черезъ α_s. Онъ опредѣляется точно такъ-же, какъ азимутъ α для первыхъ продольныхъ волнъ P. Въ дальнѣйшемъ мы будемъ измѣрять углы α и α_s отъ направленія на N черезъ E, S и W отъ $0°$ до $360°$.

Истинный уголъ выхода сейсмической радіаціи для P мы обозначимъ черезъ e.

Введемъ въ дальнѣйшемъ, вмѣсто e, уголъ

$$i = 90 - e,$$

т. е. уголъ, составляемый касательной къ траекторіи сейсмическихъ лучей въ точкѣ B съ направленіемъ на зенитъ. Для волнъ второй фазы обозначимъ соотвѣтствующій уголъ черезъ i_s.

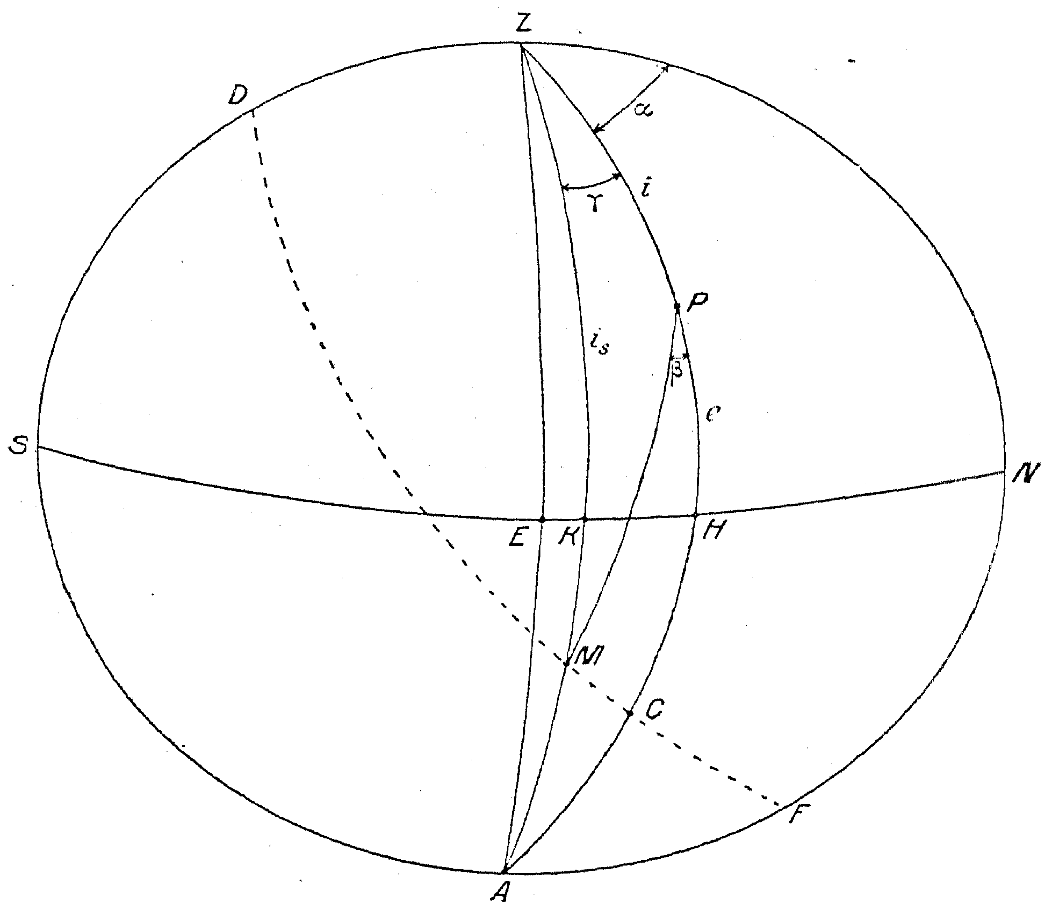
Уголъ $e_s = 90 - i_s$ соотвѣтствуетъ какъ-бы углу e для продольныхъ волнъ; на самомъ же дѣлѣ онъ представляетъ собою уголъ, который со-

ставляло-бы направленіе истиннаго смѣщенія почвы съ горизонтомъ при первомъ вступленіи волнъ S, если-бы у поверхности земли не происходило никакихъ превращеній сейсмической энергіи. Въ дѣйствительности-же, какъ и для продольныхъ волнъ, мы истинную величину угла e_s опредѣлить изъ наблюденій не можемъ, но, опредѣляя абсолютныя величины проэкцій смѣщенія почвы по тремъ взаимно перпендикулярнымъ осямъ координатъ, мы можемъ найти кажущійся уголъ $\bar{e}_s$, слѣдуя тѣмъ-же пріемамъ, которые были изложены въ предшествующемъ параграфѣ.

Опредѣлимъ теперь зависимость между искомымъ угломъ β и азимутомъ α_s.

Для этого обратимся къ небесной сферѣ, представленной на чертежѣ 134.

Черт. 134.



Точка Z представляетъ собою *направленіе* на зенитъ мѣста наблюденія B (черт. 133), N — направленіе на сѣверъ, а E — направленіе на востокъ. Большой кругъ NES представляетъ собою плоскость горизонта.

Точка P соотвѣтствуетъ направленію касательной къ траекторіи сейсмическаго луча въ точкѣ ея встрѣчи съ поверхностью земли; дуга NH, равная двугранному углу NZH, есть азимутъ α *смѣщенія почвы* при первомъ

вступленіи продольныхъ волнъ, а дуга $PH = e$ — соотвѣтствующій *истинный* уголъ выхода сейсмической радіаціи.

Дуга

$$ZP = i = 90 - e.$$

Направленіе колебаній частицъ въ поперечной волнѣ должно быть перпендикулярно къ направленію P, слѣдовательно это направленіе должно лежать гдѣ-нибудь въ плоскости большого круга DMF, отстоящаго всюду на 90° отъ точки P.

Пусть искомое направленіе колебаній совпадаетъ съ точкой M.

Соотвѣтствующій азимутъ α_s представится тогда дугой NK, равной двугранному углу NZK.

Уголъ α_s мы можемъ опредѣлить изъ наблюденій по тому-же пріему, какимъ мы пользовались для опредѣленія угла α. Для этого требуется только измѣрить первыя максимальныя смѣщенія свѣтовой точки на сейсмограммахъ для составляющихъ $E - W$ и $N - S$ послѣ вступленія первыхъ *поперечныхъ* волнъ.

Уголъ PZM, равный разности азимутовъ α_s и α, обозначимъ черезъ γ.

$$\gamma = \alpha_s - \alpha \dots\dots\dots\dots\dots\dots (71)$$

Положеніе искомой плоскости поляризаціи опредѣлится положеніемъ плоскости, проходящей черезъ направленія P и M; на чертежѣ 134 это будетъ дуга большого круга PM. Плоскость большого круга, проходящаго черезъ эпицентръ и мѣсто наблюденій, которую мы назовемъ, для краткости, *главной плоскостью* и въ каковой плоскости лежитъ и направленіе BP (см. черт. 133), представится на чертежѣ 134 дугой большого круга ZPH.

Такимъ образомъ, искомый уголъ β, составляемый плоскостью поляризаціи поперечныхъ колебаній съ главной плоскостью, представится двуграннымъ угломъ MPH.

Дуга-же ZM представляетъ собою ту величину, которую мы обозначили раньше черезъ i_s.

Мы имѣемъ далѣе изъ сферическаго треугольника MZP, въ которомъ сторона $PM = 90^\circ$, слѣдующія два соотношенія:

$$\cos i_s = -\sin i . \cos \beta \dots\dots\dots\dots\dots\dots (72)$$

$$0 = \cos i_s . \cos i + \sin i_s . \sin i \cos \gamma \dots\dots\dots\dots (73)$$

Изъ формулы (73) слѣдуетъ

$$\cos^2 i_s \cos^2 i = \sin^2 i \cos^2 \gamma . (1 - \cos^2 i_s)$$

или

$$\cos^2 i_s\,[\cos^2 i + \sin^2 i\,\cos^2\gamma] = \sin^2 i\,\cos^2\gamma,$$

или еще

$$\cos^2 i_s = \frac{\sin^2 i\cos^2\gamma}{1-\sin^2 i.\sin^2\gamma}.$$

Отсюда находимъ

$$\cos i_s = -\frac{\sin i\cos\gamma}{\sqrt{1-\sin^2 i.\sin^2\gamma}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (74)$$

Изъ чертежа видно, что передъ радикаломъ въ предыдущемъ выраженіи надо поставить знакъ (—), такъ какъ, если $\gamma = 0$, то точка M переходитъ въ C и $i_s = 90 + i$.

Сравнивая формулы (72) и (74), находимъ

$$\cos\beta = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{1-\sin^2 i.\sin^2\gamma}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (75)$$

Отсюда имѣемъ

$$\sin^2\beta = 1 - \frac{\cos^2\gamma}{1-\sin^2 i\sin^2\gamma}$$

$$= \frac{1-\sin^2 i\sin^2\gamma-\cos^2\gamma}{1-\sin^2 i.\sin^2\gamma}$$

или

$$\sin\beta = \frac{\sin\gamma\cos i}{\sqrt{1-\sin^2 i.\sin^2\gamma}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (76)$$

Раздѣливъ выраженіе (76) на выраженіе (75), получимъ окончательно

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\gamma.\cos i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (77)$$

Эта формула очень проста.

По формулѣ (77) и можно, слѣдовательно, опредѣливши γ изъ наблюденій, найти искомый уголъ β.

Правда для этого надо знать еще величину угла i.

Но, какъ мы видѣли раньше, уголъ i, для не слишкомъ малыхъ эпицентральныхъ разстояній Δ, очень мало отличается отъ кажущагося угла $\bar{i} = 90 - \bar{e}$, который можно получить изъ непосредственныхъ наблюденій.

Можно-бы было, вмѣсто этого, воспользоваться для вычисленія β и величинами угла i, выведенными изъ кривой временъ пробѣга.

Зная теперь β и i, можно еще, по формулѣ (72), вычислить и истинный уголъ i_s, и сопоставить его затѣмъ съ кажущимся угломъ $\bar{i}_s = 90° - \bar{e}_s$, выведеннымъ изъ наблюденій надъ абсолютными величинами трехъ проэкцій максимальныхъ смѣщеній почвы послѣ вступленія поперечныхъ волнъ второй предварительной фазы S.

При этихъ вычисленіяхъ надо, однако, обращать вниманіе на слѣдующія обстоятельства.

Если сейсмограмма отъ вертикальнаго сейсмографа показываетъ, что первое движеніе почвы (при P) было направлено внизъ, то тогда надо положить $i = 90° + \bar{e}$, понимая всегда подъ α непосредственно *измѣренный* азимутъ смѣщенія почвы при первой предварительной фазѣ P.

Кромѣ того, при вычисленіи i_s по формулѣ (72), надо обращать вниманіе на то, какой четверти соотвѣтствуетъ уголъ β, указаніемъ чему служатъ знаки при $\sin\beta$ и $\cos\beta$ въ формулахъ (76) и (75), въ которыхъ радикалъ всегда положительный.

Въ окончательномъ же результатѣ можно приводить значенія угла β, ограничиваясь предѣлами отъ $-90°$ до $+90°$.

Для поясненія всего вышесказаннаго, приведемъ два численныхъ примѣра, заимствованныхъ изъ послѣднихъ Пулковскихъ наблюденій.

Землетрясеніе 14/VIII 1909 г.

Эпицентръ около Кіото въ Японіи.

Волна разрѣженія.

Смѣщеніе почвы при $P - NE - 59°\,52'$

» » » $S - SW - 40\quad 8$

$$\gamma = +160°\,16'$$

$$\Delta = 7430 \text{ клм.}$$

Этому эпицентральному разстоянію соотвѣтствуетъ, согласно ранѣе приведенной таблицѣ XIV (см. стр. 520), уголъ $\bar{e} = 57°$.

Примемъ

$$\bar{e} = e.$$

Тогда, въ виду того, что первая волна была волной разрѣженія,

$$i = 147°.$$

Отсюда находимъ, что

$$\sin\beta < 0 \quad \text{и} \quad \cos\beta < 0,$$

а, слѣдовательно, согласно ранѣе приведеннымъ формуламъ, съ округленіемъ до $1°$,

$$\beta = 17°(+180°)$$

и

$$i_s = 59°.$$

Другой примѣръ.

Землетрясеніе 7/VI 1910 г.

Эпицентръ около Calitri на югѣ Италіи.

Волна сжатія.

$$\text{Смѣщеніе почвы при } P — NE — 36^\circ\ 1'$$
$$\text{» » » } S — SE — 28\ \ 15$$
$$\gamma = 115^\circ 44'$$
$$\Delta = 2330 \text{ клм.}$$
$$\bar{e} = e = 49^\circ$$
$$i = 41^\circ.$$
$$\sin\beta > 0 \qquad \cos\beta < 0$$
$$\beta = 123^\circ \quad (\text{или } -57^\circ)$$
$$i_s = 69^\circ.$$

Въ слѣдующей таблицѣ XV приведены величины угла β, который характеризуетъ собою положеніе плоскости поляризаціи поперечныхъ волнъ, для различныхъ землетрясеній, сгруппированныхъ по увеличивающимся эпицентральнымъ разстояніямъ Δ.

Числа эти представляютъ собою результаты обработки послѣднихъ Пулковскихъ наблюденій.

Таблица эта показываетъ, что, для малыхъ эпицентральныхъ разстояній Δ, уголъ β, составляемый плоскостью колебаній частицъ въ поперечныхъ волнахъ съ главной плоскостью, вообще довольно значительный, причемъ онъ мѣняется въ очень широкихъ предѣлахъ, доходя иногда почти до $+90^\circ$ или -90°.

Начиная отъ $\Delta = 4430$, β, за двумя — тремя исключеніями, становится уже значительно меньше.

На величину угла β должны несомнѣнно вліять особенности геологическаго строенія почвы, какъ въ мѣстѣ наблюденія, такъ и въ эпицентральной области, а потому β для разныхъ мѣстъ и получается столь различнымъ.

Но, если эпицентры двухъ землетрясеній лежатъ близко другъ отъ друга, то и уголъ β получается почти одинаковымъ. Примѣромъ тому

Таблица XV.

Число.	Δ	Азимутъ на эпицентръ.	Положеніе эпицентра.	Характеръ волны.	β
29/X 1909 г.	2090 клм.	*SW*— 6° 51′	Около Константинополя.	Сжатіе.	—57°
18/II 1911	2260	*SW*—22 53	Около г. Монастырь. . .	Разрѣжен.	+83
7/VI 1910	2330	*SW*—36 1	Около Калитри (Италія).	Сжатіе.	—57
18/II 1910	2580	*SW*—14 21	Около Крита.	»	—78
11/V 1910	3400	*SE*—72 44	Туркестанъ	»	—58
1/I 1911	3440	*SE*—77 49	Вост.—Туркестанъ . . .	Разрѣжен.	+22
1/I 1911	3460	*SE*—55 24	Около Сѣв. Афганистана	»	+55
12/VII 1910	3840	*SE*—63 58	Сѣверный Афганистанъ	Сжатіе.	—84
17/VIII 1910	4430	*SE*—55 13	Сѣверн. Белуджистанъ .	»	+17
17/VII 1910	5800	*NE*—39 33	Охотское море.	Разрѣжен.	+21
22/V 1910	7200	*NE*—47 5	Около острова Іезо . . .	Сжатіе.	—13
10/XI 1909	7200	*NE*—60 54	Около Южной Японіи. .	»	—33
12/II 1910	7260	*NE*—62 25	Около Южной Японіи. .	Разрѣжен.	—36
14/VIII 1909	7430	*NE*—59 52	Около г. Кіото.	»	+17
9/IX 1910	7470	*NE*—35 39	Около Курильск. остров.	Сжатіе.	—47
11—12/IV 1910	7530	*NE*—73 13	Около Формозы.	Разрѣжен.	—77
10/IX 1910	7710	*NE*—57 8	Ниппонъ	»	—20
1/IX 1910	7770	*NE*—77 38	Формоза	Сжатіе.	— 9
13/V 1911	8270	*NE*—75 17	Недалеко отъ Формозы .	»	—41
9/XII 1909	8410	*NE*—61 30	Къ югу отъ Японіи. . .	Разрѣжен.	+ 3
5/VIII 1910	8540	*NW*—25 20	Около Калифорніи . . .	»	—80
31/V 1910	9440	*NW*—51 6	Мексиканскій заливъ. .	Сжатіе.	+15
7/VI 1911	10050	*NW*—47 43	Мексика.	»	+ 8

могутъ служить два близкихъ Японскихъ землетрясенія 10/XI 1909 и 12/II 1910.

Для близкихъ эпицентральныхъ разстояній, когда болѣе значительная часть троекторіи сейсмическихъ лучей приходится на верхніе слои земли, можно ожидать встрѣтить и большія колебанія и уклоненія въ величинахъ

угла β, что, дѣйствительно, и подтверждается наблюденіями Пулковской сейсмической станціи.

Къ *систематическому* изученію угла β современная сейсмометрія еще не приступала. Это также задача будущаго.

---

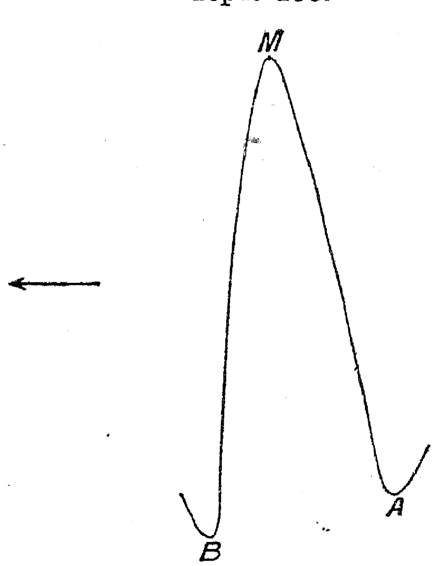
§ 4.

Опредѣленіе смѣщеній почвы при максимальной фазѣ землетрясенія и при микросейсмическихъ колебаніяхъ.

При отдаленныхъ землетрясеніяхъ, послѣ прихода длинныхъ поверхностныхъ волнъ, на соотвѣтствующихъ сейсмограммахъ отъ приборовъ съ сильнымъ затуханіемъ ясно выдѣляется такъ называемая максимальная фаза землетрясенія, гдѣ амплитуды размаховъ наибольшія и соотвѣтствующая кривая имѣетъ, на нѣкоторыхъ мѣстахъ, довольно правильный, синусоидальный характеръ. Эти мѣста и должны быть измѣрены.

До этого слѣдуетъ отмѣтить моментъ начала длинныхъ волнъ, обозначаемый символомъ L. Этотъ моментъ не всегда удается точно опредѣлить, въ виду того, что вступленіе длинныхъ волнъ не всегда бываетъ отчетливо, а потому секунды времени бываютъ иногда сомнительны; въ этихъ случаяхъ можно ограничиваться, при опредѣленіи момента L, десятыми долями минуты.

Черт. 135.



Сейсмограмма Мало-Азіатскаго землетрясенія 9/II 1909 г., представленная на предыдущемъ черт. 25, представляетъ собою типичную сейсмограмму отдаленнаго землетрясенія, гдѣ различныя фазы — P, S, L и M (максимумы) — особенно отчетливо видны.

При опредѣленіи максимальнаго смѣщенія почвы x_m, соотвѣтствующее какому-нибудь максимуму M на сейсмограммѣ, надо имѣть въ виду, что соотвѣтствующій участокъ кривой рѣдко представляетъ собою вполнѣ правильную синусоиду, а большею частью ближайшія къ точкѣ M сосѣднія вершины кривой A и B (см. черт. 135) находятся въ нѣсколько различныхъ разстояніяхъ отъ воображаемой оси временъ.

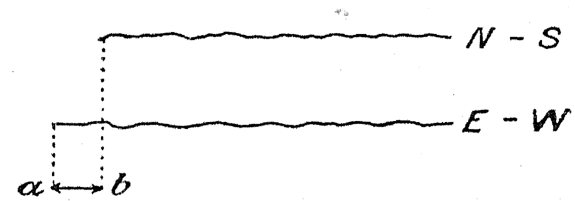
Поэтому, при опредѣленіи по сейсмограммѣ амплитуды y_m, соотвѣтствующей волнѣ *AMB*, измѣряютъ непосредственно разность ординатъ точекъ *M* и *A* и *M* и *B*, и изъ полученныхъ величинъ берутъ затѣмъ среднее. Эта величина представляетъ собою двойную амплитуду $2y_m$, соотвѣтствующую максимуму *M*.

Моментъ, соотвѣтствующій точкѣ *M*, а также періодъ волны T_p, выражаемый горизонтальнымъ разстояніемъ (параллельно оси временъ) между точками *A* и *B*, также снимаются съ сейсмограммы. Для этого пользуются ближайшими къ точкѣ *M* минутными марками на сейсмограммѣ (короткіе перерывы кривой), и по нимъ опредѣляютъ сначала число миллиметровъ, соотвѣтствующихъ одной минутѣ. При помощи этой величины, измѣривъ горизонтальное разстояніе между точками *A* и *B* и разстояніе *M* до ближайшей отмѣтки времени, легко опредѣлить, какъ періодъ волны T_p, такъ и моментъ t_m максимума *M на сейсмограммѣ.* При опредѣленіи истиннаго момента t_m, надо, конечно, всегда принимать во вниманіе поправку соотвѣтствующихъ часовъ и измѣрять t_m по среднему Гринвичскому времени отъ 0 до 24 часовъ, отъ полночи до полночи. T_p надо, по возможности, опредѣлять съ точностью до десятыхъ долей секунды, а t_m съ точностью до 1 секунды.

Если на соотвѣтствующей кривой нѣтъ непосредственныхъ отмѣтокъ времени, то можно воспользоваться отмѣтками времени на сосѣдней кривой, имѣющейся на той-же самой сейсмограммѣ, но тогда, при опредѣленіи t_m, надо считаться съ такъ называемымъ *параллаксомъ* свѣтовыхъ точекъ, т.-е. съ разстояніемъ этихъ двухъ точекъ параллельно оси временъ. Этотъ параллаксъ опредѣляется всегда при смѣнѣ бумаги быстрымъ надвиганіемъ особой ширмы передъ обѣими свѣтовыми точками. Эти ширмы рѣзко обрѣзываютъ обѣ кривыя, и тогда опредѣленіе параллакса точекъ не представляетъ никакихъ затрудненій (см. черт. 136).

Для опредѣленія y_m, T_p и t_m съ сейсмограммы, служитъ стеклянная координатная доска, раздѣленная на квадратные миллиметры (высота и ширина доски 20 см.), которая крайне облегчаетъ всѣ измѣренія. Кривыя разсматриваются подъ лупой, причемъ десятыя доли миллиметра оцѣниваются на глазъ.

Черт. 136.

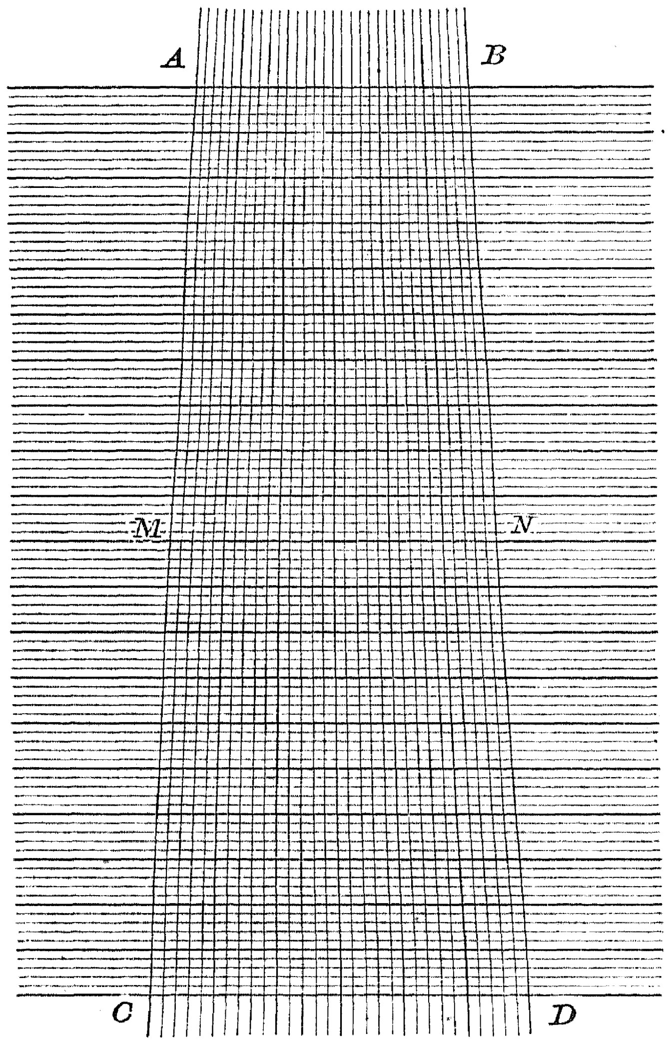


ab — параллаксъ

Если требуется особенная точность измѣреній, то можно воспользоваться особымъ приборомъ, служащимъ для опредѣленія прямоугольныхъ координатъ, и гдѣ кривая разсматривается уже подъ микроскопомъ. Приборъ этотъ даетъ возможность отсчитывать уже сотыя доли миллиметра.

Для опредѣленія T_p можетъ съ пользою служить особый стеклянный масштабъ, представленный на слѣдующемъ чертежѣ 137.

Черт. 137.



Онъ состоитъ изъ ряда горизонтальныхъ линій, какъ AB, MN, CD, проведенныхъ въ разстояніи одного миллиметра другъ отъ друга.

Линіи эти пересѣкаются наклонными линіями, какъ, напримѣръ, AC и BD, которыя образуютъ рядъ клѣтокъ. Число такихъ клѣтокъ въ горизонтальномъ направленіи 30. Разстояніе между концами крайнихъ наклонныхъ линій AC и BD наверху 25 м/м, а внизу 35 м/м ($AB = 25$ м/м, $CD = 35$ м/м). Этотъ стеклянный масштабъ снабженъ дѣленіями.

Для опредѣленія періода сейсмической волны T_p поступаютъ слѣдующимъ образомъ.

Наводятъ сначала, передвигая пластинку вверхъ или внизъ, двѣ крайнія линіи AC и BD на двѣ сосѣднія минутныя марки *у оси временъ* (если только таковыя имѣются) и отмѣчаютъ соотвѣтствующій горизонтальный штрихъ. Пусть это будетъ MN.

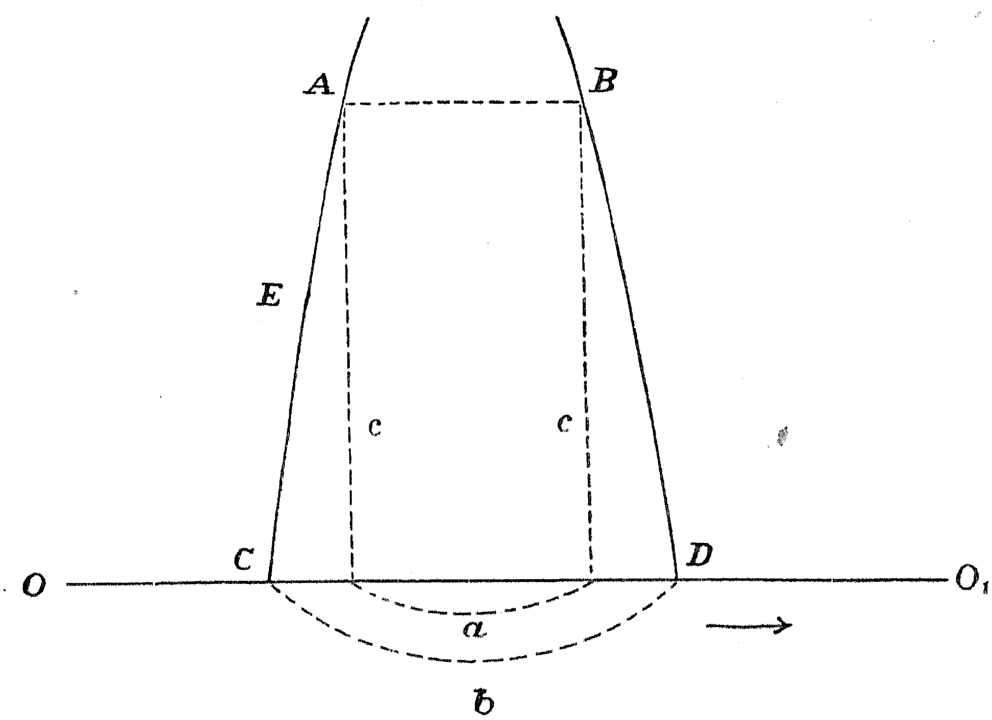
Послѣ этого линію MN прикладываютъ на сейсмограммѣ къ двумъ смежнымъ вершинамъ кривой A и B (см. черт. 135). Если A и B неодинаково удалены отъ оси временъ и если эта разница невелика, то MN помѣщаютъ посрединѣ между A и B, и считаютъ затѣмъ число горизонтальныхъ дѣленій, заключенныхъ вдоль линіи MN между A и B; десятыя доли дѣленій оцѣниваются на глазъ. Умноживъ полученное число на 2, получимъ сразу искомый періодъ T_p, выраженный въ секундахъ и десятыхъ доляхъ секунды.

Этотъ пріемъ особенно удобенъ при опредѣленіи періода сейсмической волны T_p при микросейсмическихъ колебаніяхъ I-го рода, когда обыкновенно

на сейсмограммѣ имѣется цѣлый рядъ послѣдовательныхъ, правильныхъ волнъ. Въ этомъ случаѣ надо только сосчитать число дѣленій и десятыхъ долей дѣленій линіи MN, охватывающихъ *двѣ* полныя волны. Тогда умноженіе на 2 отпадаетъ, и полученное число дастъ намъ уже прямо искомый періодъ волны T_p.

При опредѣленіи M по сейсмограммѣ, надо также отмѣчать на какой сторонѣ оси временъ лежитъ точка M, ставя соотвѣтственно знакъ $+$ или $-$, чтобы знать каково было *направленіе* соотвѣтствующаго максимальнаго смѣщенія почвы. Для этой цѣли регулируютъ сейсмографъ такъ, чтобы смѣщеніе свѣтовой точки кверху ($+$) соотвѣтствовало-бы положительному смѣщенію почвы къ N'у, къ E'у или къ зениту.

Черт. 138.



Всѣ эти измѣренія надо производить для всѣхъ трехъ проэкцій смѣщенія почвы, не ограничиваясь, при измѣреніяхъ сейсмограммъ, только тѣми участками кривой, гдѣ размахи въ максимальной фазѣ наибольшія, но обрабатывая, по возможности, и всѣ тѣ мѣста максимальной фазы, гдѣ движеніе имѣетъ болѣе или менѣе правильный синусоидальный характеръ.

При сильныхъ землетрясеніяхъ, особенно при примѣненіи гальванометрическаго метода регистраціи, случается иногда, что размахи гальванометра становятся столь значительными, что свѣтовой лучъ выходитъ изъ предѣловъ горизонтальной цилиндрической чечевицы, стоящей передъ регистрирнымъ валомъ, и соотвѣтствующая кривая представляется какъ-бы срѣзанной, какъ то̀ представлено на черт. 138, гдѣ OO_1 есть ось временъ.

Въ этомъ случаѣ максимальную амплитуду y_m нельзя непосредственно измѣрить, но ее можно тѣмъ не менѣе опредѣлить экстраполированіемъ.

Для этого выбираютъ двѣ какія-нибудь точки, какъ A и B, въ одинаковомъ разстояніи c отъ оси OO_1, и измѣряютъ, при помощи вышеупомянутой координатной доски, разстояніе c, $AB = a$ и $CD = b$.

Если соотвѣтствующая кривая представляетъ собою часть правильной синусоиды, то по этимъ даннымъ легко можно опредѣлить искомую максимальную амплитуду y_m.

Дѣйствительно, взявъ начало координатъ въ C и обозначивъ абсциссу какой-нибудь произвольной точки E черезъ ξ, а соотвѣтствующую ординату черезъ y, можно представить уравненіе кривой слѣдующей функціей:

$$y = y_m \cdot \sin \pi \frac{\xi}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (78)$$

Абсцисса точки A пусть будетъ ξ_1.

Тогда

$$\xi_1 = \frac{1}{2}(b - a)$$

и

$$c = y_m \cdot \sin \left\{ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{b-a}{b} \right\}.$$

Отсюда находимъ

$$y_m = \frac{c}{\sin \left\{ \frac{b-a}{b} \cdot \frac{\pi}{2} \right\}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (79)$$

По этой формулѣ и можно вычислить величину y_m.

Эта экстраполяція, однако, только тогда допустима, когда соотвѣтствующая кривая дѣйствительно мало отличается отъ синусоиды; кромѣ того не слѣдуетъ экстраполировать слишкомъ далеко.

Можно улучшить результатъ экстраполяціи, взявъ нѣсколько точекъ, въ родѣ A и B, и изъ полученныхъ, такимъ образомъ, величинъ y_m опредѣливъ затѣмъ среднее. Опытъ показываетъ, что этотъ пріемъ приводитъ къ вполнѣ удовлетворительнымъ результатамъ, какъ то видно изъ слѣдующей таблицы XVI, гдѣ приведены результаты экстраполяціи для шести различныхъ максимумовъ, снятыхъ съ Пулковской сейсмограммы большого Мексиканскаго землетрясенія 26/27 III 1908 года.

Согласіе отдѣльныхъ величинъ y_m для того-же максимума можно считать вполнѣ достаточнымъ, тѣмъ болѣе, что, при значительныхъ величинахъ y_m, ошибка въ нѣсколько десятыхъ миллиметра въ величинѣ y_m не имѣетъ особаго значенія.

Таблица XVI.

a	b	c	$b - a$	y_m	Среднія значенія y_m
3,76 м/м	5,14 м/м	50 м/м	1,38 м/м	122,1 м/м	122,5 м/м
3,47		60	1,67	122,8	
3,15		70	1,99	122,5	
2,84	5,10	50	2,26	78,0	78,4
2,27		60	2,83	78,4	
1,56		70	3,54	78,9	
3,29	5,39	70	2,10	121,8	122,6
2,96		80	2,43	123,0	
2,57		90	2,82	122,9	
3,66	5,24	70	1,58	153,5	154,0
3,44		80	1,80	155,7	
3,14		90	2,10	152,9	
3,32	5,41	70	2,09	122,8	122,7
2,99		80	2,42	123,8	
2,54		90	2,87	121,6	
3,55	5,80	70	2,25	122,3	122,4
3,15		80	2,65	121,6	
2,78		90	3,02	123,3	

Снявши величины y_m, T_p и t_m съ сейсмограммы, можно уже приступить къ вычисленію абсолютной величины соотвѣтствующей амплитуды проэкціи истиннаго смѣщенія почвы x_m.

Въ случаѣ простой оптической регистраціи, соотвѣтствующія формулы приведены въ § 4 главы V (формулы (106), (107) и (112)).

$$x_m = \frac{l}{L} \cdot U \cdot y_m, \dots\dots\dots\dots\dots\dots (80)$$

гдѣ

$$U = (1 + u^2) \sqrt{1 - \mu^2 f(u)},$$

$$f(u) = \left(\frac{2u}{1 + u^2}\right)^2$$

и

$$u = \frac{T_p}{T}.$$

Запаздываніе максимума на сейсмограммѣ будетъ

$$\tau = \frac{T_p}{2\pi} \cdot \operatorname{arctg} \left\{ \sqrt{1 - \mu^2} \cdot \frac{2u}{u^2 - 1} \right\} \dots\dots\dots\dots (81)$$

Въ случаѣ гальванометрической регистраціи, соотвѣтствующія формулы даны въ § 3 Главы VI (формулы (46), (47) и (43)).

$$x_m = C_1 (1 + u_1^2)\, U \cdot \frac{y_m}{T_p}, \dots\dots\dots\dots\dots\dots (82)$$

гдѣ

$$C_1 = \frac{\pi l}{k A_1} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (83)$$

и

$$u_1 = \frac{T_p}{T_1}.$$

Дополнительное запаздываніе максимума будетъ

$$\tau_1 = T_p \left[\frac{\operatorname{arctg} \left\{ \frac{2u_1}{u_1^2 - 1} \right\}}{2\pi} + \frac{1}{4} \right] \dots\dots\dots\dots (84)$$

Такимъ образомъ, въ этомъ случаѣ, истинный моментъ t_{x_m}, соотвѣтствующій максимуму *смѣщенія почвы*, опредѣлится по формулѣ

$$t_{x_m} = t_m - \tau - \tau_1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (85)$$

Здѣсь T представляетъ собою собственный періодъ сейсмографа, а T_1 собственный періодъ соотвѣтствующаго гальванометра (оба безъ затуханія); μ^2 есть постоянная затуханія, A_1 — разстояніе зеркала у гальванометра до поверхности регистрирнаго вала въ направленіи нормально падающаго луча, l — приведенная длина сейсмографа, а k — переводный множитель.

Формулы эти, какъ мы видѣли раньше, одинаково примѣнимы, какъ къ горизонтальнымъ, такъ и къ вертикальнымъ сейсмографамъ.

Въ случаѣ механической регистраціи движенія сейсмографа, формула (80) требуетъ еще дополнительной поправки на треніе пера. Однако, вопросъ о механической регистраціи мы разсмотримъ отдѣльно въ главѣ XII.

Для поясненія примѣненія вышеприведенныхъ формулъ для гальванометрической регистраціи, приведемъ численный примѣръ обработки четырехъ максимумовъ M_1, M_2, M_3 и M_4, представленныхъ на предыдущемъ черт. 25 сейсмограммы Мало-Азіатскаго землетрясенія 9/II 1909 г. Кривая эта соотвѣтствуетъ составляющей $N-S$.

Этотъ примѣръ можетъ вмѣстѣ съ тѣмъ служить и схемой для подобнаго рода вычисленій.

При помощи различныхъ таблицъ, помѣщенныхъ въ ранѣе упомянутомъ Сборникѣ, всѣ вычисленія производятся очень просто и быстро.

Постоянныя сейсмографа въ этотъ день были слѣдующія:

$$T = 22{,}^s1$$

$$T_1 = 23{,}^s7$$

$$\mu^2 = +0{,}17$$

$$\operatorname{Log} C_1 = \bar{3}{,}9958.$$

Результаты обработки этихъ четырехъ максимумовъ приведены въ слѣдующей таблицѣ XVII.

Какъ видно, всѣ эти вычисленія чрезвычайно просты.

По тѣмъ же совершенно пріемамъ опредѣляются амплитуды смѣщенія почвы и при микросейсмическихъ колебаніяхъ; только въ этомъ послѣднемъ случаѣ не требуется вовсе такъ точно опредѣлять моменты t_m или t_{x_m}.

Достаточно только указать около какого времени встрѣтился рядъ волнъ съ опредѣленной амплитудой x_m и опредѣленнымъ періодомъ T_p.

Послѣ максимальной фазы наступаетъ та часть сейсмограммы, которая называется Coda или, въ нѣмецкой терминологіи, Nachläufer. Здѣсь амплитуды уже значительно меньше и движеніе вообще гораздо менѣе правильное.

Значеніе Coda еще недостаточно выяснено.

По мнѣнію Wiechert'а, колебанія почвы при Coda соотвѣтствуютъ не длиннымъ поверхностнымъ сейсмическимъ волнамъ, идущимъ изъ эпицентра, а *собственнымъ колебаніямъ* всей земной оболочки, покоящейся на слоѣ магмы. По Wiechert'у, въ Coda встрѣчаются преимущественно періоды въ 18 и 12 секундъ. При Азіатскихъ землетрясеніяхъ преобладаютъ въ Coda періоды въ 12^s, а, при Американскихъ, въ 18^s, хотя въ послѣднихъ частяхъ сейсмограммъ отъ Азіатскихъ землетрясеній появляются также періоды и въ 18 секундъ.

Таблица XVII.

	Максимумы →	M_1 (вверху)	M_2 (внизу)	M_3 (вверху)	M_4 (внизу)	
	t_m	$11^{ч}\ 38^{м}\ 4^{c}$	$11^{ч}\ 38^{м}\ 48^{c}$	$11^{ч}\ 40^{м}\ 9^{c}$	$11^{ч}\ 40^{м}\ 52^{c}$	Изъ оригинальной сейсмограммы.
	T_p	$18^{c},3$	$16^{c},4$	$12^{c},2$	$13^{c},1$	
	$2y_m$	$+$ 89,25 м/м	— 88,6 м/м	$+$ 50,5 м/м	— 49,25 м/м	
	u	0,828	0,742	0,552	0,593	Изъ таблицы II Сборника.
	u_1	0,772	0,692	0,515	0,553	
	$\mathrm{Lg}\,(1+u_1^2)$	0,2030	0,1699	0,1022	0,1159	Изъ таблицы III.
	$\mathrm{Lg}\,U$	0,1878	0,1538	0,0873	0,1004	Изъ таблицы V.
	$\mathrm{Lg}\,2y_m$	1,9506	1,9474 (n)	1,7033	1,6924 (n)	
	$\mathrm{Lg}\,\frac{1}{T_p}$	$\bar{2}$,7375	$\bar{2}$,7852	$\bar{2}$,9136	$\bar{2}$,8827	
	$\mathrm{Lg}\,C_1$	$\bar{3}$,9958	$\bar{3}$,9958	$\bar{3}$,9958	$\bar{3}$,9958	
	$\mathrm{Lg}\,2x_m$	$\bar{1}$,0747	$\bar{1}$,0521 (n)	$\bar{2}$,8022	$\bar{2}$,7872 (n)	
	$2x_m$	$+$ 0,1188	— 0,1127	$+$ 0,0634	— 0,0613	
	$\frac{\tau}{T_p}$	0,283	0,301	0,347	0,337	Изъ таблицы VI.
	$\frac{\tau_1}{T_p}$	0,541	0,558	0,598	0,589	Изъ таблицы VII.
	$\frac{\tau+\tau_1}{T_p}$	0,824	0,859	0,945	0,926	
	$\tau+\tau_1$	$15^{c},1$	$14^{c},1$	$11^{c},5$	$12^{c},1$	
Окончательный результатъ	t_{x_m}	$11^{ч}\ 37^{м}\ 49^{c}$	$11^{ч}\ 38^{м}\ 34^{c}$	$11^{ч}\ 39^{м}\ 57^{c}$	$11^{ч}\ 40^{м}\ 40^{c}$	
	T_p	$18^{c},3$	$16^{c},4$	$12^{c},2$	$13^{c},1$	
	x_m въ микронахъ	$+\ 59^{\mu}$	$-\ 56^{\mu}$	$+\ 32^{\mu}$	$-\ 31^{\mu}$	

Амплитуды проекцій смѣщенія почвы въ Coda излишне вычислять. Слѣдуетъ опредѣлять лишь періодъ волны въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ сейсмограмма имѣетъ болѣе или менѣе правильный синусоидальный характеръ, и соотвѣтствующій приближенный моментъ.

На сейсмограммѣ слѣдуетъ отмѣчать еще и конецъ землетрясенія, для чего употребляется символъ F (Finis). Но, такъ какъ колебанія почвы при дальнихъ землетрясеніяхъ никогда сразу не прекращаются, а убываютъ въ интенсивности постепенно, то можно опредѣлить моментъ F только весьма приближенно, — максимумъ съ точностью до четверти часа. Впрочемъ F и не имѣетъ большого практическаго значенія.

На сейсмограммахъ отъ сильныхъ землетрясеній можно подмѣтить иногда волны максимальной фазы, пришедшія отъ эпицентра къ мѣсту наблюденій послѣ огибанія земного шара со стороны антиэпицентра. Это такъ называемыя волны W_2.

Если онѣ ясно выражены, то для нихъ слѣдуетъ также опредѣлять x_m, T_p и t_{x_m}, такъ какъ по этимъ даннымъ, какъ мы видѣли раньше въ § 2 гл. II, можно опредѣлить среднюю скорость распространенія поверхностныхъ сейсмическихъ волнъ V, равно какъ и коеффиціентъ затуханія поверхностной сейсмической энергіи (см. формулы (89) и (103) гл. II).

Это-же замѣчаніе относится и къ волнамъ W_3, которыя, придя отъ эпицентра къ мѣсту наблюденій по кратчайшему пути, еще разъ огибаютъ весь земной шаръ (см. формулы (90) и (104) главы II).

Далѣе представленъ образчикъ схемы еженедѣльнаго сейсмическаго бюллетеня, принятаго нашей Сейсмической Комиссіей для русскихъ сейсмическихъ станцій I-го разряда.

На первой страницѣ даны координаты станціи, свѣдѣнія объ употребляемыхъ приборахъ и указанія на всѣ тѣ данныя, которыя слѣдуетъ помѣщать въ бюллетенѣ.

Вторая и третья страницы предназначены для самого бюллетеня, причемъ моменты для P, S, L и F достаточно давать по одному какому-нибудь прибору, такъ какъ, если сейсмографы въ порядкѣ, то между этими моментами для различныхъ приборовъ не можетъ быть существенной разницы. То-же замѣчаніе относится и до періодовъ T_p. Для дальнихъ землетрясеній начало первой фазы P особенно отчетливо выдѣляется на сейсмограммахъ отъ вертикальнаго сейсмографа. Въ примѣчаніяхъ можно помѣщать свѣдѣнія объ азимутѣ эпицентра, о координатахъ эпицентра, о періодѣ волнъ около P и пр.

Послѣдняя страница предназначена для помѣщенія свѣдѣній о микросейсмическихъ движеніяхъ I-го рода.

Эти свѣдѣнія, т.-е. періодъ T_p и амплитуды всѣхъ трехъ составляющихъ смѣщенія почвы, надо давать черезъ каждые 6 часовъ Гринвичскаго времени, не пріурочивая эти данныя къ какому-нибудь строго опредѣленному моменту, но ограничиваясь наибольшими величинами амплитудъ *около* даннаго часа наблюденій (съ точностью до $^1/_4$ часа).

Если между указанными въ таблицѣ часами наблюденій замѣчалось рѣзкое усиленіе или ослабленіе микросейсмическихъ колебаній I-го рода, то это обстоятельство надо отмѣтить въ отдѣлѣ «Общія замѣчанія», съ указаніемъ соотвѣтственныхъ періодовъ и амплитудъ.

Здѣсь-же помѣщаются свѣдѣнія и о микросейсмическихъ колебаніяхъ II-го рода, вмѣстѣ съ краткими указаніями о состояніи погоды въ это время, главнымъ образомъ силы вѣтра.

Въ заключеніе этого отдѣла слѣдуетъ упомянуть о томъ, что различные приборы, если только они снабжены достаточно сильнымъ затуханіемъ, даютъ въ общемъ весьма согласныя величины для максимальныхъ смѣщеній почвы x_m, что неоднократно подтверждалось наблюденіями Пулковской сейсмической станціи. Чрезвычайно важно было-бы регистрировать также смѣщенія почвы на различныхъ сейсмическихъ станціяхъ съ совершенно одинаковыми апеpіодическими сейсмографами. Изъ сравненія такихъ сейсмограммъ можно было бы, вѣроятно, вывести много интересныхъ заключеній о законахъ распространенія разныхъ типовъ сейсмическихъ волнъ. Полезно было бы также имѣть на первоклассныхъ сейсмическихъ станціяхъ два полныхъ комплекта приборовъ — одинъ на большую, а другой на малую чувствительность.

---

§ 5.

Методъ почленнаго интегрированія.

Въ настоящее время современная сейсмометрія ограничивается при обработкѣ сейсмограммъ, кромѣ опредѣленія моментовъ отдѣльныхъ фазъ землетрясенія, только опредѣленіемъ абсолютныхъ смѣщеній почвы при простыхъ, гармоническихъ колебаніяхъ. Было-бы, однако, чрезвычайно важно и интересно, не ограничиваться только изученіемъ простыхъ синусоидальныхъ волнъ, а ближе изслѣдовать *наложеніе* сейсмическихъ волнъ различныхъ періодовъ и амплитудъ. На этомъ пути несомнѣнно открылось-бы много интересныхъ соотношеній и законовъ, которые позволили-бы лучше уяснить себѣ весь сложный механизмъ колебаній нашей земной оболочки.

Еще болѣе общей задачей было-бы изученіе хода измѣняемости какой-либо изъ трехъ составляющихъ смѣщенія почвы какъ функціи времени за всю продолжительность землетрясенія или, по крайней мѣрѣ, въ теченіе какого-нибудь опредѣленнаго промежутка времени.

Эта задача представляетъ, однако, большія практическія трудности, которыя, тѣмъ не менѣе, вполнѣ преодолимы, хотя рѣшеніе этого вопроса и

№ Съ по 1912.

Еженедѣльный бюллетень
центральной сейсмической станціи
въ Пулковѣ.

$\varphi = 59^\circ 46' 22''$ N. $\lambda = 30^\circ 19' 25''$ E. $h = 65$ m.

Грунтъ: глина.

Приборы: апеперіодич. маятники съ гальваном. регистраціей системы кн. Б. Б. Голицына.

Объясненіе знаковъ.

Фазы.

P = первая предварительная фаза.

S = вторая предварительная фаза.

L = длинныя волны.

$M_1, M_2 \ldots$ = послѣдовательные maximum'ы (исправленные на запаздываніе приборовъ) *).

$C_1, C_2 \ldots$ = послѣдовательные вторичные maximum'ы, слѣдующ. за главн. фазой.

F = конецъ.

i = рѣзкое наступленіе любой фазы.
e = неотчетливое наступленіе фазы.
} ставится въ особыхъ случаяхъ передъ знакомъ фазы, а также какъ самостоятельный символъ, когда природа фазы не ясна.

Періоды и амплитуды.

T_p = періодъ = продолжительность полнаго колебанія въ секундахъ.

A_n = амплитуда NS — составл. истиннаго смѣщ. почвы въ μ отъ положенія равновѣсія (+ къ N).

A_e = амплитуда EW — составл. истиннаго смѣщ. почвы въ μ отъ положенія равновѣсія (+ къ E).

A_z = амплитуда вертик. сост. истиннаго смѣщ. почвы въ μ отъ положенія равновѣсія (+ къ зениту).

Δ = эпицентральное разстояніе въ кил.

Время — среднее гринвичское отъ полуночи до полуночи.

μ = микронъ = 0,001 $^{м}/_{м}$.

---

*) Моменты maximum'овъ смѣщенія почвы, но не maximum'овъ на сейсмограммѣ.

Дата.	Фазы.	Время.	T_p	Амплитуды			Δ	Примѣчанія.
				A_n	A_e	A_z		

Дата.	Фазы.	Время.	T_p	Амплитуды			Δ	Примѣчанія.
				A_n	A_e	A_z		

Микросейсмическія движенія.

Амплитуда — наибольшая около указаннаго часа; время — съ точностью до четверти часа.

Число.	Часъ.	T_p	A_n	A_e	A_z	Число.	Часъ.	T_p	A_n	A_e	A_z
							0				
	0						6				
	6						12				
	12						18				
	18						0				
	0						6				
	6						12				
	12						18				
	18						0				
	0						6				
	6						12				
	12						18				
	18										
	0										
	6										
	12										
	18										

Общія замѣчанія.

сопряжено съ большой затратой времени. Этимъ вопросомъ занимались у насъ И. И. Померанцевъ и отчасти А. Я. Орловъ, въ Германіи-же Arnold.

Задача эта рѣшается при помощи квадратуръ той эмпирической кривой, которая получается на сейсмограммѣ.

Теорія этого способа основана на почленномъ интегрированіи основного дифференціальнаго уравненія движенія сейсмографа.

Разсмотримъ теперь эту теорію.

Мы начнемъ съ простѣйшаго случая, когда движеніе сейсмографа регистрируется прямо оптически, а затѣмъ уже перейдемъ къ гальванометрическому методу регистраціи.

Механическій способъ регистраціи движенія сейсмографа мы здѣсь вовсе разсматривать не будемъ, такъ какъ онъ вводитъ столь мало изученный и непостоянный элементъ, какъ треніе пера о закопченную бумагу, такъ что, при этомъ способѣ регистраціи, почти совершенно невозможно примѣнять этотъ въ высшей степени тонкій и деликатный методъ къ анализу сейсмограммъ.

Возьмемъ какую-нибудь изъ трехъ проэкцій смѣщенія почвы x, и предположимъ, что x есть нѣкоторая функція отъ времени t, видъ которой и требуется опредѣлить.

$$x = f(t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (86)$$

Дифференціальное уравненіе движенія соотвѣтствующаго сейсмографа представится тогда въ слѣдующемъ видѣ:

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta + \frac{1}{l}x'' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (87)$$

Мы не будемъ здѣсь дѣлать никакихъ предположеній о величинѣ постоянной затуханія ε, оставляя этотъ вопросъ совершенно открытымъ, но будемъ предполагать, тѣмъ не менѣе, что всѣ три постоянныя сейсмографа, а именно ε, n и l извѣстны.

Къ этому сейсмографу примѣнимъ простой оптическій методъ регистраціи.

Обозначимъ отклоненіе свѣтовой точки отъ положенія равновѣсія черезъ y, а разстояніе зеркала около оси вращенія сейсмографа до поверхности регистрирнаго вала, въ направленіи нормально падающаго луча, черезъ A.

Тогда длина соотвѣтствующаго оптическаго рычага будетъ

$$L = 2A$$

и

$$y = L\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (88)$$

Умножая уравненіе (87) на L, и, принимая во вниманіе, что, согласно выводамъ § 4 главы V (см. формулу (114)), отношеніе $\frac{L}{l}$ представляетъ собою нормальное увеличеніе $\mathfrak{B}_0$ прибора для колебаній безконечно-малаго періода, будемъ имѣть

$$y'' + 2\varepsilon y' + n^2 y + \mathfrak{B}_0 x'' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (89)$$

y какъ функція времени t извѣстна. Эта зависимость дается кривой на сейсмограммѣ.

Итакъ положимъ, что

$$y = F(t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (90)$$

Основная задача сейсмометріи и заключается въ томъ, чтобы, по извѣстной функціи $F(t)$, найти неизвѣстную функцію $f(t)$, притомъ, отдѣльно, для каждой изъ трехъ составляющихъ смѣщеній почвы.

Начнемъ съ простѣйшаго случая, а именно, когда, при $t = 0$, все находилось въ покоѣ.

Тогда

$$x_0 = 0$$

и

$$y_0 = 0.$$

Въ моментъ $t = 0$ началось движеніе почвы. Соотвѣтствующая начальная скорость пусть будетъ x_0', а начальная скорость для y — y_0'.

y_0' можно найти изъ уравненія (89) по ранѣе примѣнявшемуся пріему почленнаго интегрированія уравненія между предѣлами $t = 0$ и $t = \tau$, и положивши затѣмъ въ предѣлѣ $\tau = 0$.

Мы получимъ, такимъ образомъ,

$$y_0' = -\mathfrak{B}_0 x_0' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (91)$$

Чтобы найти x какъ функцію отъ t, будемъ почленно интегрировать уравненіе (89) въ предѣлахъ между 0 и t.

Это приведетъ насъ къ слѣдующему уравненію:

$$y' - y_0' + 2\varepsilon(y - y_0) + n^2\int_0^t y\,dt + \mathfrak{B}_0(x' - x_0') = 0.$$

Принимая во вниманіе соотношеніе (91) и условіе $y_0 = 0$, будемъ имѣть

$$y' + 2\varepsilon y + n^2 \int_0^t y dt + \mathfrak{V}_0 x' = 0.$$

Проинтегрируемъ это послѣднее уравненіе вновь почленно между тѣми-же самыми предѣлами 0 и t.

Тогда, принимая во вниманіе, что $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$, мы будемъ имѣть

$$y + 2\varepsilon \int_0^t y dt + n^2 \int_0^t dt \int_0^t y dt + \mathfrak{V}_0 x = 0$$

или

$$x = -\frac{1}{\mathfrak{V}_0}\left[y + 2\varepsilon \int_0^t y dt + n^2 \int_0^t dt \int_0^t y dt\right] \qquad (92)$$

Опредѣленные интегралы, входящіе въ эту формулу, могутъ быть опредѣлены по методу квадратуръ, напр., измѣреніемъ на сейсмограммѣ ряда равноотстоящихъ ординатъ (правила Симпсона) или пользуясь какимъ-нибудь интеграфомъ.

Формула (92) даетъ, такимъ образомъ, возможность опредѣлить x какъ функцію отъ t, иначе говоря, для каждаго заданнаго t, мы можемъ найти соотвѣтствующее значеніе x.

Формула (92) предполагаетъ, однако, что въ начальный моментъ $t = 0$ все находилось въ покоѣ и что первая производная x по времени представляетъ собою въ данныхъ предѣлахъ интегрированія *непрерывную функцію* времени t. Это послѣднее обстоятельство, однако, рѣдко имѣетъ мѣсто. На самомъ дѣлѣ, при землетрясеніяхъ, приходится имѣть постоянно дѣло съ *наложеніемъ* различныхъ системъ сейсмическихъ волнъ, которыя притомъ достигаютъ мѣста наблюденія *въ разное время*, вслѣдствіе чего кривая $x = f(t)$, въ моментъ вступленія новой волны, будетъ имѣть особую, такъ называемую угловую точку (point angulaire), въ которой соотвѣтствующая кривая имѣетъ двѣ касательныя; иначе говоря, величина первой производной $\frac{dx}{dt}$, при переходѣ черезъ эту точку, дѣлаетъ внезапный скачекъ и будетъ, слѣдовательно, функціей прерывистой.

Это обстоятельство непремѣнно надо учитывать. Какъ это сдѣлать, мы сейчасъ увидимъ.

Возьмемъ теперь болѣе общій случай.

Пусть въ моментъ $t = t_1$

$$x = x_1, \quad x' = x_1', \quad y = y_1 \text{ и } y' = y_1'.$$

Въ этотъ моментъ пусть вступаетъ новая волна, благодаря которой частица земной поверхности пріобрѣтаетъ окончательную, *равнодѣйствующую* скорость x_2'.

Итакъ, въ моментъ $t = t_1$, до вступленія новой волны, скорость была x_1', а, послѣ вступленія, она стала x_2', причемъ разность $x_2' - x_1'$ является величиной конечной.

На сейсмограммѣ въ этомъ мѣстѣ долженъ обнаружиться рѣзкій изгибъ кривой въ видѣ зазубрины, причемъ новая скорость пусть будетъ y_2'. y_2' отличается отъ y_1' также на конечную величину.

Для опредѣленія y_2', прибѣгнемъ опять къ почленному интегрированію уравненія (89) въ предѣлахъ между $t = t_1 - \frac{\tau}{2}$ и $t = t_1 + \frac{\tau}{2}$, а затѣмъ перейдемъ къ предѣлу, положивши $\tau = 0$.

Мы найдемъ, такимъ образомъ, что

$$y_2' - y_1' + \mathfrak{B}_0 (x_2' - x_1') = 0$$

или

$$y_2' = y_1' - \mathfrak{B}_0 (x_2' - x_1') \dots\dots\dots\dots\dots (93)$$

Теперь возьмемъ моментъ $t = t_1$ за моментъ новаго начала счета временъ и будемъ опять почленно интегрировать уравненіе (89) въ предѣлахъ между 0 и t, и въ предположеніи, что между этими новыми предѣлами функція $x = f(t)$ не имѣетъ особыхъ точекъ.

Новыя начальныя условія движенія, при $t = 0$, будутъ

$$x_0 = x_1 \qquad y_0 = y_1$$

$$x_0' = x_2' \qquad y_0' = y_2' = y_1' - \mathfrak{B}_0 (x_2' - x_1').$$

При первомъ интегрированіи получимъ

$$y' - \{y_1' - \mathfrak{B}_0 (x_2' - x_1')\} + 2\varepsilon (y - y_1) + n^2 \int_0^t y dt + \mathfrak{B}_0 (x' - x_2') = 0$$

или

$$y' + 2\varepsilon y + n^2 \int_0^t y dt + \mathfrak{B}_0 x' = [y_1' + 2\varepsilon y_1 + \mathfrak{B}_0 x_1'] \dots\dots (94)$$

Членъ, стоящій въ правой части этого уравненія, есть нѣкоторая постоянная величина.

Проинтегрируемъ теперь почленно уравненіе (94) между тѣми-же самыми предѣлами.

Будемъ имѣть

$$y - y_1 + 2\varepsilon\int_0^t y dt + n^2\int_0^t dt\int_0^t y dt + \mathfrak{B}_0(x - x_1) = [y_1' + 2\varepsilon y_1 + \mathfrak{B}_0 x_1']\, t$$

или

$$x = x_1 - \frac{1}{\mathfrak{B}_0}\left[\left\{y + 2\varepsilon\int_0^t y dt + n^2\int_0^t dt\int_0^t y dt\right\} - y_1 - \{y_1' + 2\varepsilon y_1 + \mathfrak{B}_0 x_1'\}\, t\right] \ldots.(95)$$

Когда постоянныя x_1, y_1, x_1' и y_1' извѣстны, то по этой формулѣ можно вычислить x какъ функцію отъ t. Формула (95) сохраняетъ свою силу до вступленія новой сейсмической волны, послѣ чего начальныя условія движенія снова измѣнятся.

До сихъ поръ мы предполагали, что всѣ ординаты кривой измѣрены совершенно вѣрно, иначе говоря, что мы знаемъ точное положеніе нулевой линіи. Но на самомъ дѣлѣ всѣ ординаты могутъ содержать небольшую постоянную ошибку α, такъ что въ предыдущихъ формулахъ ко всѣмъ величинамъ y надо присоединить поправку α.

Но кромѣ того возможно, что нулевая линія, отъ которой мы измѣряемъ всѣ ординаты, имѣетъ небольшой наклонъ. Тогда придется присоединить еще вторую поправку, пропорціональную времени.

Такимъ образомъ, къ каждому y надо въ формулѣ (95) присоединить небольшую поправку

$$\alpha + \beta t,$$

гдѣ α и β суть двѣ постоянныя, которыя могутъ быть или положительны, или отрицательны.

Сдѣлавъ это, будемъ имѣть

$$x = x_1 - \frac{1}{\mathfrak{B}_0}\left[\{y + \alpha + \beta t\} + 2\varepsilon\left\{\int_0^t y dt + \alpha t + \frac{1}{2}\beta t^2\right\}\right.$$
$$+ n^2\left\{\int_0^t dt\int_0^t y dt + \frac{1}{2}\alpha t^2 + \frac{1}{6}\beta t^3\right\} - \{y_1 + \alpha\}$$
$$\left. - \{y_1' + \beta + 2\varepsilon y_1 + 2\varepsilon\alpha + \mathfrak{B}_0 x_1'\}\, t\right].$$

Здѣсь y представляетъ уже собою величину *измѣренной* ординаты.

Въ этомъ выраженіи нѣсколько членовъ взаимно сократятся, и мы можемъ окончательно представить x функціей слѣдующаго вида:

$$x = x_1 - \frac{1}{\mathfrak{B}_0}\left[y + 2\varepsilon\int_0^t y dt + n^2\int_0^t dt\int_0^t y dt - \{A + Bt + Ct^2 + Dt^3\}\right] \ldots .(96)$$

Здѣсь постоянныя A, B, C и D имѣютъ слѣдующее значеніе:

$$\left.\begin{aligned} A &= + y_1 \\ B &= + [y_1' + 2\varepsilon y_1 + \mathfrak{B}_0 x_1'] \\ C &= -\frac{1}{2}[n^2\alpha + 2\varepsilon\beta] \\ D &= -\frac{1}{6} n^2 \beta \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (97)$$

При выводѣ формулы (96) мы предположили, что, въ моментъ $t = 0$, вступила новая сейсмическая волна. Это предположеніе, однако, какъ легко видѣть, совершенно несущественно и не имѣетъ даже ровно никакого значенія, такъ какъ начальная скорость x_2' въ формулу (96) вовсе даже не входитъ, а имѣютъ значеніе только величины x_1, x_1', y_1 и y_1'. Такимъ образомъ, та точка, отъ которой мы начинаемъ новый счетъ временъ, можетъ быть *совершенно произвольная* точка сейсмограммы.

Формула (96) является, такимъ образомъ, совершенно общей.

При этомъ надо только помнить, что, при всякомъ вступленіи новой волны, одна изъ постоянныхъ (B), опредѣляемыхъ соотношеніями (97), какъ-бы мѣняетъ свое значеніе.

Введемъ теперь слѣдующія обозначенія:

$$I = y + 2\varepsilon\int_0^t y dt + n^2\int_0^t dt\int_0^t y dt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (98)$$

и

$$P = A + Bt + Ct^2 + Dt^3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (99)$$

гдѣ P есть полиномъ третьей степени.

Тогда

$$x = x_1 - \frac{1}{\mathfrak{B}_0}[I - P] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (100)$$

Изслѣдуемъ ближе эту формулу, причемъ мы примемъ для простоты,

что α и β равны нулю, т.-е. что ординаты кривой измѣрены совершенно вѣрно.

Функція I опредѣляется изъ кривой сейсмограммы при помощи квадратуръ, слѣдовательно I есть функція *извѣстная*.

По существу дѣла x не можетъ непрерывно возрастать вмѣстѣ съ t, а, такъ какъ формула (100) содержитъ полиномъ P, то изъ этого слѣдуетъ заключить, что сама функція I, кромѣ періодическихъ членовъ, *должна* обязательно, заключать въ себѣ и нѣкоторый полиномъ.

Тѣ авторы, которые занимались вычисленіемъ функціи I изъ сейсмограммы, замѣтили, что, по мѣрѣ возрастанія t, I становится, съ теченіемъ времени, все больше и больше. Они приписали это явленіе вліянію ошибокъ α и β.

Причина этого кроется, однако, повидимому, не столько въ ошибочности измѣренія ординатъ y, такъ какъ α и β во всякомъ случаѣ очень малы, къ тому-же они вовсе и не входятъ въ выраженіе постоянныхъ A и B, а главнымъ образомъ въ томъ, что вычисленіе x производилось, не обращая достаточнаго вниманія на начальныя условія движенія, т.-е. не учитывая вліянія полинома P, одинъ изъ коеффиціентовъ коего къ тому-же мѣняется при вступленіи каждой новой волны.

Этими измѣняющимися начальными условіями, однако, никоимъ образомъ пренебрегать нельзя, и сплошное интегрированіе кривой $y = F(t)$ безъ учета особыхъ точекъ функціи $x = f(t)$ *совершенно недопустимо*.

Справедливость вышесказаннаго легко показать на слѣдующемъ простомъ примѣрѣ.

Предположимъ, для простоты, что сейсмографъ совершенно лишенъ затуханія. Тогда дифференціальное уравненіе его движенія будетъ

$$y'' + n^2 y + \mathfrak{B}_0 x'' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (101)$$

Предположимъ теперь, что до момента $t = t_1$ движеніе почвы было совершенно произвольное, и что въ этотъ моментъ мы имѣемъ слѣдующую группу величинъ:

$$x_1,\ x_1',\ y_1 \text{ и } y_1'.$$

Начиная съ момента t_1, который мы и примемъ за новое начало счета временъ, движеніе почвы пусть удовлетворяетъ закону простыхъ гармоническихъ колебаній

$$x = x_1 + x_m \sin pt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (102)$$

Новыя начальныя условія движенія будутъ въ этомъ случаѣ

$$x_0 = x_1, \quad x_0' = p\, x_m,$$
$$y_0 = y_1, \quad y_0' = y_1' - \mathfrak{B}_0 (x_0' - x_1') \text{ (см. формулу (93))}.$$

Если x удовлетворяетъ уравненію (102), то общій интегралъ уравненія (101) представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$y = \Gamma_1 \cos nt + \Gamma_2 \sin nt + \mathfrak{B}_0 x_m \frac{p^2}{n^2 - p^2} \sin pt, \ldots \ldots (103)$$

гдѣ Γ_1 и Γ_2 суть двѣ произвольныя постоянныя интегрированія.

Въ справедливости этой формулы можно легко убѣдиться простой подстановкой.

Дѣйствительно, изъ формулы (103) мы имѣемъ

$$y'' = -n^2 \Gamma_1 \cos nt - n^2 \Gamma_2 \sin nt - \mathfrak{B}_0 x_m \frac{p^4}{n^2 - p^2} \sin pt.$$

Подставляя величины y'' и y въ формулу (101), будемъ имѣть

$$\Gamma_1 (-n^2 + n^2) \cos nt + \Gamma_2 (-n^2 + n^2) \sin nt$$
$$- \mathfrak{B}_0 x_m \frac{p^4}{n^2 - p^2} \sin pt + \mathfrak{B}_0 x_m \frac{p^2 n^2}{n^2 - p^2} + \mathfrak{B}_0 x'' = 0$$

или

$$\mathfrak{B}_0 x_m . \sin pt \left\{ - \frac{p^4}{n^2 - p^2} + \frac{p^2 n^2}{n^2 - p^2} - p^2 \right\}$$
$$= \frac{p^2}{n^2 - p^2} \cdot \mathfrak{B}_0 x_m . \sin pt \left\{ -p^2 + n^2 - n^2 + p^2 \right\} = 0.$$

Это уравненіе тождественно равно нулю при всякихъ значеніяхъ t.

Для опредѣленія Γ_1 и Γ_2 обратимся къ начальнымъ условіямъ движенія. Изъ уравненія (103) находимъ

$$y' = -\Gamma_1 n \sin nt + \Gamma_2 n \cos nt + \mathfrak{B}_0 x_m \frac{p^3}{n^2 - p^2} \cos pt \ldots . (104)$$

Положимъ теперь въ уравненіяхъ (103) и (104) $t = 0$.

Тогда

$$\Gamma_1 = y_1 \ldots \ldots \ldots \ldots (105)$$

и

$$y_1' - \mathfrak{B}_0 (x_0' - x_1') = y_1' - \mathfrak{B}_0 (p x_m - x_1')$$
$$= \Gamma_2 n + \mathfrak{B}_0 x_m \frac{p^3}{n^2 - p^2}$$

или

$$\Gamma_2 = \frac{1}{n}\left[y_1' + \mathfrak{B}_0 x_1' - p\,\mathfrak{B}_0 x_m \left\{1 + \frac{p^2}{n^2 - p^2}\right\}\right],$$

или еще

$$\Gamma_2 = \frac{1}{n}\left[y_1' + \mathfrak{B}_0 x_1' - \mathfrak{B}_0 x_m \frac{pn^2}{n^2 - p^2}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (106)$$

Подставивъ эти значенія Γ_1 и Γ_2 въ формулу (103), мы получимъ y какъ функцію отъ t:

$$y = F(t).$$

Эта кривая соотвѣтствуетъ какъ-бы кривой сейсмограммы. Въ данномъ случаѣ она представляетъ собою наложеніе двухъ простыхъ синусоидъ съ соотвѣтственными періодами

$$T = \frac{2\pi}{n}$$

и

$$T_p = \frac{2\pi}{p}.$$

Задача и заключается въ томъ, чтобы, зная функцію $F(t)$, найти неизвѣстное движеніе почвы $x = f(t) = x_1 + x_m \sin pt$.

Для этого надо воспользоваться общей интегральной формулой (100).

Въ данномъ случаѣ намъ нѣтъ надобности прибѣгать къ квадратурамъ, такъ какъ аналитическій видъ функціи $y = F(t)$ заданъ.

Вычислимъ сначала значеніе функціи I (см. формулу (98), гдѣ $\varepsilon = 0$).

Мы имѣемъ для этого слѣдующія соотношенія:

$$\int_0^t \cos nt\,dt = \frac{1}{n}\sin nt$$

$$\int_0^t dt \int_0^t \cos nt\,dt = \frac{1}{n^2}[1 - \cos nt]$$

$$\int_0^t \sin nt\,dt = -\frac{1}{n}[\cos nt - 1]$$

$$\int_0^t dt \int_0^t \sin nt\,dt = \frac{1}{n}\left[t - \frac{\sin nt}{n}\right].$$

Слѣдовательно, изъ формулъ (98) и (103) будемъ имѣть

$$I = y + n^2 \int_0^t dt \int_0^t y dt = \Gamma_1 \cos nt + \Gamma_2 \sin nt$$

$$+ \mathfrak{B}_0 x_m \frac{p^2}{n^2 - p^2} \sin pt + n^2 \Big[\Gamma_1 \frac{1}{n^2} \{1 - \cos nt\} + \Gamma_2 \frac{1}{n} \Big\{ t - \frac{\sin nt}{n} \Big\}$$

$$+ \mathfrak{B}_0 x_m \frac{p}{n^2 - p^2} \Big\{ t - \frac{\sin pt}{p} \Big\} \Big]$$

$$= \mathfrak{B}_0 x_m \Big\{ \frac{p^2}{n^2 - p^2} - \frac{n^2}{n^2 - p^2} \Big\} \sin pt + \Gamma_1 + n \Big\{ \Gamma_2 + \mathfrak{B}_0 x_m \frac{pn}{n^2 - p^2} \Big\} t$$

или, подставляя сюда значенія Γ_1 и Γ_2 изъ формулъ (105) и (106),

$$I = -\mathfrak{B}_0 x_m \sin pt + y_1 + [y_1' + \mathfrak{B}_0 x_1'] t \; \ldots\ldots\ldots (107)$$

Эта формула показываетъ намъ, что функція I, кромѣ періодическаго члена, содержитъ въ себѣ еще *линейную функцію* времени t.

Изъ этого слѣдуетъ, что, по мѣрѣ возрастанія t, функція I будетъ безпредѣльно возрастать, даже *при отсутствіи* какихъ-либо ошибокъ въ измѣренныхъ ординатахъ (α и β равны нулю), на что раньше и было указано.

Для полученія искомой функціи x, надо, согласно формулѣ (100), вычесть изъ I полиномъ P.

Изъ формулъ (99) и (97) слѣдуетъ, принимая во вниманіе, что, по предположенію, коеффиціенты C и D, равно какъ и ε, равны нулю,

$$P = A + Bt = y_1 + [y_1' + \mathfrak{B}_0 x_1'] t.$$

Подставляя теперь значеніе I (изъ формулы (107)) и это значеніе P въ формулу (100), мы увидимъ, что линейная функція сократится, и мы получимъ окончательно

$$x = x_1 + x_m \sin pt,$$

то есть истинное движеніе почвы, опредѣляемое уравненіемъ (102), изъ котораго мы и исходили.

Этотъ примѣръ наглядно показываетъ, что, при примѣненіи этого метода почленнаго интегрированія для нахожденія функціи $x = f(t)$, необходимо считаться съ вліяніемъ начальныхъ условій движенія. Безъ этого можно придти къ совершенно ложнымъ результатамъ.

Спрашивается теперь, какъ-же это практически осуществить, когда нѣкоторыя изъ постоянныхъ, входящихъ въ выраженіе полинома P, въ

сущности неизвѣстны, причемъ еще одна изъ нихъ измѣняется при каждомъ вступленіи новой сейсмической волны?

Для этого берутъ *любую* точку сейсмограммы за начало счета временъ и опредѣляютъ, при помощи квадратуръ, функцію I, интегрируя кривую сплошь отъ 0 до различныхъ значеній t.

Такимъ образомъ получается кривая

$$I = \Phi(t), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (108)$$

которую наносятъ затѣмъ на координатную бумагу, откладывая время t по оси абсциссъ.

Кривая $\Phi(t)$, которая содержитъ въ себѣ, какъ мы видѣли раньше, нѣкоторый полиномъ, будетъ постепенно удаляться отъ оси временъ, колеблясь около нѣкоторой *средней* кривой, которая представляетъ собою ничто иное, какъ полиномъ P, который и надлежитъ отнять отъ I, чтобы получить, согласно формулѣ (100), x какъ функцію отъ t. Эту среднюю кривую можно болѣе или менѣе точно провести отъ руки черезъ кривую $I = \Phi(t)$. По существу дѣла, кривая P должна состоять изъ нѣсколькихъ отдѣльныхъ вѣтвей. Въ тѣхъ точкахъ, гдѣ двѣ такія вѣтви сходятся, будетъ находиться особая точка кривой P, въ которой кривая имѣетъ двѣ касательныя и которая соотвѣтствуетъ моменту вступленія новой сейсмической волны.

Этимъ способомъ можно опредѣлить значеніе полинома P для разныхъ значеній t.

Отнявши P отъ I, получимъ, по формулѣ (100), искомую величину x какъ функцію отъ t:

$$x = x_1 - \frac{1}{\mathfrak{B}_0}[I - P].$$

Въ эту формулу входитъ, однако, еще неизвѣстная величина абсолютнаго смѣщенія почвы x_1 въ моментъ начала счета временъ, но это обстоятельство не имѣетъ существеннаго значенія.

При желаніи, x_1 можно вычислить, опредѣливъ значенія функцій I и P для какой-нибудь удаленной точки сейсмограммы, гдѣ движеніе почвы и прибора уже прекратилось. Въ этомъ случаѣ $x = 0$. Обозначая соотвѣтственныя значенія I и P черезъ I_f и P_f, мы получимъ

$$x_1 = \frac{1}{\mathfrak{B}_0}(I_f - P_f) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (109)$$

Если-же за моментъ начала счета временъ мы возьмемъ начало первой предварительной фазы землетрясенія, то мы будемъ просто имѣть $x_1 = 0$.

При примѣненіи вышеописаннаго метода опредѣленія функціи $x = f(t)$, не требуется вовсе абсолютно точно опредѣлять величины ординатъ y, такъ какъ соотвѣтствующія поправки включены уже въ выраженіе полинома P, который опредѣляется прямо изъ опыта.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что, хотя методъ почленнаго интегрированія и даетъ возможность опредѣлить x какъ функцію отъ t за все время землетрясенія и притомъ при *совершенно произвольномъ* характерѣ движенія почвы, но практическое примѣненіе этого метода сопряжено съ немалыми трудностями и представляетъ собою, во всякомъ случаѣ, довольно сложную и кропотливую задачу.

Тѣмъ не менѣе, для нѣкоторыхъ характерныхъ землетрясеній, подобное изслѣдованіе представило бы несомнѣнно весьма существенный интересъ.

Разсмотримъ теперь примѣненіе этого метода анализа сейсмограммъ въ случаѣ гальванометрической регистраціи движеній сейсмографа.

Въ этомъ случаѣ задача эта представляется еще болѣе сложной, такъ какъ, вмѣсто одного дифференціальнаго уравненія, мы имѣемъ уже систему совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta + \frac{1}{l}x'' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (110)$$

и

$$\varphi'' + 2n_1\varphi' + n_1^2\varphi + k\theta' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (111)$$

Гальванометръ, по предположенію, установленъ точно на границу апериодичности, хотя это условіе, при примѣненіи даннаго метода анализа кривой, не имѣетъ, въ сущности, никакого значенія.

Обозначивъ отклоненіе свѣтовой точки отъ положенія равновѣсія черезъ y_1, а разстояніе зеркала у гальванометра до поверхности регистрирнаго вала въ направленіи нормально падающаго луча черезъ A_1, будемъ имѣть

$$y_1 = 2A_1\varphi.$$

Умноживъ уравненіе (111) на $2A_1$, получимъ

$$y_1'' + 2n_1 y_1' + n_1^2 y_1 + 2A_1 k\theta' = 0 \ldots\ldots\ldots (112)$$

Исключимъ теперь изъ уравненія (112), при помощи уравненія (110), перемѣнную θ. Это приведетъ насъ для y_1 къ линейному дифференціальному уравненію четвертаго порядка.

Возьмемъ для этого сначала производную отъ уравненія (112) по t.

Тогда

$$y_1''' + 2n_1 y_1'' + n_1^2 y_1' + 2A_1 k\theta'' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (113)$$

Изъ уравненія (110) мы имѣемъ

$$\theta'' = -2\varepsilon\theta' - n^2\theta - \frac{1}{l}x'', \ldots\ldots\ldots\ldots (114)$$

а, изъ уравненія (112),

$$\theta' = -\frac{1}{2A_1 k}[y_1'' + 2n_1 y_1' + n_1^2 y_1] \ldots\ldots\ldots\ldots (115)$$

Подставивъ это послѣднее выраженіе въ уравненіе (114), будемъ имѣть

$$\theta'' = \frac{\varepsilon}{A_1 k}[y_1'' + 2n_1 y_1' + n_1^2 y_1] - n^2\theta - \frac{1}{l}x''.$$

Подставимъ теперь это выраженіе для θ'' въ уравненіе (113).

Тогда

$$y_1''' + 2(n_1 + \varepsilon) y_1'' + (n_1^2 + 4n_1\varepsilon) y_1' + 2\varepsilon n_1^2 y_1 - 2A_1 k n^2\theta = 2A_1\frac{k}{l}x''.$$

Возьмемъ еще разъ производную отъ этого уравненія по t.

$$y_1'''' + 2(n_1 + \varepsilon) y_1''' + (n_1^2 + 4n_1\varepsilon) y_1'' + 2\varepsilon n_1^2 y_1' - 2A_1 k n^2\theta' = 2A_1\frac{k}{l}x'''.$$

Подставимъ теперь сюда выраженіе θ' изъ формулы (115).

Тогда мы получимъ

$$y_1'''' + 2(\varepsilon + n_1) y_1''' + (n^2 + n_1^2 + 4n_1\varepsilon) y_1'' + 2(\varepsilon n_1^2 + n_1 n^2) y_1'$$
$$+ n^2 n_1^2 y_1 = 2\frac{A_1 k}{l}x''' \ldots\ldots\ldots\ldots (116)$$

Введемъ теперь слѣдующія обозначенія:

$$\left.\begin{aligned} a &= 2(\varepsilon + n_1) \\ b &= (n^2 + n_1^2 + 4\varepsilon n_1) \\ c &= 2(\varepsilon n_1^2 + n_1 n^2) \\ \partial &= n^2 n_1^2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (117)$$

Тогда уравненіе (116) можетъ быть представлено въ слѣдующемъ окончательномъ видѣ:

$$y_1'''' + ay_1''' + by_1'' + cy_1' + \partial y_1 = \frac{2A_1}{l} kx''' \ldots\ldots.. (118)$$

Всѣ коэффиціенты, входящіе въ это уравненіе, суть величины извѣстныя.

Если сейсмографъ установленъ строго на границу апеcodичности, то $\mu^2 = 0$ и $\varepsilon = n$, и если, кромѣ того, собственный періодъ сейсмографа безъ затуханія T равенъ собственному періоду гальванометра T_1 $(n = n_1)$, каковыя условія и требуются именно для опредѣленія азимута эпицентра по описанному въ § 1 настоящей главы способу, то коэффиціенты a, b, c и d принимаютъ слѣдующія простыя значенія:

$$a = 4n$$

$$b = 6n^2$$

$$c = 4n^3$$

$$\partial = n^4.$$

Приступимъ теперь къ почленному интегрированію уравненія (118).

Мы возьмемъ сразу болѣе общій случай, а именно за начало счета временъ любую точку сейсмограммы, и предположимъ, что, въ моментъ $t = 0$,

$$x = x_1 \qquad x' = x_1'$$

$$y_1 = (y_1)_1 \qquad y_1' = (y_1').$$

Кромѣ этого, требуется въ данномъ случаѣ знать еще начальное значеніе x''.

Предположимъ теперь, что, въ моментъ $t = 0$, вступила новая сейсмическая волна, благодаря которой новая равнодѣйствующая начальная скорость будетъ x_2', а начальное ускореніе x_2''.

Соотвѣтствующія начальныя значенія y_1 и ея производныхъ, *послѣ вступленія новой волны,* обозначимъ соотвѣтственно черезъ

$$(y_1)_2, \ (y_1')_2, \ (y_1'')_2 \text{ и } (y_1''')_2.$$

Найдемъ теперь всѣ эти величины.

Пусть θ_1 представляетъ собою отклоненіе сейсмографа отъ положенія равновѣсія въ моментъ $t = 0$, а θ_1' соотвѣтствующая угловая скорость движенія до вступленія, а θ_2 и θ_2' соотвѣтствующія величины послѣ вступленія новой сейсмической волны.

Зависимость между θ_2' и θ_1' опредѣлится почленнымъ интегрированіемъ уравненія (110) въ предѣлахъ отъ $-\frac{\tau}{2}$ до $+\frac{\tau}{2}$ и переходя затѣмъ къ предѣлу ($\tau = 0$).

Такимъ образомъ, мы будемъ имѣть

$$\theta_2' - \theta_1' + \frac{1}{l}(x_2' - x_1') = 0$$

или

$$\theta_2' = \theta_1' - \frac{1}{l}(x_2' - x_1') \dots\dots\dots\dots\dots (119)$$

Съ другой стороны, мы очевидно имѣемъ

$$\theta_2 = \theta_1$$

и

$$(y_1)_2 = (y_1)_1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (120)$$

Интегрируя-же уравненіе (112) почленно между тѣми-же предѣлами $-\frac{\tau}{2}$ и $+\frac{\tau}{2}$ и переходя затѣмъ къ предѣлу ($\tau = 0$), найдемъ

$$(y_1')_2 = (y_1')_1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (121)$$

Остается теперь опредѣлить $(y_1'')_2$ и $(y_1''')_2$.

Уравненіе (112) даетъ намъ прямо величину $(y_1'')_2$.

$$(y_1'')_2 = -2n_1(y_1')_2 - n_1^2(y_1)_2 - 2A_1 k\theta_2'$$

или, принимая во вниманіе соотношенія (119), (120) и (121),

$$(y_1'')_2 = -2n_1(y_1')_1 - n_1^2(y_1)_1 - 2A_1 k\left\{\theta_1' - \frac{1}{l}(x_2' - x_1')\right\} \dots (122)$$

Для нахожденія $(y_1''')_2$ возьмемъ производную отъ уравненія (112) по t.

$$y_1''' + 2n_1 y_1'' + n_1^2 y_1' + 2A_1 k\theta'' = 0.$$

Отсюда находимъ

$$(y_1''')_2 = -2n_1(y_1'')_2 - n_1^2(y_1')_2 - 2A_1 k\theta_2''$$

или, принимая во вниманіе соотношенія (121) и (122),

$$(y_1''')_2=-2n_1\Big[-2n_1(y_1')_1-n_1^2(y_1)_1-2A_1k\Big\{\theta_1'-\frac{1}{l}(x_2'-x_1')\Big\}\Big]-n_1^2(y_1')_1-2A_1k\theta_2'',$$

или еще

$$(y_1''')_2=3n_1^2(y_1')_1+2n_1^3(y_1)_1+4n_1A_1k\Big\{\theta_1'-\frac{1}{l}(x_2'-x_1')\Big\}-2A_1k\theta_2'' \quad\ldots(123)$$

Въ это выраженіе входитъ еще θ_2'', которое получится прямо изъ формулы (110),

$$\theta_2''=-2\varepsilon\theta_2'-n^2\theta_2-\frac{1}{l}x_2''$$

или, принимая во вниманіе соотношеніе (119) и равенство угловъ θ_2 и θ_1,

$$\theta_2''=-2\varepsilon\Big\{\theta_1'-\frac{1}{l}(x_2'-x_1')\Big\}-n^2\theta_1-\frac{1}{l}x_2''.$$

Подставивъ теперь это выраженіе для θ_2'' въ формулу (123), будемъ имѣть

$$(y_1''')_2=3n_1^2(y_1')_1+2n_1^3(y_1)_1+2A_1k\Big[2(n_1+\varepsilon)\Big\{\theta_1'-\frac{1}{l}(x_2'-x_1')\Big\}$$
$$+n^2\theta_1+\frac{1}{l}x_2''\Big] \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(124)$$

Такимъ образомъ, начальныя условія движенія будутъ слѣдующія:

$$x_0=x_1 \qquad x_0'=x_2' \qquad x_0''=x_2''$$

$$(y_1)_0=(y_1)_2 \quad (y_1')_0=(y_1')_2 \quad (y_1'')_0=(y_1'')_2 \;\text{ и }\; (y_1''')_0=(y_1''')_2,$$

гдѣ начальныя значенія ординаты (y_1) и ея послѣдовательныхъ производныхъ опредѣляются соотношеніями (120), (121), (122) и (124).

Если-бы въ моментъ $t=0$ не было-бы вступленія новой сейсмической волны, то мы имѣли-бы просто $x_2'=x_1'$ и $x_2''=x_1''$, и предыдущія формулы соотвѣтственно-бы упростились.

Установивши эти начальныя условія, можно уже приступить къ почленному интегрированію уравненія (118) между предѣлами 0 и t, причемъ мы предположимъ, что въ теченіе даннаго промежутка времени нѣтъ вступленій новыхъ сейсмическихъ волнъ.

Изъ уравненія (118) находимъ

$$2\frac{A_1}{l}k(x''-x_2'')=\{y_1'''-(y_1''')_2\}+a\{y_1''-(y_1'')_2\}+b\{y_1'-(y_1')_2\}$$

$$+c\{y_1-(y_1)_2\}+\partial\int_0^t y_1\,dt$$

или

$$\frac{2A_1}{l}kx''=y_1'''+ay_1''+by_1'+cy_1+\partial\int_0^t y_1\,dt$$

$$-\left[(y_1''')_2+a(y_1'')_2+b(y_1')_2+c(y_1)_2-\frac{2A_1}{l}kx_2''\right].$$

Выраженіе, стоящее въ квадратныхъ скобкахъ, есть нѣкоторая постоянная величина.

Проинтегрируемъ теперь полученное уравненіе еще разъ почленно между тѣми-же самыми предѣлами 0 и t.

Будемъ имѣть, сгруппировавъ вмѣстѣ всѣ постоянные члены,

$$\frac{2A_1}{l}kx'=y_1''+ay_1'+by_1+c\int_0^t y_1\,dt+\partial\int_0^t dt\int_0^t y_1\,dt$$

$$-\left[(y_1''')_2+a(y_1'')_2+b(y_1')_2+c(y_1)_2-\frac{2A_1}{l}kx_2''\right]t$$

$$-\left[(y_1'')_2+a(y_1')_2+b(y_1)_2-\frac{2A_1}{l}kx_2'\right].$$

Добавочное, почленное интегрированіе этого уравненія между тѣми-же предѣлами 0 и t дастъ намъ уже искомую величину x.

А именно

$$\frac{2A_1}{l}kx=y_1'+ay_1+b\int_0^t y_1\,dt+c\int_0^t dt\int_0^t y_1\,dt+\partial\int_0^t dt\int_0^t dt\int_0^t y_1\,dt$$

$$-\frac{1}{2}\left[(y_1''')_2+a(y_1'')_2+b(y_1')_2+c(y_1)_2-\frac{2A_1}{l}kx_2''\right]t^2$$

$$-\left[(y_1'')_2+a(y_1')_2+b(y_1)_2-\frac{2A_1}{l}kx_2'\right]t$$

$$-\left[(y_1')_2+a(y_1)_2-\frac{2A_1}{l}kx_1\right].$$

Замѣнимъ теперь въ этомъ уравненіи $(y_1)_2$, $(y_1')_2$, $(y_1'')_2$ и $(y_1''')_2$ ихъ выраженіями изъ уравненій (120), (121), (122) и (124).

Тогда мы получимъ, принимая еще во вниманіе соотношенія (117),

$$\frac{2A_1}{l}kx = y_1' + ay_1 + b\int_0^t y_1\,dt + c\int_0^t dt\int_0^t y_1\,dt + \partial\int_0^t dt\int_0^t dt\int_0^t y_1\,dt$$

$$- \frac{1}{2}\Big[3n_1^2(y_1')_1 + 2n_1^3(y_1)_1 + 4A_1k(n_1+\varepsilon)\Big\{\theta_1' - \frac{1}{l}(x_2'-x_1')\Big\}$$

$$+ 2A_1kn^2\theta_1 + \frac{2A_1}{l}kx_2'' - 4n_1(n_1+\varepsilon)(y_1')_1 - 2n_1^2(n_1+\varepsilon)(y_1)_1$$

$$- 4A_1k(n_1+\varepsilon)\Big\{\theta_1' - \frac{1}{l}(x_2'-x_1')\Big\} + (n^2+n_1^2+4\varepsilon n_1)(y_1')_1$$

$$+ 2(\varepsilon n_1^2 + n_1n^2)(y_1)_1 - \frac{2A_1}{l}kx_2''\Big]t^2$$

$$- \Big[-2n_1(y_1')_1 - n_1^2(y_1)_1 - 2A_1k\Big\{\theta_1' - \frac{1}{l}(x_2'-x_1')\Big\} + 2(n_1+\varepsilon)(y_1')_1$$

$$+ (n^2+n_1^2+4\varepsilon n_1)(y_1)_1 - \frac{2A_1}{l}kx_2'\Big]t$$

$$- \Big[(y_1')_1 + 2(\varepsilon+n_1)(y_1)_1 - \frac{2A_1}{l}kx_1\Big].$$

Отсюда, послѣ сокращеній, будемъ имѣть

$$x = x_1 + \frac{l}{2A_1k}\Big[\Big\{y_1' + ay_1 + b\int_0^t y_1\,dt + c\int_0^t dt\int_0^t y_1\,dt + \partial\int_0^t dt\int_0^t dt\int_0^t y_1\,dt\Big\}$$

$$- \frac{n^2}{2}\{(y_1')_1 + 2n_1(y_1)_1 + 2A_1k\theta_1\}t^2 - \Big\{2\varepsilon(y_1')_1 + (n^2+4\varepsilon n_1)(y_1)_1$$

$$- 2A_1k\Big(\theta_1' + \frac{1}{l}x_1'\Big)\Big\}t - \{(y_1')_1 + 2(\varepsilon+n_1)(y_1)_1\}\Big] \quad \ldots\ldots\ldots (125)$$

Эта формула (125) и можетъ служить для вычисленія x.

Мы видимъ, что въ нее входитъ, кромѣ y_1, ея производной и трехъ интеграловъ, изъ которыхъ одинъ простой, другой двойной, а третій тройной, еще полиномъ второй степени.

При выводѣ формулы (125) мы предположили, что, въ моментъ $t=0$, вступаетъ новая волна. Но въ выраженіе (125) вовсе не входятъ величины x_2' и x_2'' *послѣ вступленія* волны; слѣдовательно, за начальный моментъ $t=0$, отъ котораго мы начинаемъ интегрированіе, можно взять *совершенно произвольную* точку сейсмограммы. Такимъ образомъ, формула (125) является совершенно общей; значенія-же постоянныхъ коеффиціентовъ, входящихъ въ полиномъ второй степени, обуславливаются, кромѣ значеній постоянныхъ самого сейсмографа, только величинами x_1', θ_1, θ_1', $(y_1)_1$ и $(y_1')_1$.

До сихъ поръ мы предполагали, что всѣ ординаты кривой y_1 измѣрены совершенно вѣрно.

Теперь-же предположимъ, что ось временъ проведена нами нѣсколько ошибочно. Вслѣдствіе этого, согласно предыдущему, къ каждой ординатѣ y_1 надо присоединить поправку

$$\alpha + \beta t.$$

Тогда, понимая подъ y_1 *измѣренныя* ординаты, надо въ предыдущемъ уравненіи поставить:

вмѣсто y_1 . . . . $y_1 + \alpha + \beta t$

» y_1' . . . . $y_1' + \beta$

» $(y_1)_1$ . . . . $(y_1)_1 + \alpha$

» $(y_1')_1$ . . . . $(y_1')_1 + \beta$.

Сдѣлавъ эту подстановку, будемъ имѣть:

$$x = x_1 + \frac{l}{2A_1k}\Big[\Big\{y_1' + \beta + ay_1 + a\alpha + a\beta t + b\int_0^t y_1\,dt + b\alpha t + \frac{1}{2}b\beta t^2$$

$$+ c\int_0^t dt\int_0^t y_1\,dt + \frac{1}{2}c\alpha t^2 + \frac{1}{6}c\beta t^3 + \partial\int_0^t dt\int_0^t dt\int_0^t y_1\,dt + \frac{1}{6}\partial\alpha t^3 + \frac{1}{24}\partial\beta t^4\Big\}$$

$$- \frac{n^2}{2}\{(y_1')_1 + \beta + 2n_1(y_1)_1 + 2n_1\alpha + 2A_1k\theta_1\}t^2$$

$$- \Big\{2\varepsilon(y_1')_1 + 2\varepsilon\beta + (n^2 + 4\varepsilon n_1)(y_1)_1 + (n^2 + 4\varepsilon n_1)\alpha - 2A_1k\Big(\theta_1' + \frac{1}{l}x_1'\Big)\Big\}t$$

$$- \{(y_1')_1 + \beta + 2(\varepsilon + n_1)(y_1)_1 + 2(\varepsilon + n_1)\alpha\}$$

или, принимая во вниманіе соотношенія (117),

$$x = x_1 + \frac{l}{2A_1k}\Big[\Big\{y_1' + ay_1 + b\int_0^t y_1\,dt + c\int_0^t dt\int_0^t y_1\,dt + \partial\int_0^t dt\int_0^t dt\int_0^t y_1\,dt\Big\}$$

$$- \{(y_1')_1 + 2(\varepsilon + n_1)(y_1)_1 + 2(\varepsilon + n_1)\alpha + \beta - \beta - 2(\varepsilon + n_1)\alpha\}$$

$$- \Big\{2\varepsilon(y_1')_1 + (n^2 + 4\varepsilon n_1)(y_1)_1 - 2A_1k\Big(\theta_1' + \frac{1}{l}x_1'\Big) + 2\varepsilon\beta + (n^2 + 4\varepsilon n_1)\alpha$$

$$- 2(\varepsilon + n_1)\beta - (n^2 + n_1^2 + 4\varepsilon n_1)\alpha\Big\}t$$

$$- \frac{1}{2}\{n^2(y_1')_1 + 2n_1n^2(y_1)_1 + 2n^2A_1k\theta_1 + n^2\beta + 2n_1n^2\alpha$$

$$- (n^2 + n_1^2 + 4\varepsilon n_1)\beta - 2(\varepsilon n_1^2 + n_1n^2)\alpha\}t^2$$

$$+ \frac{1}{6}\{c\beta + \partial\alpha\}t^3$$

$$+ \frac{1}{24}\partial\beta t^4.$$

Послѣ всѣхъ сокращеній, можно представить неизвѣстную величину x функціей слѣдующаго вида:

$$x = x_1 + \frac{l}{2A_1 k}[I - P], \quad \ldots \ldots (126)$$

гдѣ

$$I = y_1' + ay_1 + b\int_0^t y_1\,dt + c\int_0^t dt\int_0^t y_1\,dt + \partial\int_0^t dt\int_0^t dt\int_0^t y_1\,dt \quad \ldots (127)$$

и

$$P = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + Et^4 \quad \ldots \ldots (128)$$

Коэффиціенты, входящіе въ этотъ полиномъ, имѣютъ слѣдующія значенія:

$$\left.\begin{aligned}
A &= (y_1')_1 + 2(\varepsilon + n_1)(y_1)_1 \\
B &= 2\varepsilon(y_1')_1 + (n^2 + 4\varepsilon n_1)(y_1)_1 - 2A_1 k\left(\theta_1' + \frac{1}{l}x_1'\right) - n_1^2\alpha - 2n_1\beta \\
C &= \frac{1}{2}\{n^2(y_1')_1 + 2n_1 n^2(y_1)_1 + 2n^2 A_1 k\,\theta_1 - 2\varepsilon n_1^2\alpha - (n_1^2 + 4\varepsilon n_1)\beta\} \\
D &= -\frac{1}{6}\{\partial\alpha + c\beta\} \\
E &= -\frac{1}{24}\partial\beta
\end{aligned}\right\} \ldots (129)$$

Формула (126) показываетъ, что функція I обязательно должна заключать въ себѣ нѣкоторый полиномъ, иначе x, съ возрастаніемъ t, будетъ неограниченно возрастать, что, по существу дѣла, невозможно.

Анализъ сейсмограммы, полученной гальванометрическимъ путемъ, производится совершенно подобнымъ-же образомъ, какъ при примѣненіи оптическаго метода регистраціи, а именно коэффиціенты полинома P, изъ которыхъ нѣкоторые мѣняютъ свою величину со вступленіемъ каждой новой волны, не вычисляются напередъ, а опредѣляются прямо изъ опыта.

Для этого надо, по методу квадратуръ, опредѣлить сначала функцію I.

Представивъ ее графически, проводятъ черезъ соотвѣтствующую кривую ранѣе упомянутую *среднюю* кривую, состоящую изъ нѣсколькихъ отдѣльныхъ вѣтвей, и которая представляетъ собою ничто иное, какъ полиномъ P, который нужно отнять отъ I для полученія x согласно формулѣ (126). Угловыя точки кривой P соотвѣтствуютъ моментамъ вступленія новыхъ сейсмическихъ волнъ.

Величина x_1, входящая въ выраженіе (126), опредѣляется по тому-же пріему, какъ и при простой оптической регистраціи.

Примѣненіе метода почленнаго интегрированія къ случаю гальванометрической регистраціи требуетъ, однако, какъ мы видимъ, одной лишней квадратуры. Кромѣ того, въ выраженіе I входитъ теперь еще производная y_1' (см. формулу (127)). Это послѣднее обстоятельство не имѣетъ, однако, особенно существеннаго значенія, такъ какъ всегда можно, какъ то показалъ А. Я. Орловъ, примѣняя особый уравнительный пріемъ, сглаживающій разныя неправильности, дифференцировать любую эмпирически полученную кривую. Но этого дифференцированія можно совершенно избѣгнуть, если выбирать различные моменты t, до которыхъ производится интегрированіе, такъ, чтобы они соотвѣтствовали отдѣльнымъ максимумамъ или минимумамъ кривой сейсмограммы. Тогда въ этихъ точкахъ y_1' будетъ равно нулю, и для этихъ моментовъ вычисленіе производной совершенно отпадаетъ.

Мы получимъ, такимъ образомъ, цѣлый рядъ близкихъ значеній x, по которымъ и можемъ довольно хорошо построить кривую истиннаго движенія почвы $x = f(t)$.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что, при примѣненіи гальванометрическаго метода регистраціи, анализъ сейсмограммъ представляется нѣсколько болѣе сложнымъ, но это обстоятельство компенсируется до извѣстной степени бóльшей ясностью и отчетливостью гальванометрическихъ кривыхъ; вслѣдствіе этого и бóльшей чувствительности самой регистраціи, процентная ошибка, при опредѣленіи величинъ ординатъ кривой, будетъ меньше.

Но, какъ при оптической, такъ и при гальванометрической регистраціи, анализъ сейсмограммъ по методу почленнаго интегрированія представляется, во всякомъ случаѣ, задачей сложной и кропотливой.

Глава XI.

Изслѣдованіе колебаній отвѣсной линіи подъ вліяніемъ притяженія луны.

Въ главѣ IV мы видѣли, что направленіе отвѣсной линіи можетъ, подъ вліяніемъ притяженія солнца и луны, нѣсколько измѣнять свое положеніе, но это отклоненіе ψ отвѣса отъ нормальнаго, невозмущеннаго его положенія во всякомъ случаѣ очень мало.

Если земля представляла-бы собою абсолютно твердое тѣло и мы установили-бы у ея поверхности два горизонтальныхъ маятника, во взаимно перпендикулярныхъ плоскостяхъ, то эти маятники, при достаточной ихъ чувствительности, могли-бы прямо обнаружить колебанія отвѣсной линіи.

Дѣйствительно, при нормальномъ положеніи отвѣсной линіи, послѣдняя перпендикулярна къ плоскости горизонта, но, при возмущенномъ положеніи, это направленіе уже составляетъ съ плоскостью горизонта уголъ равный, напримѣръ, $90° - \psi$. Это равносильно тому, какъ будто поверхность земли, *по отношенію къ направленію отвѣсной линіи*, наклонилась-бы на уголъ ψ. Но мы видѣли раньше въ главѣ V, что горизонтальные маятники даютъ именно возможность измѣрять эти медленные, относительные наклоны почвы.

Если поверхность земли наклоняется на уголъ ψ около оси параллельной стержню маятника, то послѣдній отойдетъ отъ своего положенія равновѣсія на нѣкоторый уголъ θ, причемъ, согласно формулѣ (17) главы V,

$$\theta = \frac{\psi}{i} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Здѣсь i представляетъ собою уголъ, составляемый осью вращенія маятника съ нормальнымъ направленіемъ отвѣсной линіи.

Въ §§ 1 и 2 главы VII мы видѣли, какимъ образомъ уголъ i можетъ быть опредѣленъ непосредственно изъ опыта.

Изъ формулы (6) главы VII слѣдуетъ, что

$$i = n^2 \frac{l}{g}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

гдѣ l есть извѣстная приведенная длина маятника, а g — ускореніе силы тяжести.

Обозначивъ еще собственный періодъ колебаній маятника безъ затуханія черезъ T, будемъ имѣть

$$n = \frac{2\pi}{T}.$$

Подставивъ эту величину въ формулу (2), получимъ

$$i = \frac{4\pi^2 . l}{g} \cdot \frac{1}{T^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Для увеличенія точности этихъ наблюденій, надо, по возможности, уменьшать уголъ i, то есть удлинять собственный періодъ колебаній маятниковъ T.

Движеніе маятника при этихъ наблюденіяхъ надо непремѣнно регистрировать оптически. Механическій способъ регистраціи совершенно недопустимъ, такъ какъ онъ вводитъ всякіе возмущающіе факторы, обуславливаемые треніемъ пера о закопченную бумагу; гальванометрическій-же способъ въ этомъ случаѣ ничего дать не можетъ, такъ какъ эти медленныя колебанія отвѣсной линіи или соотвѣтствующіе имъ относительные наклоны почвы относятся къ классу брадисейсмическихъ явленій, при которыхъ, благодаря ничтожно малой угловой скорости движенія маятника, индукціонные токи будутъ такъ слабы, что даже самые чувствительные гальванометры не въ состояніи ихъ обнаружить.

Обозначивъ отклоненіе свѣтовой точки на регистрирномъ валѣ отъ положенія равновѣсія, соотвѣтствующее нормальному положенію отвѣсной линіи, черезъ y, а разстояніе зеркала у маятника до поверхности барабана въ направленіи нормально падающаго луча черезъ A, будемъ имѣть (въ предположеніи, что собирательная чечевица поставлена, какъ всегда, *не* между зеркаломъ и валомъ)

$$\theta = \frac{y}{2A}.$$

Подставляя эту величину въ формулу (1), получимъ окончательно

$$y = \frac{2A}{i} \cdot \psi$$

или

$$\psi = \frac{i}{2A} \cdot y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

По этой формулѣ и опредѣляются углы ψ изъ наблюденій.

Для опредѣленія величинъ y, надо непремѣнно регистрировать одновременно и положеніе нулевой линіи, для чего можетъ служить неподвижное зеркало, связанное неизмѣнно со штативомъ маятника. При этихъ изслѣдованіяхъ можно давать регистрирному валу медленное вращеніе.

Если-бы земля обладала свойствами жидкаго тѣла, то поверхность ея принимала-бы всегда положеніе нормальное къ направленію возмущенной отвѣсной линіи и никакого относительнаго наклона почвы не наблюдалось-бы. Въ этомъ случаѣ мы имѣли-бы всегда изъ наблюденій $\psi = 0$.

Такимъ образомъ, максимальное значеніе угла ψ, которое мы обозначимъ черезъ ψ_m, соотвѣтствуетъ случаю абсолютно твердаго тѣла. Величина этого угла зависитъ всецѣло отъ взаимнаго расположенія солнца и луны по отношенію къ мѣсту наблюденій. Этотъ уголъ ψ_m можетъ быть вычисленъ напередъ для всякаго заданнаго момента t. Сравнивая теоретическое значеніе ψ_m съ наблюденной величиной ψ, можно вывести весьма интересныя заключенія объ упругихъ свойствахъ земли, какъ цѣлаго, а именно о присущему ей свойству сопротивляться измѣненію своей формы.

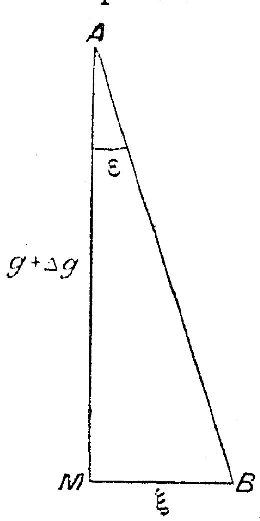
Покажемъ теперь, какимъ образомъ вычисляется уголъ ψ_m.

Первый, обратившій вниманіе астрономовъ на то, что направленіе отвѣсной линіи въ данномъ мѣстѣ не остается постояннымъ, а мѣняется подъ вліяніемъ притяженія разныхъ небесныхъ свѣтилъ, былъ знаменитый математикъ **Абель**.

Разсмотримъ теперь вліяніе одного какого-нибудь свѣтила, напр. луны, на положеніе отвѣса и примемъ землю за абсолютно твердый шаръ.

Допустимъ также, что въ каждый моментъ отвѣсъ принимаетъ положеніе равновѣсія, совпадающее съ направленіемъ равнодѣйствующей всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на единицу массы, помѣщенной въ данной точкѣ у поверхности земли.

Черт. 139.



Если-бы на единицу массы дѣйствовала только сила тяжести, то отвѣсъ принялъ-бы такъ называемое невозмущенное или нормальное положеніе равновѣсія MA (см. черт. 139). Оно соотвѣтствуетъ равнодѣйствующей притяженія всѣхъ отдѣльныхъ массъ земли на единицу массы у поверхности и центробѣжной силы, вызванной вращеніемъ земли около ея оси.

При наличіи же луннаго притяженія, направленіе отвѣса, при равновѣсіи, будетъ совпадать съ направленіемъ діагонали AB прямоугольника, одна сторона котораго MA будетъ $g + \Delta g$, а другая $MB = \xi$, гдѣ g есть ускореніе силы тяжести, Δg верти-

кальная, а ξ горизонтальная составляющія возмущающей силы притяженія луны (отнесенной къ единицѣ массы).

Пусть ε будетъ уголъ, составляемый новымъ положеніемъ отвѣса съ нормальнымъ его положеніемъ.

Изъ треугольника MAB мы имѣемъ

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\xi}{g + \Delta g}$$

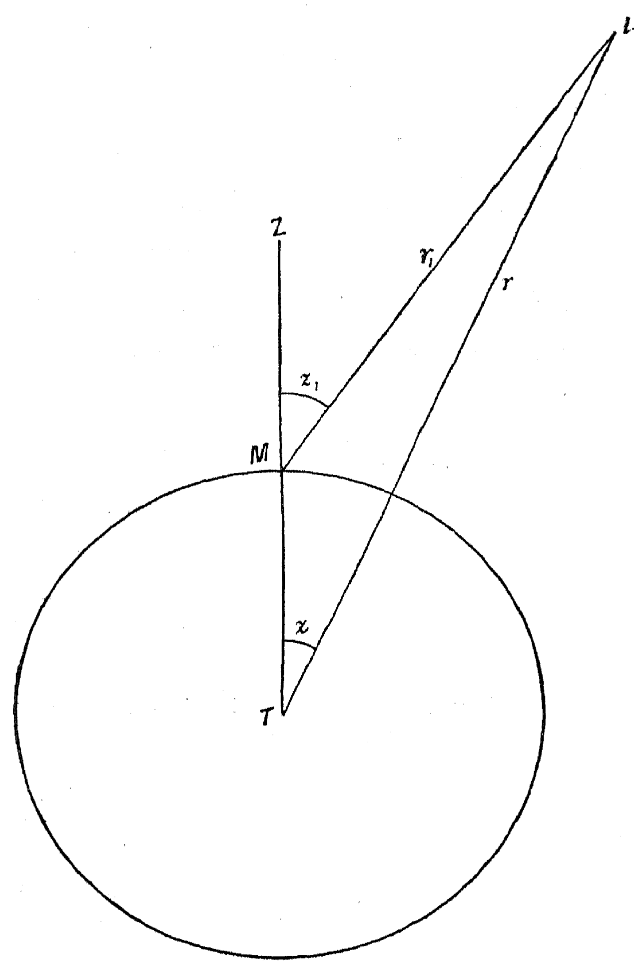
или, въ виду малости ξ и Δg,

$$\varepsilon = \frac{\xi}{g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Вычислимъ теперь ξ.

Пусть на чертежѣ 140 T представляетъ собою центръ земли, M—мѣсто наблюденія, MZ—направленіе на зенитъ, а L—луну.

Черт. 140.



Разстоянія L отъ M и T обозначимъ соотвѣтственно черезъ r_1 и r, а видимое и геоцентрическое зенитныя разстоянія—соотвѣтственно черезъ z_1 и z.

При вычисленіи ξ надо имѣть въ виду, что луна притягиваетъ не только маятникъ, но и всю землю, и, если сила притяженія луны въ точкахъ M и T была-бы совершенно одинакова по величинѣ и направленію, то никакого отклоненія отвѣсной линіи не произошло-бы, такъ какъ величина возмущающаго ускоренія въ точкахъ M и T была-бы одна и та-же. Слѣдовательно, возмущеніе отвѣса зависитъ только *отъ разности* притяженія луною маятника и притяженія тѣмъ-же свѣтиломъ самой земли (приливное дѣйствіе), причемъ величины этихъ притяженій должны быть, конечно, отнесены къ единицѣ массы.

Принявъ, для простоты, за единицу массы массу земли, и обозначивъ черезъ m массу луны, а черезъ f постоянную Ньютонова тяготѣнія, мы

найдемъ, что ξ есть разность горизонтальныхъ составляющихъ двухъ силъ $f\frac{m}{r_1^2}$ и $f\frac{m}{r^2}$, дѣйствующихъ каждая на единицу массы.

Слѣдовательно,

$$\xi = f\frac{m}{r_1^2}\sin z_1 - f\frac{m}{r^2}\sin z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Въ справедливости вышесказаннаго можно убѣдиться еще слѣдующимъ образомъ.

Величина $f\frac{m}{r^2}\sin z$ представляетъ собою истинную величину ускоренія движенія центра земли подъ вліяніемъ притяженія луны въ направленіи перпендикулярномъ къ линіи TZ.

Такое-же ускореніе будетъ имѣть и точка M, такъ какъ мы принимаемъ землю за абсолютно твердый шаръ.

Тяжелая масса маятника, которая является какъ-бы не связанной съ землей, будетъ имѣть въ томъ-же направленіи, перпендикулярномъ къ MZ, ускореніе $f\frac{m}{r_1^2}\sin z_1$.

Такимъ образомъ, *относительное* ускореніе маятника, по отношенію къ поверхности земли, которое мы только и можемъ наблюдать, представляется *разностью* вышеуказанныхъ ускореній. Что вѣрно для ускореній, вѣрно, конечно, и для соотвѣтствующихъ силъ, дѣйствующихъ на единицу массы.

Примемъ радіусъ земли за единицу, т.-е. положимъ $MT = 1$. Тогда, при принятыхъ нами обозначеніяхъ, полагая $m = 1$ и $r = 1$, найдемъ, что

$$f = g \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Изъ чертежа 140 слѣдуетъ, что

$$r_1 \sin z_1 = r \sin z$$

или

$$\sin z_1 = \frac{r}{r_1}\sin z.$$

Съ другой стороны,

$$r_1^2 = r^2 + 1 - 2r\cos z = r^2\left(1 - \frac{2\cos z}{r} + \frac{1}{r^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

Слѣдовательно, согласно формулѣ (6),

$$\xi = f\frac{mr\sin z}{r_1^3} - f\frac{m\sin z}{r^2} = f\frac{m\sin z}{r^2}\left[\frac{r^3}{r_1^3} - 1\right] \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Изъ формулы (8) мы имѣемъ

$$\frac{r^2}{r_1^2} = \left[1 - \frac{2\cos z}{r} + \frac{1}{r^2}\right]^{-1}$$

или

$$\frac{r^3}{r_1^3} = \left[1 - \frac{2\cos z}{r} + \frac{1}{r^2}\right]^{-\frac{3}{2}}.$$

Разлагая это выраженіе въ рядъ и сохраняя только члены перваго порядка малости $\left(\frac{1}{r}\right.$ равно, приблизительно, $\left.\frac{1}{60}\right)$, будемъ имѣть

$$\frac{r^3}{r_1^3} = 1 + 3\frac{\cos z}{r}.$$

Подставляя эту величину въ формулу (9), получимъ

$$\xi = f\frac{m\sin z}{r^3}\cdot 3\cos z = \frac{3}{2}f\frac{m\sin 2z}{r^3} \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Обозначивъ еще горизонтальный параллаксъ луны, т.-е. уголъ, подъ которымъ виденъ съ луны радіусъ земли, перпендикулярный къ лучу зрѣнія, черезъ p, будемъ имѣть

$$r = \frac{1}{\sin p} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Замѣняя еще въ формулѣ (10) величину f черезъ g (см. формулу (7)), получимъ окончательно

$$\xi = \frac{3}{2}g\,m\,.\sin^3 p\,.\sin 2z \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Эта формула была дана впервые Петерсомъ.

Подставивъ эту величину въ формулу (5), будемъ имѣть

$$\varepsilon = \frac{3}{2}m\sin^3 p\,.\sin 2z$$

или, въ секундахъ дуги,

$$\varepsilon'' = \frac{3}{2}\cdot\frac{m\sin^3 p}{\sin 1''}\cdot\sin 2z \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Формула (13) показываетъ, что *максимальное* отклоненіе отвѣса ε''_m соотвѣтствуетъ тому случаю, когда зенитное разстояніе $z = 45°$.

Такимъ образомъ, мы будемъ имѣть

$$\varepsilon''_m = \frac{3}{2}\cdot\frac{m\sin^3 p}{\sin 1''} \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Для *луны* $m = \frac{1}{81}$, а p въ среднемъ равно $57'$; слѣдовательно,

$$\varepsilon''_m = 0'',017.$$

Для *солнца* $m = 329000$, а p въ среднемъ равно $8'',8$; слѣдовательно,

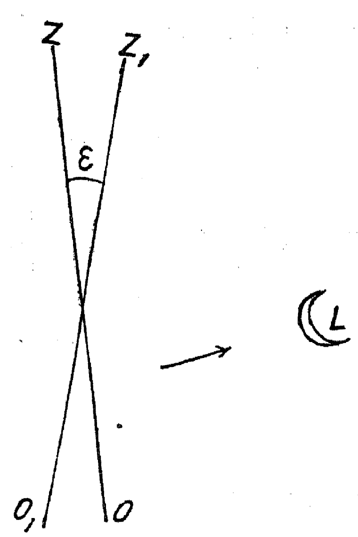
$$\varepsilon''_m = 0'',008.$$

Такимъ образомъ, мы видимъ, что максимальное возмущающее дѣйствіе солнца, приблизительно, вдвое меньше возмущающаго дѣйствія луны.

Посмотримъ теперь, какъ отразится на положеніи равновѣсія горизонтальнаго маятника возмущеніе отвѣсной линіи.

Мы опять предположимъ, что и горизонтальный маятникъ въ каждый моментъ принимаетъ соотвѣтствующее положеніе равновѣсія.

Черт. 141.



На слѣдующемъ чертежѣ 141 $O_1 Z_1$ представляетъ собою направленіе нормальнаго, невозмущеннаго, а OZ направленіе возмущеннаго положенія отвѣса.

Отклоненіе отвѣса происходитъ всегда въ плоскости, проходящей черезъ направленіе на зенитъ и черезъ направленіе на свѣтило, т.-е. въ плоскости азимута свѣтила, и всегда въ сторону *отъ свѣтила.*

Обратимся теперь къ небесной сферѣ (чертежъ 142).

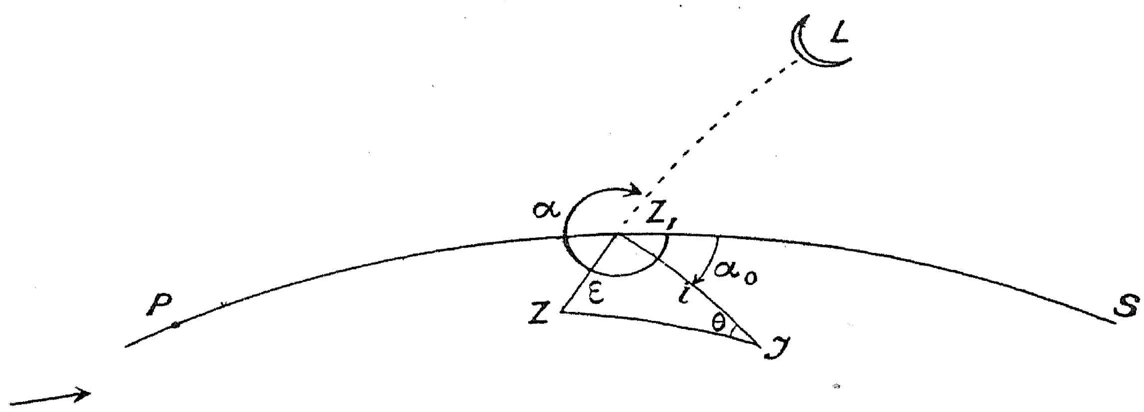
Пусть P есть полюсъ міра, Z_1 — направленіе на невозмущенное положеніе зенита, при невозмущенномъ положеніи отвѣса, Z — направленіе на возмущенное положеніе зенита, а I — направленіе оси вращенія горизонтальнаго маятника.

L есть луна. Отклоненіе отвѣса происходитъ въ плоскости, проходящей черезъ Z_1 и L, т.-е. въ плоскости ZZ_1, причемъ дуга $ZZ_1 = \varepsilon$ (въ предположеніи абсолютно твердой земли).

Если мы условимся считать азимуты, также какъ и часовые углы, отъ 0 до 360°, отъ направленія меридіана на югъ, и если мы черезъ α обозначимъ азимутъ луны, то уголъ

$$SZ_1Z = \alpha - 180°.$$

Черт. 142.



Предположимъ, что горизонтальный маятникъ установленъ въ азимутѣ $\alpha_0 = SZ_1 I$.

Плоскость установки маятника есть плоскость, проходящая черезъ направленіе на невозмущенный зенитъ и черезъ ось вращенія маятника.

На чертежѣ 142 это будетъ плоскость $Z_1 I$, гдѣ дуга $Z_1 I = i$, т.-е. углу составляемому направленіемъ оси вращенія съ вертикальной линіей.

При невозмущенномъ положеніи зенита, центръ тяжести горизонтальнаго маятника, при равновѣсіи, будетъ лежать въ плоскости $Z_1 I$; при новомъ-же положеніи зенита, центръ тяжести маятника перейдетъ въ плоскость ZI, т.-е. маятникъ повернется вокругъ своей оси на уголъ

$$Z_1 IZ = \theta.$$

Изъ элементарнаго сферическаго треугольника $Z_1 IZ$ мы имѣемъ

$$\frac{\sin\theta}{\sin(\alpha - \alpha_0 - 180^\circ)} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin ZI}.$$

Но, въ виду малости угловъ ε и θ, мы можемъ положить $ZI = i$. Замѣняя синусы малыхъ угловъ самими углами, будемъ имѣть

$$\theta = -\frac{\varepsilon}{i}\cdot\sin(\alpha - \alpha_0) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

Соотвѣтствующее углу поворота маятника θ отклоненіе свѣтовой точки на барабанѣ будетъ, согласно предыдущему,

$$y = 2A\theta$$

или

$$y = -\frac{2A\varepsilon\sin(\alpha - \alpha_0)}{i} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Выразимъ уголъ ε въ секундахъ дуги и положимъ $y = 1\ ^{м}/_{м}$. Тогда изъ формулы (16) мы будемъ имѣть

$$\varepsilon'' \sin(\alpha - \alpha_0) = -\frac{i}{2A \sin 1''}$$

или, выражая еще i въ секундахъ дуги,

$$\varepsilon'' \sin(\alpha - \alpha_0) = -\frac{i''}{2A} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (17)$$

Положивши $\alpha - \alpha_0 = 90°$, будемъ имѣть, независимо отъ знака,

$$\varepsilon'' = \frac{i''}{2A}.$$

Эта величина называется «значеніемъ одного миллиметра на валѣ». Мы уже видѣли, какимъ образомъ уголъ i можетъ быть опредѣленъ изъ опыта; слѣдовательно, эта величина извѣстна.

Выражая ε и i въ секундахъ дуги, можно формулу (16) представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$y = -\frac{2A\varepsilon'' \sin(\alpha - \alpha_0)}{i''}.$$

Предположимъ теперь, что мы имѣемъ два горизонтальныхъ маятника, изъ которыхъ одинъ установленъ въ меридіанѣ ($\alpha_0 = 0$), а другой въ первомъ вертикалѣ ($\alpha_0 = 90°$).

Обозначимъ соотвѣтствующія отклоненія свѣтовыхъ точекъ на регистрирномъ валѣ черезъ y_M и y_V.

Принимая во вниманіе, что, въ случаѣ абсолютно твердой земли, согласно формуламъ (13) и (14),

$$\varepsilon'' = \varepsilon''_m \sin 2z,$$

и, вводя еще, для сокращенія, слѣдующее обозначеніе

$$\omega = -\frac{2A\varepsilon''_m}{i''}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (18)$$

мы будемъ, на основаніи предыдущей формулы, имѣть:

для маятника въ меридіанѣ:

$$y_M = \omega \sin\alpha \,.\, \sin 2z; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (19)$$

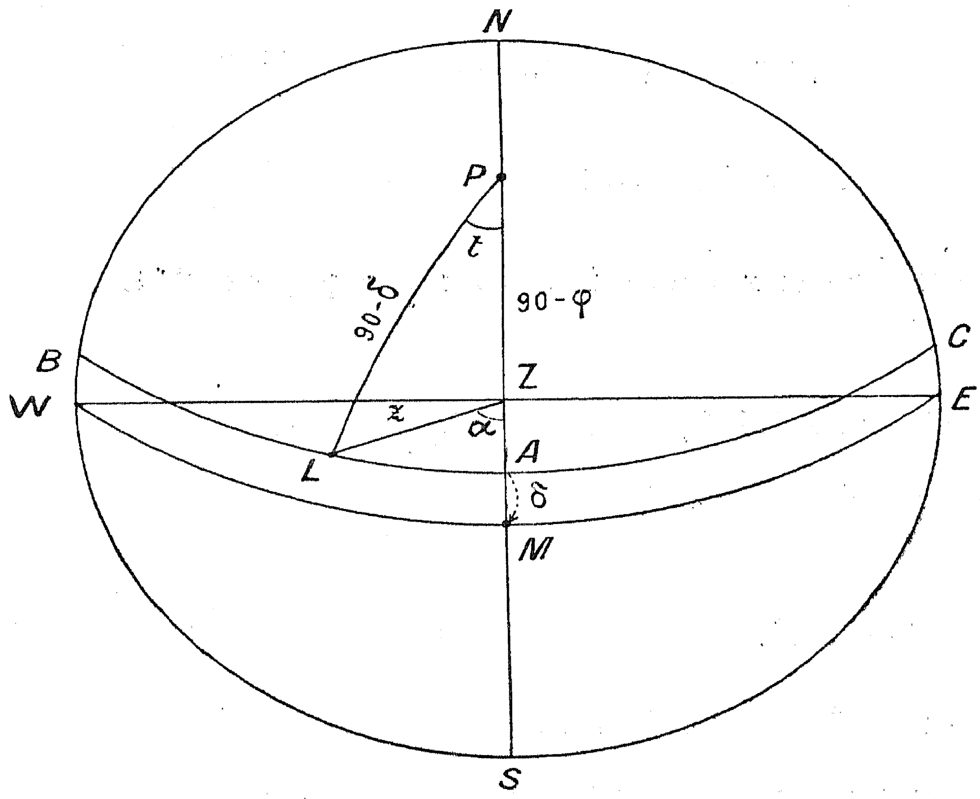
для маятника-же въ первомъ вертикалѣ:

$$y_V = -\omega \cos\alpha . \sin 2z \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, .$$

Выразимъ теперь α и z черезъ склоненіе δ и часовой)

Обратимся для этого къ слѣдующему чертежу 143 въ стереографической проэкціи на плоскости горизонта.

Черт. 143.



Z есть зенитъ мѣста, P — полюсъ міра, дуга WME — небесный экваторъ, BAC — кругъ склоненія луны ($AM = \delta$), NZS — меридіанъ мѣста, L — положеніе луны, уголъ LZM — азимутъ луны α, уголъ LPM — соотвѣтствующій часовой уголъ t, а LZ — зенитное разстояніе луны z.

Широтой мѣста φ называется возвышеніе зенита надъ экваторомъ или полюса надъ горизонтомъ.

На чертежѣ 143 это будетъ дуга $ZM = PN$.

Изъ сферическаго треугольника PLZ, гдѣ

$$PL = 90° - \delta,$$

$$PZ = 90° - \varphi$$

и

$$ZL = z,$$

будемъ имѣть:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

и

$$\frac{\sin\alpha}{\sin t} = \frac{\cos\delta}{\sin z}$$

или

$$\sin\alpha \sin z = \cos\delta . \sin t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

Изъ формулы (22) слѣдуетъ

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{\cos^2\delta \sin^2 t}{\sin^2 z}$$

или

$$\cos^2\alpha \sin^2 z = 1 - \cos^2 z - \cos^2\delta \sin^2 t.$$

Подставимъ сюда выраженіе $\cos z$ изъ формулы (21).

Тогда

$$\cos^2\alpha \sin^2 z = 1 - \sin^2\delta \sin^2\varphi - \cos^2\delta \cos^2\varphi \cos^2 t - 2\sin\delta \sin\varphi \cos\delta \cos\varphi \cos t$$
$$- \cos^2\delta (1 - \cos^2 t)$$

или

$$\cos^2\alpha \sin^2 z = (1 - \cos^2\delta) - \sin^2\delta \sin^2\varphi + \cos^2\delta \cos^2 t (1 - \cos^2\varphi)$$
$$- 2\sin\delta \sin\varphi \cos\delta \cos\varphi \cos t$$
$$= \sin^2\delta \cos^2\varphi + \cos^2\delta \sin^2\varphi \cos^2 t - 2\sin\delta \cos\varphi \cos\delta \sin\varphi \cos t$$
$$= [\sin\delta \cos\varphi - \cos\delta \sin\varphi \cos t]^2.$$

Слѣдовательно,

$$\cos\alpha \sin z = \pm [\sin\delta \cos\varphi - \cos\delta \sin\varphi \cos t].$$

Чтобы рѣшить, какой здѣсь надо взять знакъ, положимъ $\alpha = 0$; тогда $t=0$ и L перейдетъ на чертежѣ 143 въ точку A, причемъ $z = ZM - \delta = \varphi - \delta$. Изъ этого видно, что въ предыдущемъ выраженіи надо взять знакъ (—). Итакъ,

$$\cos\alpha \sin z = -\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos t \ldots\ldots\ldots (23)$$

Но въ формулы (19) и (20) входитъ не $\sin z$, а $\sin 2z$.

Принимая во вниманіе, что

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z,$$

мы получимъ, на основаніи формулъ (21), (22) и (23),

$$\begin{aligned}\sin\alpha \sin 2z &= 2 \sin\alpha \sin z \cos z \\ &= 2 \cos\delta \sin t \{\sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t\} \\ &= \sin\varphi \sin 2\delta \,.\, \sin t + \cos\varphi \cos^2\delta \,.\, \sin 2t.\end{aligned}$$

Съ другой стороны (см. формулы (21) и (23)),

$$\begin{aligned}\cos\alpha \sin 2z &= 2 \cos\alpha \sin z \cos z \\ &= 2 [-\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos t] [\sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t] \\ &= 2 [-\sin^2\delta \sin\varphi \cos\varphi + \sin^2\varphi \sin\delta \cos\delta \cos t - \cos^2\varphi \sin\delta \cos\delta \cos t \\ &+ \cos^2\delta \sin\varphi \cos\varphi \cos^2 t] \\ &= -\sin^2\delta \sin 2\varphi + \{\sin^2\varphi \sin 2\delta - \cos^2\varphi \sin 2\delta\} \cos t \\ &+ \cos^2\delta \sin 2\varphi \cos^2 t.\end{aligned}$$

Принимая еще во вниманіе, что

$$\cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t$$

и

$$\sin^2\varphi - \cos^2\varphi = 1 - 2\cos^2\varphi = 1 - (1 + \cos 2\varphi) = -\cos 2\varphi,$$

будемъ имѣть

$$\begin{aligned}\cos\alpha \sin 2z = \left[-\sin^2\delta \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \cos^2\delta \sin 2\varphi\right] - \sin 2\delta \cos 2\varphi \cos t \\ + \frac{1}{2} \cos^2\delta \sin 2\varphi \cos 2t.\end{aligned}$$

Подставляя найденныя выраженія для $\sin\alpha \sin 2z$ и $\cos\alpha \sin 2z$ въ формулы (19) и (20), получимъ окончательно

$$y_M = \omega \sin\varphi \sin 2\delta \,.\, \sin t + \omega \cos\varphi \cos^2\delta \,.\, \sin 2t \quad \ldots\ldots\ldots (24)$$

и

$$\begin{aligned}y_V = \omega \sin 2\varphi \left\{\sin^2\delta - \frac{1}{2} \cos^2\delta\right\} + \omega \cos 2\varphi \sin 2\delta \,.\, \cos t \\ - \frac{1}{2} \omega \sin 2\varphi \cos^2\delta \,.\, \cos 2t. \quad \ldots\ldots\ldots (25)\end{aligned}$$

Таковы выраженія для отклоненій свѣтовыхъ точекъ у обоихъ маятниковъ.

Мы видимъ отсюда, что y_M и y_V содержатъ въ себѣ суточные члены (съ $\sin t$ или $\cos t$) и полусуточные (съ $\sin 2t$ или $\cos 2t$).

Каждое свѣтило вызоветъ подобные же члены, причемъ намъ, конечно, достаточно разсмотрѣть здѣсь только вліяніе солнца и луны.

Слѣдовательно, движеніе маятника будетъ содержать въ себѣ члены солнечные и лунные, суточные и полусуточные.

Для раздѣленія этихъ членовъ пользуются методомъ гармоническаго анализа, идея котораго заключается въ слѣдующемъ.

Сначала группируютъ наблюденія по солнечному времени и берутъ среднее изъ всѣхъ ординатъ, соотвѣтствующихъ одному и тому-же часовому углу солнца. Этому опредѣленному часовому углу, при достаточномъ числѣ данныхъ, будутъ соотвѣтствовать самые различные часовые углы луны; слѣдовательно, въ среднемъ, лунные члены пропадутъ и останутся одни только солнечные члены.

Для выдѣленія лунныхъ членовъ группируютъ наблюденія по часовымъ угламъ луны; тогда въ среднемъ результатѣ солнечные члены пропадутъ.

Весьма важно отмѣтить, что, при большомъ числѣ наблюденій, и *суточные* лунные члены пропадутъ, такъ какъ при $\sin t$ и $\cos t$ стоитъ множитель $\sin 2\delta$, принимающій въ теченіе одного мѣсяца, то положительныя, то отрицательныя значенія.

Такимъ образомъ, наблюденія съ горизонтальными маятниками даютъ возможность опредѣлить численное значеніе (независимо отъ знака) коеффиціента ω (см. формулу (18)), а отсюда уже и величину постоянной ε''_m.

Для луны, какъ мы раньше видѣли, въ предположеніи абсолютно твердой земли,

$$\varepsilon''_m = 0'',017.$$

Наблюденія-же съ горизонтальными маятниками даютъ для ε''_m величину, составляющую, примѣрно, $^2/_3$ вышеприведенной теоретической величины. Изъ этого слѣдуетъ заключить, что земля не представляетъ собою абсолютно твердаго тѣла, а способна сама нѣсколько *деформироваться* подъ вліяніемъ притяженія луны и солнца, что является новой причиной возмущенія направленія отвѣса.

Въ этомъ отношеніи, землю, какъ цѣлое, можно, по ея упругимъ свойствамъ, а именно въ отношеніи ея свойства сопротивляться деформированію, уподобить стальному шару.

Далѣе наблюденія показали, что вліяніе членовъ, зависящихъ отъ солнечнаго притяженія, совершенно маскируется различными метеорологическими причинами, имѣющими суточный ходъ, что вызываетъ измѣненіе нуль-пункта прибора.

Это обстоятельство непремѣнно надо учитывать при обработкѣ результатовъ наблюденій. Кромѣ того, надо, конечно, считаться и съ измѣненіемъ самого склоненія δ.

Для небольшого промежутка времени, напр. сутокъ, это измѣненіе δ можно принять пропорціональнымъ t.

Вслѣдствіе этихъ причинъ, напримѣръ y_M, слѣдуетъ въ дѣйствительности представить функціей слѣдующаго вида:

$$y_M = a + bt + B_1 \sin t + B_2 \sin 2t, \ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

гдѣ a, b, B_1 и B_2 суть нѣкоторыя постоянныя величины (для малаго промежутка времени), которыя опредѣляются изъ наб

Практика показываетъ, что величи
зависятъ, не столько отъ астрономическ
ныхъ метеорологическихъ причинъ.

Сумма непеAs періодическихъ членовъ a+
собою такъ называемое движеніе нуль-пу

Метеорологическое вліяніе солнца
непосредственномъ нагрѣваніи верхних
земля въ данномъ мѣстѣ какъ-бы разбу
исходитъ измѣненіе наклона земной по
ствующее отклоненіе горизонтальнаго м
чего общаго съ явленіемъ притяженія. В
при наблюденіяхъ надъ деформаціей зе
на глубинѣ, значительно ниже земной по
мѣщеніе сейсмической станціи въ Юрье
выдающіяся по интересу изслѣдованія,
пороховомъ погребѣ подъ Domberg'о
нымъ для означенной цѣли. Однако, набл
на глубинѣ 189 метровъ подъ поверх
суточнаго движенія солнца здѣсь все еш
суточномъ колебаніи температуры на
быть и рѣчи. Съ другой стороны, наблк
Přibam'ѣ, около 1100 метровъ подъ
какое-то совершенно своеобразное, пер
массива, вслѣдствіе чего означенная ст
глубину, является совершенно неприго
маціями земли.

Изъ всего вышеизложеннаго видно,
въ виду чрезвычайной малости измѣряемой величины и возмущающаго

вліянія разныхъ другихъ факторовъ, представляются дѣломъ весьма сложнымъ и деликатнымъ.

Hecker производилъ свои наблюденія сначала съ маятниками типа Rebeur-Paschwitz'а на двухъ шпицахъ, а Орловъ съ маятниками на Zöllner'овскомъ подвѣсѣ.

Послѣдній типъ маятника, въ виду его особой чувствительности, независимости періода отъ амплитуды и отсутствія тренія и давленія въ шпицахъ и пр., является для означенной цѣли гораздо болѣе пригоднымъ, что и подтвердилось спеціальными, сравнительными испытаніями обоихъ типовъ приборовъ, предпринятыми недавно Hecker'омъ, хотя, въ сущности, всѣ преимущества Zöllner'овскаго подвѣса давно уже были извѣстны русскимъ сейсмологамъ.

Различныя подробности, касающіяся наблюденій надъ деформаціями земли, и главнѣйшіе выводы изъ наблюденій, можно найти въ диссертаціи Орлова «Первый рядъ наблюденій съ горизонтальными маятниками въ Юрьевѣ надъ деформаціями земли подъ вліяніемъ луннаго притяженія» Юрьевъ, 1911 г., а также въ трудѣ Hecker'а «Beobachtungen an Horizontalpendeln über die Deformation des Erdkörpers unter dem Einfluss von Sonne und Mond», II Heft, Veröffentlichung des Königl. Preussischen Geodätischen Institutes. Neue Folge. № 49. Berlin 1911.

Приведемъ здѣсь нѣкоторыя данныя изъ труда Орлова.

Мы видѣли изъ предыдущаго, что, благодаря тому, что земля, какъ цѣлое, не представляетъ собою абсолютно твердаго тѣла, а обладаетъ способностью нѣсколько деформироваться, притяженіе солнца и луны вызываетъ какъ-бы небольшіе приливы и отливы въ земной корѣ. При водныхъ-же приливахъ и отливахъ, существуетъ, какъ извѣстно, нѣкоторое запаздываніе въ моментѣ луннаго прилива противъ момента прохожденія луны черезъ меридіанъ мѣста.

Эта разность фазъ, именуемая прикладнымъ часомъ, мѣняется отъ одного мѣста до другого и зависитъ, главнымъ образомъ, отъ конфигураціи береговъ. Что-же касается приливныхъ явленій въ земной корѣ, то наблюденія Орлова показали, что никакой такой разности фазъ здѣсь не существуетъ. Это-же подтверждается и наблюденіями Hecker'а. Это обстоятельство чрезвычайно важно, потому что оно позволяетъ намъ непосредственно примѣнить развитую здѣсь статическую теорію къ изученію деформацій земли.

Какъ образщикъ обработки подобнаго рода наблюденій, приведемъ слѣдующій примѣръ, заимствованный изъ статьи Орлова, помѣщенной въ № 10 Извѣстій Императорской Академіи Наукъ за 1910 г.

Возьмемъ горизонтальный маятникъ, установленный въ Юрьевѣ въ

первомъ вертикалѣ и выдѣлимъ для него прежде всего полусуточный лунный членъ.

Согласно правиламъ гармоническаго анализа, располагаемъ наблюденія по лунному времени, беремъ среднее изъ ординатъ y_V для каждаго круглаго луннаго часа t, и затѣмъ еще среднее изъ двухъ среднихъ значеній ординатъ для моментовъ t и $12+t$.

Если наблюденія охватываютъ достаточно большой промежутокъ времени, то, какъ мы видѣли раньше, суточные члены съ $\cos t$ пропадутъ (см. формулу (25): $\sin 2\delta$ войдетъ съ $+$ и съ $-$); съ другой-же стороны, 12 часовъ соотвѣтствуютъ часовому углу π, слѣдовательно,

$$\cos 2(t+\pi) = \cos 2t.$$

Коеффиціентъ при $\cos 2t$, согласно формулѣ (25), будетъ содержать, кромѣ множителя $\frac{1}{2}\,\omega \sin 2\varphi$, еще среднее значеніе $[\cos^2\delta]_m$ за весь промежутокъ времени наблюденій. Величина эта извѣстна.

Наблюденія въ Юрьевѣ дали слѣдующія величины для y_V.

Маятникъ въ I-мъ вертикалѣ.

t $\rightarrow$	y_V	y_V $\leftarrow$	t	y_V (среднее).
$0^ч$	0,043 м/м	0,000 м/м	$12^ч$	0,022 м/м
1	0,091	0,046	13	0,068
2	0,209	0,140	14	0,174
3	0,363	0,318	15	0,340
4	0,529	0,465	16	0,497
5	0,629	0,590	17	0,610
6	0,652	0,656	18	0,654
7	0,577	0,633	19	0,605
8	0,463	0,539	20	0,501
9	0,299	0,394	21	0,346
10	0,151	0,231	22	0,191
11	0,054	0,105	23	0,080
12	0,000	0,079	24	0,040

Таблица эта показываетъ, что измѣряемыя величины уклоненія маятника y_V, дѣйствительно, очень малы и не превышаютъ $0{,}7\ ^{м}/_{м}$.

Числа послѣдняго столбца могутъ быть представлены формулой

$$y_V = 0{,}333\ ^{м}/_{м} + 0{,}0015\ ^{м}/_{м}\, t - 0{,}311\ ^{м}/_{м} \cos 2t \ldots\ldots (27)$$

Такимъ образомъ, періодическая часть движенія маятника будетъ

$$- 0{,}311\ ^{м}/_{м} \cos 2t.$$

Значеніе одного миллиметра на валѣ $\frac{i''}{2A}$ (см. формулу (17)) было $0''{,}0125$; слѣдовательно, періодическая часть движенія маятника въ секундахъ дуги будетъ

$$- 0''{,}00389 \cos 2t.$$

Если числа послѣдняго столбца предыдущей таблички обратить, при помощи переводнаго множителя $0''{,}0125$, въ секунды дуги и исправить ихъ за движеніе нуль-пункта прибора

$$0{,}333\ ^{м}/_{м} + 0{,}0015\ ^{м}/_{м}\, t = 0''{,}00416 + 0''{,}00002\, t,$$

и затѣмъ сравнить съ числами, полученными по формулѣ $- 0''{,}00389 \cos 2t$, то разницы получаются самыя незначительныя, какъ то видно изъ слѣдующей таблички.

Маятникъ въ I-мъ вертикалѣ.

t	*Набл. — выч.*
$0^ч$	$0''{,}00000$
1	$+ 0{,}00002$
2	$- 0{,}00007$
3	$+ 0{,}00004$
4	$+ 0{,}00002$
5	$0{,}00000$
6	$+ 0{,}00001$
7	$- 0{,}00009$
8	$0{,}00000$
9	$- 0{,}00001$
10	$- 0{,}00001$
11	$0{,}00000$
12	$0{,}00000$

Эти числа показываютъ, что формула (27) прекраснымъ образомъ передаетъ ходъ наблюденныхъ значенiй y_v (среднiя величины).

Изъ изложеннаго видно, что надежность окончательнаго результата опредѣленiя ε''_m (см. формулу (14)) всецѣло зависитъ отъ точности опредѣленiя переводнаго множителя $\frac{i''}{2A}$. Въ описываемыхъ наблюденiяхъ опасны, слѣдовательно, систематическiя ошибки, а не случайныя.

Опредѣливъ изъ наблюденiй коеффицiентъ при $\cos 2t$, легко получить и искомую величину ε''_m для максимальнаго отклоненiя отвѣса.

Мы видѣли раньше, что, въ предположенiи абсолютно твердой земли, для луны

$$\varepsilon''_m = 0'',017.$$

Наблюденная-же величина ε''_m меньше теоретической, и, по наблюденiямъ Орлова, составляетъ, примѣрно, $^2/_3$ послѣдней.

Но здѣсь выяснилось еще одно крайне любопытное обстоятельство.

А именно, это отношенiе наблюденной величины ε''_m къ теоретической нѣсколько различно для маятниковъ, установленныхъ въ меридiанѣ и въ первомъ вертикалѣ.

А именно въ Юрьевѣ получилось для этого отношенiя

Маятникъ въ меридiанѣ.	*Маятникъ въ первомъ вертикалѣ.*
0,68	0,59.

Hecker въ Potsdam'ѣ нашелъ нѣсколько иныя числа, а именно

Маятникъ въ меридiанѣ.	*Маятникъ въ первомъ вертикалѣ.*
0,68	0,43.

Разницу въ этихъ коеффицiентахъ для двухъ маятниковъ, установленныхъ въ томъ-же мѣстѣ, нельзя приписать случайнымъ ошибкамъ наблюденiй. Если эта разница не обуславливается какими-нибудь особенными, еще не учтенными свойствами самихъ приборовъ, что дальнѣйшiя наблюденiя должны выяснить, то изъ этого факта слѣдуетъ заключить, что земля обладаетъ различными упругими свойствами въ направленiи меридiана и въ направленiи параллели, а именно, она болѣе сопротивляется измѣненiю своей формы, когда силы, дѣйствуютъ въ направленiи параллели, чѣмъ когда онѣ дѣйствуютъ въ направленiи меридiана.

Предположенiе, высказанное Sir G. Darwin'омъ, что эта разница обуславливается влiянiемъ вращенiя зе
по вычисленiямъ англiйскаго математи

Тотъ фактъ, что разница между величинами коеффиціентовъ въ меридіанѣ и въ первомъ вертикалѣ больше въ Potsdam'ѣ, который расположенъ ближе къ океану, чѣмъ въ Юрьевѣ, наводитъ на мысль, что причину этого явленія быть можетъ надо искать въ механическомъ вліяніи водныхъ приливовъ, при которыхъ поднимаются громадныя массы воды, на положеніе равновѣсія горизонтальныхъ маятниковъ.

По вычисленіямъ того-же Love, оказывается, что, если поверхность Атлантическаго океана поднялась-бы всего только на одинъ метръ, то это вызвало-бы въ Potsdam'ѣ отклоненіе горизонтальнаго маятника, величина котораго равнялась-бы $^1/_4$ необъясненнаго еще эффекта, т.-е. разницы между показаніями маятниковъ въ меридіанѣ и первомъ вертикалѣ, причемъ періодъ соотвѣтствующаго дѣйствія водныхъ приливовъ и отливовъ былъ-бы также полусуточный.

На основаніи новѣйшихъ наблюденій Braak'а въ Батавіи на островѣ Ява можно заключить, что океанскіе приливы и отливы, дѣйствительно, оказываютъ нѣкоторое вліяніе на положеніе равновѣсія горизонтальныхъ сейсмографовъ.

Для окончательнаго выясненія этого чрезвычайно интереснаго вопроса, надлежало-бы произвести новыя, спеціальныя изслѣдованія надъ деформаціями земли, какъ вблизи океана, такъ и въ глубинѣ какого-нибудь большого материка.

Вопросъ этотъ дебатировался на послѣднемъ (въ Іюлѣ 1911 г.) съѣздѣ Международной Сейсмологической Ассоціаціи въ Манчестерѣ, причемъ постановлено отпустить изъ средствъ Ассоціаціи 10000 марокъ для организаціи наблюденій надъ деформаціями земли въ четырехъ новыхъ пунктахъ, а именно въ Сибири, напр. въ Томскѣ, въ центральной части Сѣверной Америки, въ Парижѣ, въ знаменитыхъ подвалахъ Парижской Обсерваторіи, и гдѣ-нибудь въ Южномъ полушаріи, напр. въ Johannesburg'ѣ, на югѣ Африки. Въ этой важной научной работѣ приметъ, вѣроятно, участіе и Международная Геодезическая Ассоціація.

Несомнѣнно, что эти наблюденія прольютъ со временемъ новый свѣтъ на загадочный вопросъ объ упругихъ свойствахъ земли.

Глава XII.

Теорія механической регистраціи.

§ 1.

Элементарная теорія механической регистраціи.

Возьмемъ опять, какъ прототипъ сейсмографа, горизонтальный маятникъ, регистрирующій, напримѣръ, составляющую $N-S$ смѣщенія почвы x.

Согласно формулѣ (25) § 1 главы V, дифференціальное уравненіе его движенія будетъ

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta + \frac{x''}{l} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

гдѣ

θ — уголъ отклоненія маятника отъ положенія равновѣсія,

ε — постоянная затуханія,

$n = \frac{2\pi}{T}$, гдѣ T есть собственный періодъ маятника безъ затуханія, а

l — приведенная длина маятника.

Предположимъ теперь, что мы регистрируемъ движеніе маятника механически, при помощи пишущаго штифта на закопченной бумагѣ.

Обозначивъ разстояніе конца штифта до оси вращенія маятника черезъ L, а отклоненіе штифта отъ положенія равновѣсія черезъ y, мы можемъ, для малыхъ угловъ θ, положить

$$y = L\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Если сейсмографъ снабженъ увеличительнымъ приборомъ и $\frac{b}{a}$ есть отношеніе длиннаго плеча увеличительнаго рычага къ короткому, а L_0 раз-

стояніе конца короткаго рычага до оси вращенія, то, согласно формулѣ (19) § 3 главы IV,

$$L = L_0 \frac{b}{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Умножимъ теперь уравненіе (1) на L.

Тогда мы будемъ имѣть

$$y'' + 2\varepsilon y' + n^2 y + \frac{L}{l} x'' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Согласно формулѣ (114) § 4 главы V-ой, величина $\frac{L}{l}$ есть ничто иное, какъ нормальное увеличеніе прибора $\mathfrak{V}_0$, при чрезвычайно быстрыхъ гармоническихъ колебаніяхъ почвы:

$$\mathfrak{V}_0 = \frac{L}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Изслѣдуемъ теперь собственное движеніе прибора.

Для этого положимъ въ уравненіи (4) $x'' = 0$.

Тогда

$$y'' + 2\varepsilon y' + n^2 y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Треніе пера (штифта) о закопченную бумагу вводитъ также нѣкоторое добавочное затуханіе и, поскольку моментъ этихъ силъ тренія пропорціоналенъ угловой скорости вращенія маятника, соотвѣтствующая величина затуханія включена уже въ значеніе коеффиціента ε.

Общій интегралъ уравненія (6), въ случаѣ $\varepsilon < n$, представляетъ собою, согласно формулѣ (37) § 2 главы V, затухающую синусоиду, представленную на слѣдующемъ чертежѣ 144.

Уравненіе этой кривой будетъ

$$y = e^{-\varepsilon t}[C_1 \cos \gamma t + C_2 \sin \gamma t], \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

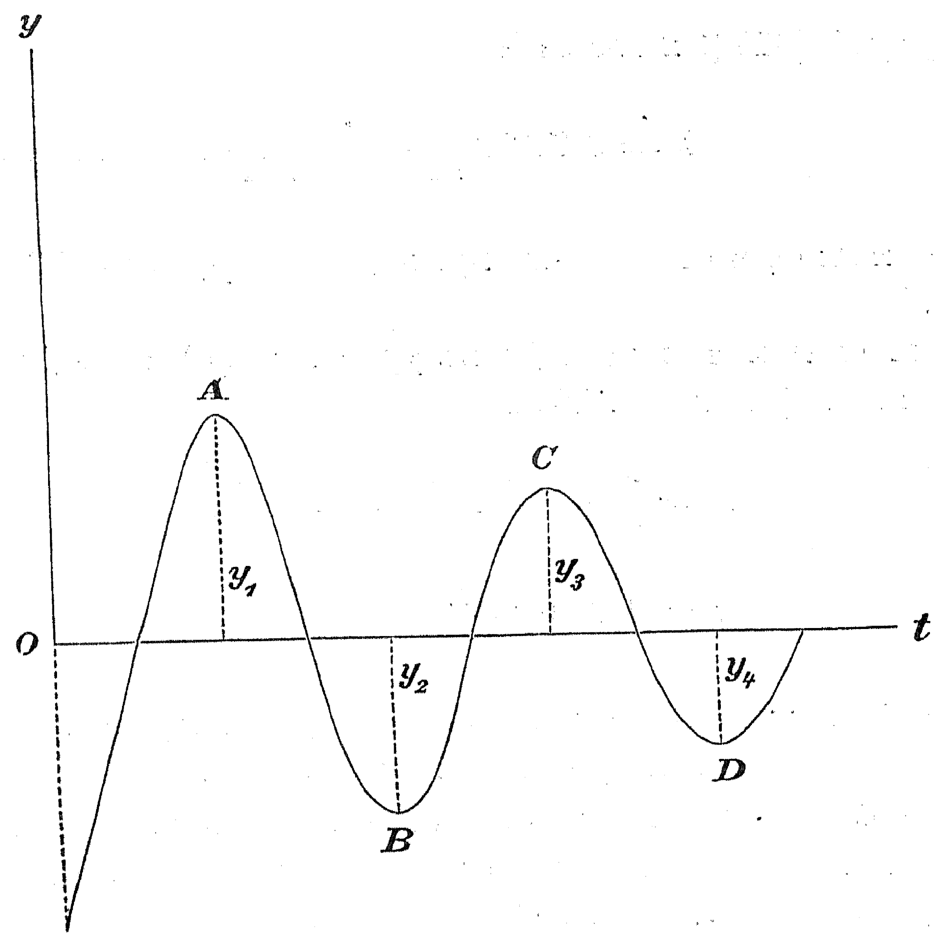
гдѣ C_1 и C_2 суть двѣ постоянныя произвольныя интегрированія, а

$$\gamma = +\sqrt{n^2 - \varepsilon^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Введемъ теперь, какъ и въ § 2 главы V-ой, слѣдующія обозначенія:

$$h = \frac{\varepsilon}{n} \ldots\ldots\ldots\ldots (9) \text{ (формула (56))}$$

Черт. 144.



$$\mu^2 = 1 - h^2 \quad \ldots\ldots\ldots (10) \text{ (формула (57))}$$

$$\gamma = n\mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11) \text{ (формула (58))}$$

Тогда *коеффиціентъ* затуханія v, равный отношенію двухъ послѣдующихъ максимальныхъ амплитудъ кривой $\frac{y_k}{y_{k+1}}$ (независимо отъ знака послѣднихъ), опредѣлится по формулѣ

$$v = e^{\pi \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}} = e^{\pi \frac{h}{\mu}} = e^{\pi \frac{\varepsilon}{\gamma}} \ldots (12) \text{ (формула (60))}$$

Положивши еще, для сокращенія,

$$m = \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

будемъ имѣть

$$v = e^{\pi m} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Логариѳмическій декрементъ

$$\Lambda = \mathrm{Log}_{10}\, v \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

опредѣляется непосредственно изъ опыта; отсюда, слѣдовательно, будемъ знать и v.

По формулѣ (61) § 2 главы V

$$h = 0{,}7330 \frac{\Lambda}{\sqrt{1 + 0{,}53720\,\Lambda^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Зная h, можно, по только что приведенной формулѣ (10), опредѣлить затѣмъ и μ^2.

Постоянныя n и ε, входящія въ уравненіе (6), опредѣлятся по формуламъ (53) и (54) § 2 главы V-ой

$$n = \frac{2\pi}{T'} \cdot \sqrt{1 + 0{,}53720\,\Lambda^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

и

$$\varepsilon = 4{,}6052 \cdot \frac{\Lambda}{T'}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

гдѣ T' есть собственный періодъ колебаній маятника при наличіи затуханія; онъ также опредѣляется непосредственно изъ опыта.

Если все было-бы такъ просто, какъ здѣсь только что изложено, то механическій способъ регистраціи не представлялъ-бы никакихъ практическихъ затрудненій, и обработка сейсмограммъ, и опредѣленіе постоянныхъ приборовъ производились-бы совершенно такъ-же, какъ при простой оптической регистраціи, къ которой, въ сущности, всѣ вышеприведенныя формулы и относятся.

Но на самомъ дѣлѣ опытъ показываетъ, что дифференціальное уравненіе (6) не удовлетворяетъ вполнѣ дѣйствительному движенію маятника при наличіи тренія пера о закопченную бумагу, и что приходится поэтому ввести въ него нѣкоторый поправочный членъ.

Дѣйствительно, если маятникъ, совершившій рядъ качаній, приближается къ своему окончательному положенію равновѣсія со стороны положительныхъ ординатъ y, когда $\frac{dy}{dt} < 0$, то опытъ показываетъ, что y не доходитъ вполнѣ до нуля, а остается нѣкоторое небольшое, остаточное, положительное отклоненіе, обуславливаемое величиной такъ называемаго тренія при покоѣ. Если-же маятникъ приближается къ окончательному положенію равновѣсія со стороны отрицательныхъ ординатъ, когда $\frac{dy}{dt} > 0$, то остаточное отклоненіе будетъ отрицательно.

Это обстоятельство можно учесть присоединеніемъ къ y въ дифференціальномъ уравненіи (6) небольшой постоянной поправки ρ.

Тогда дифференціальное уравненіе собственнаго движенія маятника

представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$y'' + 2\varepsilon y' + n^2(y + \rho) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

Изъ этой формулы слѣдуетъ, что, при равновѣсіи, когда y' и y'' оба равны нулю,

$$y = -\rho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

Изъ только что сказаннаго слѣдуетъ, что ρ должно мѣнять свой знакъ вмѣстѣ съ y', причемъ, когда $y' < 0$, то $\rho < 0$, а, когда $y' > 0$, то и $\rho > 0$.

Нельзя, однако, предполагать, что введеніе поправки ρ исчерпываетъ вопросъ, и что уравненіе (19) уже вполнѣ точно удовлетворяетъ дѣйствительному движенію маятника.

На уравненіе (19) надо смотрѣть лишь какъ на первое приближеніе къ истинѣ.

Учесть вполнѣ точно и строго вліяніе тренія пера о закопченную бумагу на движеніе маятника представляетъ громадныя трудности, такъ какъ, во-первыхъ, законы этого тренія еще очень мало изучены, а, во-вторыхъ, само это треніе является крайне перемѣнчивымъ элементомъ, подверженнымъ вліянію самыхъ разнообразныхъ случайныхъ причинъ.

Это и составляетъ главный и весьма существенный недостатокъ механическаго способа регистраціи. Вслѣдствіе этого, слѣдовало-бы избѣгать пользоваться имъ на сейсмическихъ станціяхъ перваго разряда, гдѣ требуется особенная точность результатовъ. Для сейсмическихъ-же станцій второго разряда, гдѣ такая точность является уже излишней, способъ этотъ, въ виду его дешевизны, является вполнѣ пригоднымъ.

Тѣмъ не менѣе, при внимательномъ отношеніи къ дѣлу и учитывая разныя поправки, можно и при механическомъ способѣ регистраціи добиться весьма удовлетворительныхъ результатовъ въ дѣлѣ изслѣдованія истиннаго движенія почвы при землетрясеніяхъ.

Введеніе поправки ρ уже значительно улучшаетъ результатъ обработки сейсмограммъ. Въ этомъ и заключается элементарная теорія механической регистраціи (введеніе ρ).

Посмотримъ теперь, какимъ образомъ отразится на нашихъ формулахъ введеніе поправки ρ въ основное дифференціальное уравненіе движенія маятника (уравненіе (19)).

Предположимъ, что мы сняли кривую собственнаго движенія сейсмографа, представленную на чертежѣ 144, и измѣрили нѣсколько максимальныхъ ординатъ y_1, y_2, y_3, y_4 и т. д.

Общій интегралъ уравненія (19) представится, какъ извѣстно, въ слѣдующемъ видѣ:

$$(y+\rho)=e^{-\varepsilon t}[C_1\cos\gamma t+C_2\sin\gamma t]\ \ldots\ldots\ldots\ldots(21)$$

Изслѣдуемъ сначала кривую между точками A и B, причемъ начало счета временъ мы пріурочимъ къ точкѣ A.

Между A и B $y'<0$, а, слѣдовательно, и $\rho<0$.

Условившись всегда понимать подъ ρ положительную величину, мы можемъ, *для даннаго интервала времени*, представить предыдущую формулу въ слѣдующемъ видѣ:

$$y=\rho+e^{-\varepsilon t}[C_1\cos\gamma t+C_2\sin\gamma t]\ldots\ldots\ldots\ldots(22)$$

Отсюда имѣемъ

$$y'=e^{-\varepsilon t}[-\varepsilon C_1\cos\gamma t-\varepsilon C_2\sin\gamma t-\gamma C_1\sin\gamma t+\gamma C_2\cos\gamma t]\ldots(23)$$

Постоянныя C_1 и C_2 опредѣлятся изъ начальныхъ условій, а именно,

при $t=0,\qquad y=y_1\quad$ и $\quad y'=0$.

Полагая въ уравненіяхъ (22) и (23) $t=0$, будемъ имѣть

$$y_1=\rho+C_1$$

и

$$0=-\varepsilon C_1+\gamma C_2.$$

Отсюда находимъ

$$\left.\begin{aligned}C_1&=y_1-\rho\\ C_2&=\frac{\varepsilon}{\gamma}(y_1-\rho).\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(24)$$

и

Подставляя эти величины въ уравненіе (22), получимъ

$$(y-\rho)=(y_1-\rho)e^{-\varepsilon t}\left[\cos\gamma t+\frac{\varepsilon}{\gamma}\sin\gamma t\right]\ldots\ldots\ldots(25)$$

Слѣдующая максимальная ордината y_2 опредѣлится изъ условія $\frac{dy}{dt}=0$. Взявъ производную отъ уравненія (25), получимъ

$$\frac{dy}{dt}=(y_1-\rho)e^{-\varepsilon t}\left[-\varepsilon\cos\gamma t-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}\sin\gamma t-\gamma\sin\gamma t+\varepsilon\cos\gamma t\right]$$

$$=-\frac{n^2}{\gamma}(y_1-\rho)e^{-\varepsilon t}\sin\gamma t\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(см. формулу (8))}$$

Второй корень t_m уравненія $\frac{dy}{dt} = 0$ будетъ

$$t_m = \frac{\pi}{\gamma} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

Слѣдовательно,

$$\cos \gamma t_m = -1$$

и

$$e^{-\varepsilon t_m} = e^{-\varepsilon \frac{\pi}{\gamma}}.$$

Но изъ формулъ (10), (12) и (13) слѣдуетъ, что

$$\frac{\varepsilon}{\gamma} = \frac{h}{\mu} = \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu} = m,$$

а, такъ какъ, по формулѣ (14),

$$e^{\pi m} = v,$$

то мы будемъ имѣть

$$e^{-\varepsilon t_m} = e^{-\pi m} = \frac{1}{v}.$$

Подставляя эти величины въ формулу (25), найдемъ

$$(y_2 - \rho) = -(y_1 - \rho) \cdot \frac{1}{v} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

Совершенно подобнымъ-же образомъ мы нашли-бы для части кривой, заключенной между точками B и C, для которой $y' > 0$ и $\rho > 0$, слѣдующее соотношеніе:

$$(y_3 + \rho) = -(y_2 + \rho) \cdot \frac{1}{v} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

Знакъ ($-$) въ правой части уравненій (27) и (28) обозначаетъ, что ордината y_2 отрицательна, т.-е. что точка B лежитъ ниже оси временъ.

Условимся теперь понимать подъ y_1, y_2, y_3, y_4 и т. д. всегда *абсолютную* величину соотвѣтствующей ординаты, независимо отъ знака; тогда въ формулахъ (27) и (28) надо, вмѣсто y_2, подставить $-y_2$.

Тогда мы будемъ имѣть

$$-(y_2 + \rho) = -(y_1 - \rho) \frac{1}{v}$$

и

$$(y_3 + \rho) = (y_2 - \rho) \frac{1}{v},$$

или, положивши

$$v = 1 + \xi, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 - \rho = (y_2 + \rho)(1 + \xi) \\ y_2 - \rho = (y_3 + \rho)(1 + \xi) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

Въ общемъ же случаѣ, для любого цѣлаго k, мы будемъ имѣть

$$y_k - \rho = (y_{k+1} + \rho)(1 + \xi), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

гдѣ ρ есть всегда величина положительная.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что отношеніе двухъ смежныхъ ординатъ $v_k = \frac{y_k}{y_{k+1}}$ не даетъ намъ еще величину истиннаго коеффиціента затуханія v, такъ какъ, по формулѣ (31),

$$v = 1 + \xi = \frac{y_k - \rho}{y_{k+1} + \rho} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

Слѣдовательно, всегда

$$v < v_k,$$

причемъ v_k не является уже болѣе величиной постоянной, а, какъ показываетъ опытъ, съ уменьшеніемъ y_k, v_k непрерывно возрастаетъ.

Формула (31) служитъ основаніемъ для опредѣленія двухъ постоянныхъ сейсмографа ρ и v.

Предположимъ, что мы измѣрили 3 смежныя ординаты y_k, y_{k+1} и y_{k+2}. Тогда мы будемъ имѣть

$$\left.\begin{array}{l} y_k - \rho = (y_{k+1} + \rho)(1 + \xi) \\ y_{k+1} - \rho = (y_{k+2} + \rho)(1 + \xi) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

Сложимъ эти два уравненія, чтобы ввести сумму абсолютныхъ величинъ двухъ смежныхъ ординатъ, и избавиться тѣмъ самымъ отъ вліянія возможной ошибки въ положеніи нулевой линіи.

Тогда

$$(y_k + y_{k+1}) - 2\rho = \{(y_{k+1} + y_{k+2}) + 2\rho\}(1 + \xi) \ldots\ldots (34)$$

Для опредѣленія ρ лучше всего поступать слѣдующимъ образомъ.

Стараются, по возможности, ослабить затуханіе прибора. Напримѣръ, если сейсмографъ снабженъ магнитнымъ затуханіемъ, то слѣдуетъ совершенно раздвинуть магниты и соединить между собою оба полюса каждаго магнита желѣзной пластинкой.

Тогда v будетъ очень мало отличаться отъ 1, и, *въ первомъ приближеніи*, можно положить $\xi = 0$.

Тогда изъ формулы (34) мы будемъ имѣть

$$\rho = \frac{1}{4}(y_k - y_{k+2}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

Такимъ образомъ, ρ равняется одной четверти разности двухъ смежныхъ максимальныхъ ординатъ кривой собственнаго движенія прибора на *той-же сторонѣ* оси временъ.

Болѣе точную величину для ρ мы получимъ изъ формулы (34), сохраняя величину ξ, но пренебрегая произведеніемъ двухъ малыхъ величинъ ξ и ρ.

Въ этомъ случаѣ

$$(y_k + y_{k+1}) - 2\rho = (y_{k+1} + y_{k+2}) + 2\rho + (y_{k+1} + y_{k+2})\xi$$

или

$$(y_{k+1} + y_{k+2})\xi + 4\rho = (y_k - y_{k+2}) \ldots\ldots\ldots\ldots (36)$$

Имѣя два уравненія вида формулы (36), можно опредѣлить обѣ неизвѣстныя ρ и ξ.

Можно, такимъ образомъ, изслѣдовать кривую собственнаго движенія прибора по частямъ, чтобы убѣдиться, сохраняютъ ли величины ξ и ρ свои значенія для разныхъ частей кривой или онѣ зависятъ нѣсколько отъ величины средней ординаты y_{k+1}.

Когда ρ опредѣлено, то можно уже ввести потребное для сейсмическихъ цѣлей затуханіе и приступить къ опредѣленію v.

При механическомъ способѣ регистраціи излишне брать v слишкомъ большимъ. Достаточно, по крайней мѣрѣ для тѣхъ тяжелыхъ горизонтальныхъ маятниковъ, которые предназначены для русскихъ сейсмическихъ станцій 2-го разряда, чтобы v было около 4 или 5.

Чтобы опредѣлить въ этомъ случаѣ v изъ кривой собственнаго движенія прибора, надо уже обратиться теперь къ строгой формулѣ (34).

Введемъ, для сокращенія, слѣдующее обозначеніе:

$$w_k = y_k + y_{k+1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

Тогда изъ уравненій (34) и (29) мы будемъ имѣть

$$w_k - 2\rho = w_{k+1} v + 2\rho v \qquad (38)$$

или

$$v = \frac{w_k - 2\rho}{w_{k+1} + 2\rho} \qquad (39)$$

Такъ какъ ρ извѣстно, то по этой формулѣ можно легко вычислить коэффиціентъ затуханія v.

Для этого достаточно имѣть три измѣренныя ординаты.

Если затуханіе v сравнительно невелико, такъ что имѣется цѣлый рядъ измѣренныхъ ординатъ y_k, то можно еще иначе воспользоваться формулой (38).

Введемъ для этого слѣдующее обозначеніе:

$$u = 2\rho\,(1 + v), \qquad (40)$$

гдѣ u представляетъ собою новую неизвѣстную.

Тогда изъ уравненія (38) будемъ имѣть

$$w_k = w_{k+1} v + u \qquad (41)$$

Имѣя рядъ такихъ уравненій, можно опредѣлить отдѣльно v и u; а, зная u, найдемъ тотчасъ-же и ρ, по формулѣ

$$\rho = \frac{u}{2\,(1+v)} \qquad (42)$$

Для опредѣленія u и v по формулѣ (41) можно воспользоваться слѣдующимъ простымъ пріемомъ, указаннымъ Орловымъ.

Положимъ, что мы имѣемъ слѣдующую систему i уравненій:

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= w_2 v + u \\ w_2 &= w_3 v + u \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_i &= w_{i+1} v + u \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

Замѣтимъ, что мы можемъ имѣть большую систему уравненій, даже если на каждой кривой измѣрены только 3 или 4 ординаты, если мы только

повторимъ нѣсколько разъ наблюденія и снимемъ рядъ кривыхъ собственнаго движенія прибора. Тогда только отдѣльныя величины w_k могутъ и не повторяться въ двухъ сосѣднихъ уравненіяхъ.

Возьмемъ среднее изъ всѣхъ уравненій (43) и введемъ слѣдующія обозначенія:

$$\left.\begin{aligned} w_m &= \frac{w_1 + w_2 + \ldots + w_i}{i} \\ w_{m_1} &= \frac{w_2 + w_3 + \ldots w_{i+1}}{i} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (44)$$

Тогда мы будемъ имѣть

$$w_m = w_{m_1} v + u \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (45)$$

Вычтя это уравненіе изъ каждаго изъ уравненій (43), получимъ

$$\left.\begin{aligned} (w_1 - w_m) &= (w_2 - w_{m_1})\, v \\ (w_2 - w_m) &= (w_3 - w_{m_1})\, v \\ \ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (w_i - w_m) &= (w_{i+1} - w_{m_1})\, v \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (46)$$

Въ эти уравненія входитъ только одна неизвѣстная v.

Эту группу уравненій можно уже легко трактовать по способу наименьшихъ квадратовъ.

Найдя v, опредѣлимъ изъ уравненія (45) u, а затѣмъ, по формулѣ (42), и ρ.

Такова элементарная теорія механической регистраціи.

Основной формулой для различныхъ выводовъ послужила намъ формула (34), въ которую ρ входитъ, какъ нѣкоторая постоянная и положительная величина.

Къ сожалѣнію, опытъ не вполнѣ оправдываетъ это предположеніе, а именно ρ не остается постояннымъ, а, съ уменьшеніемъ амплитуды y_k, само уменьшается, причемъ, при малыхъ значеніяхъ y_k, ρ очень мало. Точно также и коэффиціентъ затуханія v, *вычисляемый по той-же формулѣ (34)*, или, какъ слѣдствіе изъ нея, по формулѣ (39), также не остается постояннымъ, а, съ уменьшеніемъ y_k, нѣсколько возрастаетъ, хотя, по существу дѣла, $v = e^{\varkappa m}$ должно было-бы оставаться постояннымъ. (См. статью «Ueber ein neues schweres Horizontalpendel mit mechanischer Registrierung für seis-

mische Stationen zweiten Ranges». Извѣстія Постоянной Центральной Сейсмической Комиссіи Т. III, вып. 3).

Изъ этого можно заключить, что введеніе въ дифференціальное уравненіе движенія маятника одной поправки ρ еще недостаточно, а требуется еще какой-то другой поправочный членъ. Вопросъ этотъ мы разсмотримъ въ слѣдующемъ §.

Тѣмъ не менѣе этой элементарной теоріей можно всетаки пользоваться для опредѣленія постоянныхъ сейсмографа и для обработки сейсмограммъ, но надо на это смотрѣть лишь какъ на первое приближеніе къ истинѣ.

Весьма желательно, когда къ тому представляется возможность, опытнымъ путемъ опредѣлить зависимость ρ и v отъ y_k, и, при обработкѣ сейсмограммъ (см. § 3 этой главы), вводить для каждой измѣренной на сейсмограммѣ амплитуды y_m *соотвѣтствующія* значенія v и ρ, но, такъ какъ это нѣсколько сложно, то большею частью ограничиваются средними значеніями ρ и v. Такъ, по крайней мѣрѣ, всегда поступаютъ заграницей.

Точность результата, конечно, отъ этого нѣсколько страдаетъ.

Если удастся установить зависимость ρ отъ y_k, то, при вычисленіи v по тремъ измѣреннымъ ординатамъ y_1, y_2 и y_3, лучше, взамѣнъ формулы (39), пользоваться слѣдующей формулой:

$$v = \frac{y_1 + y_2 - (\rho_1 + \rho_2)}{y_2 + y_3 + (\rho_2 + \rho_3)}, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . (47)$$

которая вытекаетъ непосредственно изъ уравненій (33), считая ρ функціей отъ y_k.

Посмотримъ-же теперь, какимъ образомъ можно усовершенствовать основное дифференціальное уравненіе движенія маятника, чтобы оно, при механическомъ способѣ регистраціи, ближе соотвѣтствовало-бы истинному характеру движенія прибора.

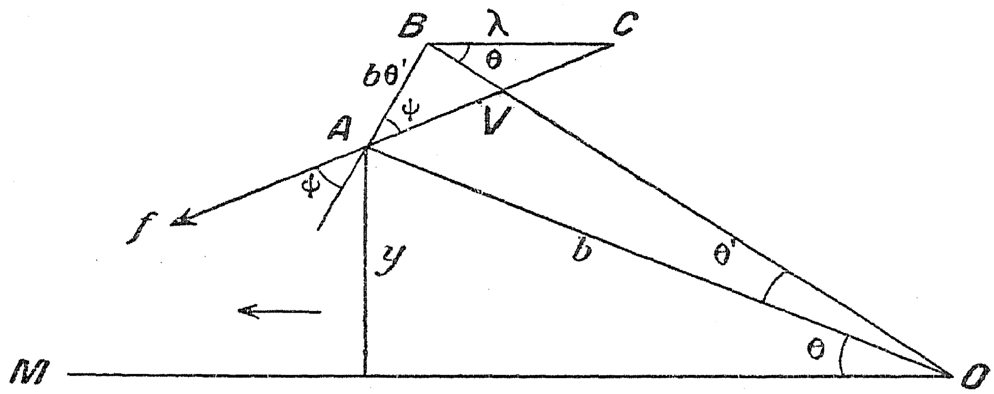
§ 2.

Введеніе добавочнаго поправочнаго члена.

Разовьемъ теперь болѣе полную теорію механической регистраціи, разсмотрѣвъ ближе самый процессъ тренія пера о закопченную бумагу.

На слѣдующемъ чертежѣ 145 A представляетъ собою конецъ пишущаго штифта, находящагося въ разстояніи b отъ оси вращенія O.

Черт. 145.



При наличіи увеличительнаго прибора, b представляетъ собою длинное плечо увеличительнаго рычага, а, при отсутствіи послѣдняго, b есть разстояніе L пишущаго пера до оси вращенія маятника.

Пусть плечо OA отклонено отъ положенія равновѣсія на уголъ θ; тогда отклоненіе точки A отъ нулевой линіи OM будетъ y, гдѣ

$$y = b \sin\theta$$

или, при малыхъ значеніяхъ θ,

$$y = b\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (48)$$

Обозначимъ черезъ θ' угловую скорость, т.-е. увеличеніе угла θ въ 1 секунду времени; тогда точка A перейдетъ черезъ секунду въ точку B, причемъ $AB = b\theta'$. AB есть малая величина. Но за то-же время закопченная бумага перемѣстится влѣво, въ направленіи стрѣлки, *отъ* оси вращенія, на величину $BC = \lambda$, гдѣ λ есть длина 1 секунды на регистрирномъ валѣ.

Такимъ образомъ, фактически конецъ пишущаго пера перемѣстится *по поверхности закопченной бумаги* изъ точки A въ точку C.

Соотвѣтствующую скорость перемѣщенія штифта по бумагѣ обозначимъ черезъ V.

Тогда

$$V = AC.$$

Вычислимъ теперь V.

Въ треугольникѣ ABC, въ виду малости AB, можно положить уголъ CBO равнымъ θ.

Тогда

$$\angle ABC = 90^\circ + \theta.$$

Обозначивъ еще уголъ BAC черезъ ψ, будемъ имѣть

$$V^2 = (b\theta')^2 + \lambda^2 - 2b\theta'\lambda . \cos(90^\circ + \theta)$$

или

$$V^2 = (b\theta')^2 + \lambda^2 + 2b\theta'\lambda . \sin\theta \ldots\ldots\ldots\ldots (49)$$

Съ другой стороны,

$$\frac{\sin\psi}{\sin(90^\circ + \theta)} = \frac{\lambda}{V}$$

или

$$\sin\psi = \frac{\lambda}{V}\cos\theta.$$

Отсюда имѣемъ

$$\cos\psi = \frac{1}{V} \cdot \sqrt{V^2 - \lambda^2\cos^2\theta}.$$

Подставляя сюда значеніе V^2 изъ формулы (49), получимъ

$$\cos\psi = \frac{1}{V} \cdot \sqrt{(b\theta')^2 + \lambda^2\sin^2\theta + 2b\theta'\lambda\sin\theta}$$

или

$$\cos\psi = \frac{1}{V}[b\theta' + \lambda\sin\theta] \ldots\ldots\ldots\ldots (50)$$

Если-бы движеніе закопченной бумаги происходило въ противоположную сторону, то въ предыдущихъ формулахъ надо было-бы, вмѣсто λ, подставить $-\lambda$.

Сила реакціи f, вызываемая треніемъ пера о закопченную бумагу, направлена отъ C къ A. Она препятствуетъ всегда увеличенію угла θ, а потому моментъ этой силы относительно оси вращенія маятника будетъ всегда отрицательный.

Сила f, по существу дѣла, не можетъ непосредственно зависѣть отъ величины угла отклоненія θ, а должна быть нѣкоторой функціей скорости V:

$$f = F(V).$$

Не зная вида этой функціи, мы можемъ тѣмъ не менѣе, съ извѣстными ограниченіями, разложить ее въ рядъ по строкѣ Маклорена.

Ограничиваясь членами второго порядка, будемъ имѣть:

$$f = f_0 + \alpha V + \beta V^2, \ldots\ldots\ldots\ldots (51)$$

гдѣ α и β суть нѣкоторые постоянные коеффиціенты.

Въ этой формулѣ f_0 не равно нулю, потому что, какъ мы видѣли въ предыдущемъ параграфѣ, существуетъ нѣкоторое треніе при покоѣ.

Моментъ силы f относительно оси вращенія O, который мы обозначимъ черезъ $\mathfrak{M}_0$, выразится такъ

$$\mathfrak{M}_0 = f\cos\psi \,.\, b,$$

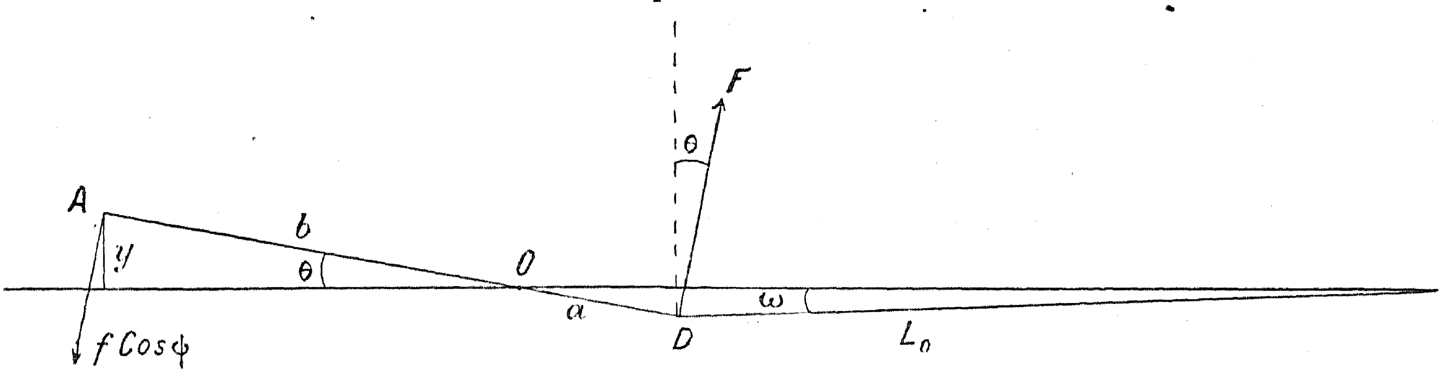
или, согласно формуламъ (50) и (51), и полагая, въ виду малости θ, $\sin\theta = \theta$,

$$\mathfrak{M}_0 = \frac{b}{V}[b\theta' + \lambda\theta][f_0 + \alpha V + \beta V^2] \ldots\ldots\ldots\ldots (52)$$

Найдемъ теперь моментъ силы f относительно оси вращенія самого маятника. Обозначимъ его черезъ $\mathfrak{M}_1$.

Для этого обратимся къ слѣдующему чертежу 146.

Черт. 146.



O_1 представляетъ собою ось вращенія маятника, O — ось вращенія увеличительнаго рычага, ω — уголъ поворота маятника, соотвѣтствующій углу θ, a и b — соотвѣтственно короткое и длинное плечо увеличительнаго рычага; $O_1D = L_0$.

Моментъ $\mathfrak{M}_0 = f\cos\psi \,.\, b$ равноцѣненъ моменту силы F, приложенной къ точкѣ D перпендикулярно къ плечу OD, причемъ

$$F = \frac{1}{a}\mathfrak{M}_0.$$

Моментъ силы F относительно оси вращенія маятника будетъ

$$\mathfrak{M}_1 = F\cos(\theta + \omega) \,.\, L_0$$

или, въ виду малости θ и ω,

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{L_0}{} \cdot \mathfrak{M}_0.$$

Подставляя сюда значеніе $\mathfrak{M}_0$ изъ формулы (52) и полагая

$$\nu = \frac{\lambda}{b}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (53)$$

будемъ имѣть

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{L_0\, b^2}{a V} \cdot [\theta' + \nu\,\theta]\,[f_0 + \alpha V + \beta V^2] \ldots \ldots \ldots \ldots (54)$$

Таково выраженіе момента тренія пера относительно оси вращенія маятника.

Если-бы перо было поднято и не было-бы никакого тренія, то, согласно основной теоремѣ механики, по которой произведеніе изъ момента инерціи относительно оси вращенія на угловое ускореніе движенія маятника, должно быть равно моменту всѣхъ силъ дѣйствующихъ на систему, мы имѣли-бы слѣдующее соотношеніе:

$$K\omega'' = - P\omega - \mathfrak{M} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (55)$$

Здѣсь K представляетъ собою моментъ инерціи системы, $P\omega$ моментъ силы тяжести, который всегда отрицательный, а $\mathfrak{M}$ моментъ прочихъ задерживающихъ силъ (затуханіе).

Полагая, какъ всегда $\mathfrak{M}$ пропорціональнымъ угловой скорости ω', что для магнитнаго затуханія строго имѣетъ мѣсто, и вводя обозначеніе

$$n^2 = \frac{P}{K},$$

мы можемъ уравненіе (55) представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\omega'' + 2\varepsilon\omega' + n^2\,\omega = 0 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (56)$$

Это есть обыкновенное дифференціальное уравненіе движенія горизонтальнаго маятника (см. формулу (26) § 2 главы V).

Здѣсь ε представляетъ собою постоянную затуханія *отъ прочихъ причинъ*, а

$$n = \frac{2\pi}{T},$$

гдѣ T есть собственный періодъ колебаній маятника при отсутствіи всякаго затуханія.

При движеніи почвы, уравненіе (56) принимаетъ слѣдующую извѣстную каноническую форму:

$$\omega'' + 2\varepsilon\omega' + n^2\,\omega + \frac{1}{l}\,x'' = 0.$$

При наличіи-же тренія, въ уравненіе (55) надо ввести еще моментъ $\mathfrak{M}_1$. Тогда мы будемъ имѣть

$$K\omega'' = -P\omega - \mathfrak{M} - \mathfrak{M}_1$$

или, раздѣляя это уравненіе на K,

$$\omega'' + 2\varepsilon\omega' + n^2\omega + \frac{\mathfrak{M}_1}{K} = 0.$$

При движеніи-же почвы будемъ имѣть

$$\omega'' + 2\varepsilon\omega' + n^2\omega + \frac{\mathfrak{M}_1}{K} + \frac{1}{l}x'' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (57)$$

Изъ чертежа 146 видно, что, при малыхъ значеніяхъ θ,

$$a\theta = L_0\omega;$$

слѣдовательно,

$$y = b\theta = \frac{b}{a}L_0\omega.$$

Но, согласно формулѣ (3),

$$\frac{b}{a}L_0 = L;$$

слѣдовательно,

$$y = L\omega.$$

Умноживъ уравненіе (57) на L и принимая во вниманіе, что, согласно выраженію (5), $\frac{L}{l}$ представляетъ собою нормальное увеличеніе прибора $\mathfrak{B}_0$, будемъ имѣть

$$y'' + 2\varepsilon y' + n^2 y + \frac{L}{K}\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{B}_0 x'' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (58)$$

Остается теперь только подставить сюда выраженіе $\mathfrak{M}_1$ изъ формулы (54).

Принимая во вниманіе, что

$$b\theta = y,$$

будемъ имѣть

$$\frac{L}{K}\mathfrak{M}_1 = \frac{L^2}{K}\cdot\frac{1}{V}[y' + \nu y][f_0 + \alpha V + \beta V^2] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (59)$$

Обратимся теперь къ формулѣ (49).

Полагая въ ней $\sin\theta = \theta$ и принимая во вниманіе соотношеніе (53), получимъ

$$V = \sqrt{y'^2 + 2\nu\, y'\, y + b^2\, \nu^2}.$$

Въ виду малой скорости движенія вала, ν есть всегда очень малая величина, а потому въ предыдущей формулѣ мы могли-бы въ сущности совершенно пренебречь членомъ $b^2\,\nu^2$. Тѣмъ болѣе мы можемъ замѣнить $b^2\,\nu^2$ величиной $y^2\,\nu^2$.

Тогда мы будемъ имѣть

$$V = \sqrt{y'^2 + 2\nu\, y'\, y + \nu^2\, y^2} = y' + \nu y \text{ . . . . (60)}$$

Эта замѣна, конечно, не вполнѣ строгая, особенно въ тѣхъ точкахъ кривой, гдѣ y' близко къ нулю, но, въ виду малости ν, это обстоятельство не можетъ существеннымъ образомъ отразиться на нашихъ окончательныхъ выводахъ и заключеніяхъ.

Это предположеніе вызвано необходимостью, такъ какъ иначе было-бы трудно интегрировать дифференціальное уравненіе (58).

Подставляя теперь выраженіе для V изъ формулы (60) въ уравненіе (59), будемъ имѣть

$$\frac{L}{K}\mathfrak{M}_1 = \frac{L^2}{K}\left[f_0 + \alpha\{y' + \nu y\} + \beta\{y'^2 + 2\nu y' y + \nu^2 y^2\}\right].$$

Подставимъ теперь найденное выраженіе въ формулу (58).

Тогда

$$y'' + 2\varepsilon y' + n^2 y + \frac{L^2}{K} f_0 + \alpha\nu \frac{L^2}{K} y + \alpha \frac{L^2}{K} y' + \beta \frac{L^2}{K}\{y'^2 + 2\nu\, y'\, y + \nu^2\, y^2\} + \mathfrak{B}_0\, x'' = 0.$$

Введемъ теперь слѣдующія обозначенія:

$$\left.\begin{aligned} 2\varepsilon_0 &= \alpha\frac{L^2}{K} \\ n_1{}^2 &= n^2 + 2\nu\varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon + \varepsilon_0 \\ \rho_0 &= \frac{1}{n_1{}^2}\cdot\frac{L^2}{K}\cdot f_0 \\ \xi &= \beta\frac{L^2}{K}. \end{aligned}\right\} \text{ . . . . (61)}$$

и

Тогда предыдущее уравненіе приметъ слѣдующій окончательный видъ:

$$y'' + 2\varepsilon_1 y' + n_1^2 (y + \rho_0) + \xi \{y' + \nu y\}^2 + \mathfrak{B}_0 x'' = 0 \ldots\ldots (62)$$

Таково обобщенное дифференціальное уравненіе движенія горизонтальнаго маятника при наличіи тренія пера о закопченную бумагу.

ε_1 представляетъ собою окончательную величину постоянной затуханія. Она состоитъ изъ двухъ частей: изъ части ε, зависящей отъ прочихъ задерживающихъ силъ, и изъ ε_0, обуславливаемой треніемъ пера.

Собственный періодъ маятника $T_1 = \frac{2\pi}{n_1}$ будетъ нѣсколько отличаться отъ періода $T = \frac{2\pi}{n}$ при поднятомъ перѣ, но, въ виду малости ν, разница совершенно несущественна, тѣмъ болѣе, что коеффиціентъ n_1 опредѣляется прямо изъ опыта.

Однако, давая регистрирному валу большую вращательную скорость (сравнительно большое ν), можно, дѣйствительно, обнаружить разницу въ періодахъ T_1 и T. Произведенныя наблюденія подтверждаютъ справедливость выведенной формулы $n_1^2 = n^2 + 2\nu\varepsilon_0$.

Изслѣдуемъ теперь собственное движеніе прибора.

Полагая $x'' = 0$, будемъ имѣть

$$y'' + 2\varepsilon_1 y' + n_1^2 (y + \rho_0) + \xi \{y' + \nu y\}^2 = 0 \ldots\ldots\ldots (63)$$

Сравнивая это уравненіе съ ранѣе приведеннымъ уравненіемъ (19), мы видимъ, что, по существу дѣла, оно отличается отъ послѣдняго только введеніемъ добавочнаго поправочнаго члена, содержащаго множитель ξ. Этотъ членъ учитываетъ зависимость силы тренія отъ квадрата скорости V.

Представимъ себѣ теперь, что мы сняли кривую собственнаго движенія прибора, представленную на чертежѣ 144, и измѣрили нѣсколько максимальныхъ ординатъ y_1, y_2, y_3, y_4 и т. д.

Изслѣдуемъ ходъ кривой между точками A и B, принимая абсциссу точки A за начало счета временъ.

Между точками A и B, такъ какъ $y' < 0$, то ρ_0, какъ мы видѣли раньше, должно быть отрицательно. Воздержимся, однако, пока отъ введенія знака (—).

Дифференціальное уравненіе (63), содержащее членъ $\xi \{y' + \nu y\}^2$, не интегрируется въ конечномъ видѣ; но, въ виду малости ξ, мы можемъ, съ точностью до членовъ порядка ξ^2, легко проинтегрировать его по методу послѣдовательныхъ приближеній.

Для этой цѣли положимъ сначала $\xi = 0$ и найдемъ y какъ функцію отъ t, принимая во вниманіе начальныя условія движенія (при $t = 0$, $y = y_1$ и $y' = 0$). Затѣмъ найдемъ значеніе функціи $\{y' + \nu y\}^2$. Подставивъ эту *извѣстную* уже функцію въ уравненіе (63), проинтегрируемъ его вновь. Тогда мы получимъ уже окончательное, искомое выраженіе для y.

Согласно уравненію (25) предыдущаго параграфа, интегралъ уравненія (63), при $\xi = 0$, представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$(y + \rho_0) = (y_1 + \rho_0)\, e^{-\varepsilon_1 t}\left[\cos\gamma_1 t + \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\sin\gamma_1 t\right], \ldots\ldots\ldots (64)$$

гдѣ

$$\gamma_1 = +\sqrt{n_1^2 - \varepsilon_1^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (65)$$

Изъ уравненія (64) получимъ

$$y' = (y_1 + \rho_0)\, e^{-\varepsilon_1 t}\left[-\varepsilon_1\cos\gamma_1 t - \frac{\varepsilon_1^2}{\gamma_1}\sin\gamma_1 t - \gamma_1\sin\gamma_1 t + \varepsilon_1\cos\gamma_1 t\right]$$

или

$$y' = -(y_1 + \rho_0)\frac{n_1^2}{\gamma_1} e^{-\varepsilon_1 t}\sin\gamma_1 t.$$

Далѣе имѣемъ

$$y' + \nu y = -(y_1 + \rho_0)\frac{n_1^2}{\gamma_1} e^{-\varepsilon_1 t}\sin\gamma_1 t + \nu(y_1 + \rho_0)\, e^{-\varepsilon_1 t}\left\{\cos\gamma_1 t + \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\sin\gamma_1 t\right\} - \nu\rho_0$$

или

$$y' + \nu y = (y_1 + \rho_0)\, e^{-\varepsilon_1 t}\left\{\frac{\nu\varepsilon_1 - n_1^2}{\gamma_1}\sin\gamma_1 t + \nu\cos\gamma_1 t\right\} - \nu\rho_0.$$

Возведемъ теперь это выраженіе въ квадратъ.

$$(y' + \nu y)^2 = (y_1 + \rho_0)^2 e^{-2\varepsilon_1 t}\left\{\left(\frac{\nu\varepsilon_1 - n_1^2}{\gamma_1}\right)^2 \sin^2\gamma_1 t + \nu^2 - \nu^2\sin^2\gamma_1 t\right.$$

$$\left. + 2\nu\frac{\nu\varepsilon_1 - n_1^2}{\gamma_1}\sin\gamma_1 t\,.\cos\gamma_1 t\right\} - 2\nu\rho_0(y_1 + \rho_0)\, e^{-\varepsilon_1 t}\left\{\frac{\nu\varepsilon_1 - n_1^2}{\gamma_1}\sin\gamma_1 t + \nu\cos\gamma_1 t\right\} + \nu^2\rho_0^2.$$

Это выраженіе перейдетъ въ правую часть уравненія (63) со знакомъ (—).

Соотвѣтственно этому положимъ

$$\Phi(t) = -(y' + \nu y)^2.$$

Тогда мы можемъ представить $\Phi(t)$ функціей слѣдующаго вида:

$$\Phi(t) = (y_1 + \rho_0)^2 e^{-2\varepsilon_1 t}\left[A\sin^2\gamma_1 t + B\sin\gamma_1 t\,.\cos\gamma_1 t - \nu^2\right]$$

$$+ (y_1 + \rho_0)\, e^{-\varepsilon_1 t}\left[C\sin\gamma_1 t + D\cos\gamma_1 t\right] - \nu^2\rho_0^2, \ldots\ldots\ldots (66)$$

гдѣ коеффиціенты A, B, C и D имѣютъ слѣдующее значеніе:

$$\left.\begin{aligned} A &= -\frac{(\nu\varepsilon_1 - n_1^2)^2 - \nu^2\gamma_1^2}{\gamma_1^2} \\ B &= -2\nu\frac{\nu\varepsilon_1 - n_1^2}{\gamma_1} \\ C &= 2\nu\rho_0\frac{\nu\varepsilon_1 - n_1^2}{\gamma_1} \\ D &= 2\nu^2\rho_0. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots(67)$$

Основное-же дифференціальное уравненіе (63) приметъ слѣдующій видъ:

$$y'' + 2\varepsilon_1 y' + n_1^2(y + \rho_0) = \xi\,\Phi(t) \ldots\ldots\ldots\ldots(68)$$

Это уравненіе мы можемъ уже проинтегрировать въ конечномъ видѣ.

Перемѣнная, входящая въ это уравненіе, есть $y + \rho_0$.

Уравненіе (68), по своей формѣ, вполнѣ похоже на уравненіе (64) § 3 главы V. Общій интегралъ его дается формулой (68) той-же главы.

Примѣняя эту общую формулу къ нашему случаю, будемъ имѣть

$$(y+\rho_0) = e^{-\varepsilon_1 t}[\Gamma_1\cos\gamma_1 t + \Gamma_2\sin\gamma_1 t] + \frac{\xi}{\gamma_1}e^{-\varepsilon_1 t}\Big[-\cos\gamma_1 t\int e^{\varepsilon_1 t}\sin\gamma_1 t\,.\,\Phi(t)\,dt$$

$$+ \sin\gamma_1 t\int e^{\varepsilon_1 t}\cos\gamma_1 t\,.\,\Phi(t)\,dt\Big] \ldots\ldots\ldots\ldots(69)$$

Γ_1 и Γ_2 суть двѣ постоянныя интегрированія.

Теперь надо найти выраженія для двухъ неопредѣленныхъ интеграловъ, входящихъ въ уравненіе (69).

Введемъ для удобства слѣдующія обозначенія:

$$\gamma_1 t = u \ldots\ldots\ldots\ldots(70)$$

и

$$\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} = -a, \ldots\ldots\ldots\ldots(71)$$

гдѣ само a есть величина отрицательная.

Тогда

$$dt = \frac{1}{\gamma_1}du$$

и

$$\varepsilon_1 t = -au.$$

Функція $\Phi(t)$ приметъ тогда слѣдующій видъ:

$$\Phi(t) = \Psi(u) = (y_1 + \rho_0)^2 e^{2au} [A \sin^2 u + B \sin u \cos u - \nu^2]$$
$$+ (y_1 + \rho_0) e^{au} [C \sin u + D \cos u] - \nu^2 \rho_0^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (72)$$

Введемъ еще слѣдующія два обозначенія:

$$S_1 = \int e^{-au} \sin u . \Psi(u)\, du \ldots\ldots\ldots\ldots (73)$$

и

$$S_2 = \int e^{-au} \cos u . \Psi(u)\, du \ldots\ldots\ldots\ldots (74)$$

Тогда уравненіе (69) представится слѣдующимъ образомъ:

$$(y + \rho_0) = e^{au} [\Gamma_1 \cos u + \Gamma_2 \sin u] + \frac{\xi}{\gamma_1^2} e^{au} [- \cos u . S_1 + \sin u . S_2] \ldots (75)$$

Подставивъ въ выраженія для S_1 и S_2 значеніе функціи $\Psi(u)$ изъ формулы (72), мы будемъ имѣть рядъ неопредѣленныхъ интеграловъ, для которыхъ мы и введемъ слѣдующія обозначенія:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \int e^{au} \sin^2 u \cos u\, du \\ P_2 &= \int e^{au} \cos^2 u \sin u\, du \\ P_3 &= \int e^{au} \sin^3 u\, du \\ P_0 &= \int e^{au} \sin u\, du \\ P_\nu &= \int e^{-au} \sin u\, du \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (76)$$

и

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= \int \sin u \cos u\, du \\ Q_2 &= \int \sin^2 u\, du \\ Q_3 &= \int \cos^2 u\, du \\ Q_0 &= \int e^{au} \cos u\, du \\ Q_\nu &= \int e^{-au} \cos u\, du \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (77)$$

Тогда S_1 и S_2 представятся слѣдующимъ образомъ:

$$S_1 = (y_1 + \rho_0)^2 \{AP_3 + BP_1 - \nu^2 P_0\} + (y_1 + \rho_0)\{CQ_2 + DQ_1\} - \nu^2 \rho_0^2 P_\nu$$

и

$$S_2 = (y_1 + \rho_0)^2 \{AP_1 + BP_2 - \nu^2 Q_0\} + (y_1 + \rho_0)\{CQ_1 + DQ_3\} - \nu^2 \rho_0^2 Q_\nu.$$

Введя еще одно обозначеніе

$$\eta = \frac{\xi}{\gamma_1^2} e^{au} [- \cos u \,.\, S_1 + \sin u \,.\, S_2], \quad \dots\dots\dots\dots (78)$$

будемъ имѣть, согласно уравненію (75),

$$y + \rho_0 = e^{au} [\Gamma_1 \cos u + \Gamma_2 \sin u] + \eta, \quad \dots\dots\dots\dots (79)$$

гдѣ η выражается слѣдующей функціей:

$$\eta = \frac{\xi}{\gamma_1^2} e^{au} [(y_1 + \rho_0)^2 \{A(P_1 \sin u - P_3 \cos u) + B(P_2 \sin u - P_1 \cos u)$$

$$+ \nu^2 (P_0 \cos u - Q_0 \sin u)\}$$

$$+ (y_1 + \rho_0)\{C(Q_1 \sin u - Q_2 \cos u) + D(Q_3 \sin u - Q_1 \cos u)\}$$

$$+ \nu^2 \rho_0^2 \{P_\nu \cos u - Q_\nu \sin u\}] \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (80)$$

Вычислимъ теперь значенія функцій

$$(P_1 \sin u - P_3 \cos u), \ (P_2 \sin u - P_1 \cos u)$$

и т. д., входящихъ въ предыдущее уравненіе (80).

Неопредѣленные интегралы, опредѣляемые соотношеніями (76) и (77), найдутся легко согласно извѣстнымъ пріемамъ интегральнаго исчисленія.

Ихъ можно заимствовать и изъ таблицъ интеграловъ, напр., изъ таблицъ Láska «Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik».

Такимъ образомъ, мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}
P_1 &= \frac{e^{au}}{(1+a^2)(9+a^2)}\Big[3\sin^3 u + \{2\cos u + \sin^2 u\cos u\}\,a + \{-2\sin u \\
&\qquad + 3\sin^3 u\}\,a^2 + \sin^2 u\cos u\,.\,a^3\Big] \\
P_2 &= \frac{e^{au}}{(1+a^2)(9+a^2)}\Big[-3\cos^3 u + \{2\sin u + \sin u\cos^2 u\}\,a + \{2\cos u \\
&\qquad - 3\cos^3 u\}\,a^2 + \sin u\cos^2 u\,.\,a^3\Big] \\
P_3 &= \frac{e^{au}}{(1+a^2)(9+a^2)}\Big[\{-3\sin^2 u\cos u - 6\cos u\} + \{\sin^3 u + 6\sin u\}\,a \\
&\qquad - 3\sin^2 u\cos u\,.\,a^2 + \sin^3 u\,.\,a^3\Big] \\
P_0 &= \frac{e^{au}}{1+a^2}\left[-\cos u + \sin u\,.\,a\right] \\
P_\nu &= \frac{e^{-au}}{1+a^2}\left[-\cos u - \sin u\,.\,a\right]
\end{aligned}\right\} \quad \ldots (81)$$

и

$$\left.\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{1}{2}\sin^2 u \\
Q_2 &= \frac{u}{2} - \frac{1}{2}\sin u\cos u \\
Q_3 &= \frac{u}{2} + \frac{1}{2}\sin u\cos u \\
Q_0 &= \frac{e^{au}}{1+a^2}\left[\sin u + \cos u\,.\,a\right] \\
Q_\nu &= \frac{e^{-au}}{1+a^2}\left[\sin u - \cos u\,.\,a\right]
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (82)$$

Въ справедливости этихъ формулъ легко убѣдиться непосредственнымъ дифференцированіемъ.

На основаніи этихъ соотношеній, можно представить первую искомую функцію $P_1\sin u - P_3\cos u$ слѣдующимъ образомъ:

$$P_1\sin u - P_3\cos u = \frac{e^{au}}{(1+a^2)(9+a^2)}\cdot\chi(u), \quad \ldots\ldots\ldots (83)$$

гдѣ

$$\chi(u) = \chi_0(u) + \chi_1(u)\,a + \chi_2(u)\,a^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (84)$$

$\chi_0(u)$, $\chi_1(u)$ и $\chi_2(u)$ опредѣлятся непосредственно изъ выраженій P_1 и P_3.

$$\chi_0(u) = 3\sin^4 u + 3\sin^2 u\cos^2 u + 6\cos^2 u$$

$$= 3\sin^4 u + 3\sin^2 u - 3\sin^4 u + 6\cos^2 u$$

$$= 3(1 - \cos^2 u) + 6\cos^2 u$$

или

$$\chi_0(u) = 3(1 + \cos^2 u) \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (85)$$

$$\chi_1(u) = 2\sin u\cos u + \sin^3 u\cos u - \sin^3 u\cos u - 6\sin u\cos u$$

или

$$\chi_1(u) = -4\sin u\cos u \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (86)$$

$$\chi_2(u) = -2\sin^2 u + 3\sin^4 u + 3\sin^2 u\cos^2 u$$

$$= -2\sin^2 u + 3\sin^4 u + 3\sin^2 u - 3\sin^4 u$$

или

$$\chi_2(u) = \sin^2 u \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (87)$$

Коэффиціентъ-же при a^3 равенъ нулю.

Точно также найдемъ

$$P_2\sin u - P_1\cos u = \frac{e^{au}}{(1+a^2)(9+a^2)}\cdot\Omega(u), \dots\dots\dots\dots (88)$$

гдѣ

$$\Omega(u) = \omega_0(u) + \omega_1(u).a + \omega_2(u).a^2 \dots\dots\dots\dots (89)$$

и

$$\omega_0(u) = -3\sin u\cos^3 u - 3\sin^3 u\cos u = -3\sin u\cos u(\cos^2 u + \sin^2 u)$$

или

$$\omega_0(u) = -3\sin u\cos u \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (90)$$

$$\omega_1(u) = 2\sin^2 u + \sin^2 u\cos^2 u - 2\cos^2 u - \sin^2 u\cos^2 u$$

или

$$\omega_1(u) = 2(\sin^2 u - \cos^2 u) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (91)$$

$$\omega_2(u) = 2\sin u\cos u - 3\sin u\cos^3 u + 2\sin u\cos u - 3\sin^3 u\cos u$$

$$= 4\sin u\cos u - 3\sin u\cos u(\cos^2 u + \sin^2 u)$$

или

$$\omega_2(u) = \sin u\cos u \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (92)$$

Далѣе имѣемъ

$$P_0 \cos u - Q_0 \sin u = \frac{e^{au}}{1+a^2}\left[-\cos^2 u + a \sin u \cos u - \sin^2 u - a \sin u \cos u\right]$$

$$= -\frac{e^{au}}{1+a^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (93)$$

$$Q_1 \sin u - Q_2 \cos u = \varphi(u), \ldots\ldots\ldots\ldots (94)$$

гдѣ

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\sin^3 u - \frac{1}{2} u \cos u + \frac{1}{2}\sin u \cos^2 u$$

$$= \frac{1}{2}\sin u(\sin^2 u + \cos^2 u) - \frac{1}{2} u \cos u$$

или

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}[\sin u - u \cos u] \ldots\ldots\ldots (95)$$

$$Q_3 \sin u - Q_1 \cos u = \psi(u), \ldots\ldots\ldots\ldots (96)$$

гдѣ

$$\psi(u) = \frac{1}{2} u \sin u + \frac{1}{2}\sin^2 u \cos u - \frac{1}{2}\sin^2 u \cos u$$

или

$$\psi(u) = \frac{1}{2} u \sin u, \ldots\ldots\ldots\ldots (97)$$

и

$$P_\nu \cos u - Q_\nu \sin u = \frac{e^{-au}}{1+a^2}\left[-\cos^2 u - a \sin u \cos u - \sin^2 u + a \sin u \cos u\right]$$

$$= -\frac{e^{-au}}{1+a^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (98)$$

Подставляя всѣ найденныя выраженія въ формулу (80), будемъ имѣть

$$\eta = \frac{\xi}{\gamma_1^2}\Big[(y_1+\rho_0)^2 \frac{e^{2au}}{(1+a^2)(9+a^2)}\{A\chi(u) + B\Omega(u) - (9+a^2)\nu^2\}$$

$$+ (y_1+\rho_0) e^{au}\{C\varphi(u) + D\psi(u)\} - \frac{1}{1+a^2}\nu^2\rho_0^2\Big] \ldots\ldots\ldots (99)$$

Опредѣливши, такимъ образомъ, выраженіе для η и подставивъ его въ формулу (79), можно приступить теперь уже къ опредѣленію постоянныхъ Γ_1 и Γ_2.

Начальныя условія движенія таковы:

При $t = 0$ или $u = 0$,

$$y = y_1$$

и

$$\frac{dy}{dt} = \gamma_1 \frac{dy}{du} = 0.$$

Но, такъ какъ

$$\frac{dy}{dt} = \gamma_1 e^{au} [a\Gamma_1 \cos u + a\Gamma_2 \sin u - \Gamma_1 \sin u + \Gamma_2 \cos u] + \gamma_1 \cdot \frac{d\eta}{du}$$

или

$$\frac{dy}{dt} = \gamma_1 e^{au} [(a\Gamma_1 + \Gamma_2) \cos u + (a\Gamma_2 - \Gamma_1) \sin u] + \gamma_1 \cdot \frac{d\eta}{du}, \ldots .(100)$$

то, для опредѣленія постоянныхъ Γ_1 и Γ_2, мы, на основаніи уравненій (79) и (100), будемъ имѣть слѣдующія два соотношенія:

$$y_1 + \rho_0 = \Gamma_1 + (\eta)_{u=0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (101)$$

и

$$0 = a\Gamma_1 + \Gamma_2 + \left(\frac{d\eta}{du}\right)_{u=0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (102)$$

Остается теперь опредѣлить $(\eta)_{u=0}$ и $\left(\frac{d\eta}{du}\right)_{u=0}$.

Изъ уравненія (99) мы имѣемъ

$$\frac{d\eta}{du} = \frac{\xi}{\gamma_1^2}\Big[(y_1+\rho_0)^2 \frac{e^{2au}}{(1+a^2)(9+a^2)}\{A(2a\chi(u)+\chi'(u))+B(2a\Omega(u)+\Omega'(u))-2a(9+a^2)\nu^2\}$$
$$+(y_1+\rho_0)e^{au}\{C(a\varphi(u)+\varphi'(u))+D(a\psi(u)+\psi'(u))\}\Big] \ldots\ldots\ldots\ldots (103)$$

Положимъ теперь въ формулахъ (99) и (103) $u = 0$.

Но для этого найдемъ сначала выраженія для

$$\chi'(u),\ \ \Omega'(u),\ \ \varphi'(u) \text{ и } \psi'(u).$$

На основаніи выраженій (85), (86) и (87) мы будемъ имѣть:

$$\chi_0'(u) = -6 \sin u \cos u$$
$$\chi_1'(u) = -4(\cos^2 u - \sin^2 u)$$
$$\chi_2'(u) = \quad 2 \sin u \cos u.$$

Слѣдовательно, согласно формулѣ (84),

$$\chi'(u) = -6 \sin u \cos u - 4(\cos^2 u - \sin^2 u)\, a + 2 \sin u \cos u \,.\, a^2$$

и

$$\chi'(o) = -4a.$$

Точно также найдемъ, (см. формулы (90), (91), (92) и (89)),

$$\Omega'(u) = -3(\cos^2 u - \sin^2 u) + 8 \sin u \cos u \,.\, a + (\cos^2 u - \sin^2 u)\, a^2$$

и

$$\Omega'(o) = -3 + a^2.$$

Далѣе, на основаніи формулъ (95) и (97), мы имѣемъ

$$\varphi'(u) = \frac{1}{2}[\cos u - \cos u + u \sin u] = \frac{1}{2} u \sin u$$

и

$$\varphi'(o) = 0,$$

а также

$$\psi'(u) = \frac{1}{2}[u \cos u + \sin u]$$

и

$$\psi'(o) = 0.$$

Съ другой стороны, на основаніи тѣхъ-же соотношеній,

$$\chi(o) = 6$$

$$\Omega(o) = -2a$$

$$\varphi(o) = 0$$

$$\psi(o) = 0.$$

Положивши теперь въ уравненіяхъ (99) и (103) $u = 0$ и подставивъ всѣ найденныя значенія для функцій χ, Ω и пр., будемъ имѣть

$$(\eta)_{u=0} = \frac{\xi}{\gamma_1^2}\left[(y_1+\rho_0)^2 \frac{1}{(1+a^2)(9+a^2)}\{6A - 2aB - (9+a^2)\nu^2\} - \frac{1}{1+a^2}\nu^2 \rho_0^2\right] \dots (104)$$

и

$$\left(\frac{d\eta}{du}\right)_{u=0} = \frac{\xi}{\gamma_1^2}\left[(y_1+\rho_0)^2 \frac{1}{(1+a^2)(9+a^2)}\{A(12a - 4a) + B(-4a^2 - 3 + a^2) - 2a(9+a^2)\nu^2\}\right]$$

или

$$\left(\frac{d\eta}{du}\right)_{u=0} = \frac{\xi}{\gamma_1^2}(y_1+\rho_0)^2 \cdot \frac{1}{(1+a^2)(9+a^2)} \cdot \{8aA - 3(1+a^2)B - 2a(9+a^2)\nu^2\} \dots (105)$$

Введемъ теперь, для сокращенія письма, слѣдующія обозначенія:

$$\left.\begin{aligned}&\sigma = \frac{(y_1 + \rho_0)^2}{(1 + a^2)(9 + a^2)}\\&A_1 = 6A - 2aB - (9 + a^2)\nu^2\\&B_1 = 8aA - 3(1 + a^2)B - 2a(9 + a^2)\nu^2\\ \text{и}\quad&\nu_1{}^2 = \frac{1}{1 + a^2}\nu^2\rho_0{}^2.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(106)$$

Тогда

$$(\eta)_{u=0} = \frac{\xi}{\gamma_1{}^2}\{\sigma A_1 - \nu_1{}^2\}$$

и

$$\left(\frac{d\eta}{du}\right)_{u=0} = \frac{\xi}{\gamma_1{}^2}\ \sigma B_1.$$

Подставляя эти величины въ формулы (101) и (102), получимъ

$$\Gamma_1 = (y_1 + \rho_0) - \frac{\xi}{\gamma_1{}^2}(\sigma A_1 - \nu_1{}^2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(107)$$

и

$$\Gamma_2 = -a\Gamma_1 - \left(\frac{d\eta}{du}\right)_{u=0} = -a(y_1 + \rho_0) + \frac{\xi}{\gamma_1{}^2}(\sigma a A_1 - a\nu_1{}^2 - \sigma B_1)\ldots.(108)$$

Постоянныя Γ_1 и Γ_2, такимъ образомъ, найдены.

Вернемся теперь къ формулѣ (79)

$$y + \rho_0 = e^{au}[\Gamma_1 \cos u + \Gamma_2 \sin u] + \eta\ \ldots\ldots\ldots\ldots(79)$$

и найдемъ слѣдующую максимальную ординату y_2, когда $\frac{dy}{dt} = \gamma_1 \frac{dy}{du} = 0$.

Изъ уравненія (79) слѣдуетъ

$$\begin{aligned}\frac{dy}{du} &= e^{au}[a\Gamma_1 \cos u + a\Gamma_2 \sin u - \Gamma_1 \sin u + \Gamma_2 \cos u] + \frac{d\eta}{du}\\&= e^{au}[(a\Gamma_1 + \Gamma_2)\cos u + (a\Gamma_2 - \Gamma_1)\sin u] + \frac{d\eta}{du}.\end{aligned}$$

Изъ формулы-же (108) мы имѣемъ

$$a\Gamma_1 + \Gamma_2 = -\left(\frac{d\eta}{du}\right)_{u=0}.$$

Слѣдовательно, положивши $\frac{dy}{du} = 0$, получимъ

$$\sin u = \frac{1}{a\Gamma_2 - \Gamma_1}\left[\left(\frac{d\eta}{du}\right)_{u=0} . \cos u - e^{-au}\frac{d\eta}{du}\right].$$

Но, такъ какъ, согласно формулѣ (99), η пропорціонально ξ, то мы можемъ это уравненіе представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\sin u = \xi F(u) \dots\dots\dots\dots\dots\dots (109)$$

Видъ этой функціи $F(u)$ намъ нѣтъ надобности ближе опредѣлять.

Приближенный (при $\xi = 0$), искомый корень этого уравненія будетъ

$$u_0 = \pi.$$

Болѣе-же точный корень мы можемъ представить такъ:

$$u_0 = \pi + \delta . \xi,$$

гдѣ δ есть нѣкоторая постоянная величина.

Подставивъ эту величину въ формулу (109), мы могли-бы опредѣлить значеніе δ, но это, какъ мы сейчасъ увидимъ, вовсе не требуется.

Подставляя эту величину для u_0 въ формулу (79), мы будемъ имѣть, съ точностью до величинъ порядка ξ^2,

$$\begin{aligned}(y_2 + \rho_0) &= e^{a(\pi+\delta\xi)}\left[\Gamma_1 \cos(\pi + \delta\xi) + \Gamma_2 \sin(\pi + \delta\xi)\right] + (\eta)_{u=\pi} \\ &= e^{a\pi}(1 + a\delta\xi)\left[-\Gamma_1 - \Gamma_2\delta\xi\right] + (\eta)_{u=\pi} \\ &= e^{a\pi}\left[-\Gamma_1 - \delta\xi(\Gamma_2 + a\Gamma_1)\right] + (\eta)_{u=\pi}.\end{aligned}$$

Но, согласно формулѣ (108), $\Gamma_2 + a\Gamma_1$ пропорціонально ξ, а потому, съ точностью до тѣхъ-же величинъ порядка ξ^2,

$$(y_2 + \rho_0) = -\Gamma_1 e^{a\pi} + (\eta)_{u=\pi} \dots\dots\dots (110)$$

Остается теперь только вычислить $(\eta)_{u=\pi}$.

На основаніи ранѣе приведенныхъ соотношеній, мы будемъ имѣть

$$\chi_0(\pi) = 6$$

$$\chi_1(\pi) = 0$$

$$\chi_2(\pi) = 0;$$

слѣдовательно,

$$\chi(\pi) = 6.$$

$$\omega_0(\pi) = 0$$

$$\omega_1(\pi) = -2$$

$$\omega_2(\pi) = 0;$$

слѣдовательно,

$$\Omega(\pi) = -2a.$$

$$\varphi(\pi) = \frac{1}{2}\pi$$

$$\psi(\pi) = 0.$$

Подставляя эти величины въ формулу (99), мы получимъ

$$(\eta)_{u=\pi} = \frac{\xi}{\gamma_1^2}\Big[(y_1 + \rho_0)^3 \frac{e^{2a\pi}}{(1+a^2)(9+a^2)}\{6A - 2aB - (9+a^2)\nu^2\}$$

$$+ \frac{1}{2}(y_1 + \rho_0)\, e^{a\pi} . \pi C - \frac{1}{1+a^2}\nu^2 \rho_0^2\Big]$$

или, согласно обозначеніямъ (106),

$$(\eta)_{u=\pi} = \frac{\xi}{\gamma_1^2}\Big[\sigma . A_1 e^{2a\pi} + \frac{1}{2}\pi C . (y_1 + \rho_0)\, e^{a\pi} - \nu_1^2\Big].$$

Подставимъ теперь эту величину для $(\eta)_{u=\pi}$ и выраженіе для Γ_1 изъ формулы (107) въ формулу (110).

Тогда

$$(y_2+\rho_0) = -\Big[(y_1+\rho_0) - \frac{\xi}{\gamma_1^2}(\sigma A_1 - \nu_1^2)\Big] e^{a\pi} + \frac{\xi}{\gamma_1^2}\Big[\sigma A_1 e^{2a\pi} + \frac{1}{2}\pi C(y_1+\rho_0)\, e^{a\pi} - \nu_1^2\Big]$$

или

$$(y_2+\rho_0) = -(y_1+\rho_0)\, e^{a\pi} + \frac{\xi}{\gamma_1^2}\Big[\sigma A_1 e^{2a\pi} + \Big\{\frac{1}{2}\pi C(y_1+\rho_0) + \sigma A_1 - \nu_1^2\Big\} e^{a\pi} - \nu_1^2\Big] \ldots (111)$$

Въ этой формулѣ ρ_0 и ξ входятъ какъ двѣ малыя величины.

Знакъ (—) передъ первымъ членомъ въ правой части предыдущаго равенства показываетъ, что ордината y_2 отрицательна, такъ какъ точка B (см. чертежъ 144) лежитъ ниже оси временъ.

Условимся теперь, какъ и раньше, считать всѣ измѣренныя ординаты положительными. Тогда въ уравненіи (111) надо подставить, вмѣсто y_2, $-y_2$.

Съ другой стороны, мы знаемъ, что между точками A и B кривой $\rho_0 < 0$, такъ какъ $\frac{dy}{dt} < 0$.

Соотвѣтственно этому положимъ

$$\rho = -\rho_0,$$

понимая всегда подъ ρ положительную величину.

Тогда уравненіе (111) представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$y_2 + \rho = (y_1 - \rho)\, e^{a\pi} - \frac{\xi}{\gamma_1^2}\left[\sigma A_1\, e^{2a\pi} + \left\{\frac{1}{2}\pi C(y_1-\rho) + \sigma A_1 - \nu_1^2\right\} e^{a\pi} - \nu_1^2\right] \ldots (112)$$

Въ этой общей формулѣ пренебрежемъ теперь членами порядка ρ^2 и $\rho\xi$.

Тогда, принимая во вниманіе, что, согласно третьей изъ формулъ (67), C пропорціонально ρ_0, а ν_1^2 пропорціонально ρ_0^2 (см. четвертую изъ формулъ (106)), мы будемъ имѣть

$$(y_2 + \rho) = (y_1 - \rho)\, e^{a\pi} - \frac{\xi}{\gamma_1^2}\sigma A_1 \left[e^{2a\pi} + e^{a\pi}\right]$$

или, подставляя сюда значеніе σ изъ первой изъ формулъ (106) и отбрасывая члены порядка $\rho\xi$,

$$(y_2 + \rho) = (y_1 - \rho)\, e^{a\pi} - \frac{\xi}{\gamma_1^2}\cdot\frac{y_1^2}{(1+a^2)(9+a^2)}\cdot A_1\left[e^{2a\pi} + e^{a\pi}\right].$$

Введемъ теперь такое обозначеніе

$$\mathfrak{A} = \frac{A_1}{\gamma_1^2 (1+a^2)(9+a^2)}. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (113)$$

Тогда мы будемъ имѣть

$$(y_2 + \rho) = (y_1 - \rho)\, e^{a\pi} - \xi \mathfrak{A}\, y_1^2\left[e^{2a\pi} + e^{a\pi}\right] \ldots\ldots (114)$$

Здѣсь y_1, y_2 и ρ суть величины *положительныя.*

Выяснимъ себѣ теперь, что представляетъ собою величина $e^{a\pi}$.

Для этого подставимъ сюда значеніе a изъ формулы (71).

Тогда

$$e^{a\pi} = e^{-\pi\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}}.$$

Сравнивая это выраженіе съ формулой (12) предшествующаго параграфа, мы видимъ, что

$$e^{-a\pi} = e^{\pi\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}}$$

представляетъ собою *истинный* коеффиціентъ затуханія прибора, который получился-бы, если-бы основное дифференціальное уравненіе движенія сейсмографа сохранило-бы свою каноническую форму, т.-е. если-бы ρ и ξ были равны нулю. Эту величину мы обозначимъ черезъ v.

Итакъ,

$$e^{a\pi} = \frac{1}{v} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (115)$$

По существу дѣла, v должно быть величиной постоянной.

При треніи-же пера о закопченную бумагу, дѣйствительное отношеніе *абсолютныхъ* величинъ двухъ смежныхъ ординатъ будетъ отличаться нѣсколько отъ v.

Положимъ вообще

$$v_k = \frac{y_k}{y_{k+1}}, \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (116)$$

гдѣ v_k, при треніи, есть уже величина перемѣнная.

Согласно обозначенію (116),

$$\frac{y_1}{y_2} = v_1$$

или

$$y_2 = \frac{1}{v_1} y_1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (117)$$

Раздѣлимъ теперь уравненіе (114) на $(y_2 + \rho)$ и подставимъ въ него значеніе $e^{a\pi}$ изъ формулы (115).

Тогда мы получимъ

$$1 = \frac{y_1}{y_2} \cdot \frac{1 - \frac{\rho}{y_1}}{1 + \frac{\rho}{y_2}} \cdot \frac{1}{v} - \xi\mathfrak{A} \frac{y_1^2}{y_2\left(1 + \frac{\rho}{y_2}\right)} \left[\frac{1}{v^2} + \frac{1}{v}\right].$$

ρ очень малая величина; а потому, исключая случай весьма малыхъ ординатъ y_k (примѣрно, $y_k < 4$ м/м) и пренебрегая членами порядка ρ^2 и $\rho\xi$, будемъ имѣть

$$v^2 = \frac{y_1}{y_2}\left\{1 - \left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2}\right)\rho\right\} v - \xi\mathfrak{A}\frac{y_1^2}{y_2} \cdot v - \xi\mathfrak{A}\frac{y_1^2}{y_2}.$$

Подставляя сюда значенiе y_2 изъ формулы (117), получимъ

$$v^2 = v_1 \left\{1 - \frac{1}{y_1}(v_1 + 1)\rho\right\} v - \xi\mathfrak{A}y_1 v_1 v - \xi\mathfrak{A}y_1 v_1.$$

Введемъ теперь на время такiя обозначенiя:

и

$$\left.\begin{aligned} p &= v_1\left\{1 - \frac{1}{y_1}(v_1 + 1)\rho\right\} \\ q &= \xi\mathfrak{A}y_1 v_1. \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots (118)$$

Тогда предыдущее уравненiе напишется въ слѣдующемъ видѣ:

$$v^2 - (p - q)v + q = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (119)$$

Итакъ, истинная величина коеффицiента затуханiя v будетъ корнемъ этого квадратнаго уравненiя.

Слѣдовательно,

$$v = \frac{p - q}{2} \pm \sqrt{\frac{(p - q)^2 - 4q}{4}}$$

или, принимая во вниманiе, что само q есть малая величина порядка ξ,

$$v = \frac{1}{2}\left[(p - q) \pm (p - q)\left\{1 - \frac{4q}{(p - q)^2}\right\}^{\frac{1}{2}}\right],$$

или еще

$$v = \frac{1}{2}\left[(p - q) \pm (p - q)\left\{1 - \frac{2q}{p^2}\right\}\right].$$

Въ этой формулѣ надо, очевидно, взять знакъ $+$, потому что v не обращается въ нуль вмѣстѣ съ q.

Итакъ,

$$v = \frac{1}{2}(p - q)\left[2 - \frac{2q}{p^2}\right] = p - q - \frac{q}{p} = p - \frac{1 + p}{p}q.$$

Подставивъ сюда значенiя p и q изъ выраженiй (118) и пренебрегая членомъ порядка $\xi\rho$, будемъ имѣть

$$v = v_1 - \frac{1}{y_1}v_1(v_1 + 1)\rho - \frac{1 + v_1}{v_1}\cdot\xi\mathfrak{A}y_1 v_1$$

или, окончательно,

$$v + \frac{1}{y_1} v_1 (v_1 + 1) \rho + y_1 (v_1 + 1) \mathfrak{A}\xi = v_1 \ldots\ldots\ldots (120)$$

Формула (120), очевидно, относится къ *любой* парѣ смежныхъ ординатъ, потому что мы совершенно условно считали первую ординату y_1 положительной, а вторую отрицательной.

Итакъ, въ общемъ случаѣ, обозначая черезъ y_k любую ординату, и разсматривая $\mathfrak{A}\xi$, въ виду того, что $\mathfrak{A}$ не зависитъ, ни отъ величинъ ординатъ, ни отъ v_k, какъ новую перемѣнную ζ,

$$\zeta = \mathfrak{A}\xi, \ldots\ldots\ldots\ldots (121)$$

и принимая еще во вниманіе соотношеніе (116), будемъ окончательно имѣть

$$v + b_k \rho + c_k \zeta = v_k, \ldots\ldots\ldots\ldots (122)$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{y_k} \cdot v_k (v_k + 1) \\ c_k &= y_k (v_k + 1) \\ v_k &= \frac{y_k}{y_{k+1}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (123)$$

и

Формула (122) и служитъ основаніемъ для опредѣленія истиннаго коэффиціента затуханія прибора v и двухъ коэффиціентовъ тренія ρ и ξ, которые представляютъ собою двѣ малыя величины.

При уменьшеніи y_k, коэффиціентъ c_k уменьшается, а b_k возрастаетъ, а, такъ какъ опытъ показываетъ, что ρ и ξ оба положительны, и, кромѣ того, какъ мы сейчасъ увидимъ, $\mathfrak{A} < 0$, то, съ уменьшеніемъ амплитуды y_k, v_k, т.-е. отношеніе абсолютныхъ величинъ двухъ смежныхъ максимальныхъ амплитудъ, постепенно возрастаетъ, что и подтверждается непосредственными наблюденіями.

Если ξ было-бы равно нулю, то мы имѣли-бы

$$v + b_k \rho = v_k \ldots\ldots\ldots\ldots (124)$$

Эта формула вытекаетъ непосредственно изъ приближенной формулы (32) предыдущаго §, по которой, для не слишкомъ малыхъ зна-

ченій y_k,

$$v=\frac{y_k-\rho}{y_{k+1}+\rho}=\frac{y_k}{y_{k+1}}\cdot\frac{1-\frac{\rho}{y_k}}{1+\frac{\rho}{y_{k+1}}}$$

$$=v_k\left[1-\rho\left(\frac{1}{y_k}+\frac{1}{y_{k+1}}\right)\right]$$

$$=v_k\left[1-\rho\frac{1}{y_k}(v_k+1)\right]$$

или

$$v+\frac{1}{y_k}\cdot v_k(v_k+1)\,\rho=v_k.$$

Остается теперь только опредѣлить значеніе коеффиціента $\mathfrak{A}$.

Обратимся для этого къ формулѣ (113), подставивъ въ нее выраженіе A_1 изъ второй изъ формулъ (106) и замѣнивъ значеніе a соотвѣтствующей величиной изъ формулы (71) $\left(a=-\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right)$.

Тогда

$$\mathfrak{A}=\frac{\gamma_1^2}{(\gamma_1^2+\varepsilon_1^2)(9\gamma_1^2+\varepsilon_1^2)}\left[6A+2\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}B-\frac{1}{\gamma_1^2}(9\gamma_1^2+\varepsilon_1^2)\,\nu^2\right].$$

Подставимъ теперь сюда значенія A и B изъ формулъ (67).

Тогда мы получимъ

$$\mathfrak{A}=\frac{\gamma_1^2}{(\gamma_1^2+\varepsilon_1^2)(9\gamma_1^2+\varepsilon_1^2)}\left[-6\frac{(\nu\varepsilon_1-n_1^2)^2-\nu^2\gamma_1^2}{\gamma_1^2}-2\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\cdot 2\nu\frac{\nu\varepsilon_1-n_1^2}{\gamma_1}-\frac{1}{\gamma_1^2}(9\gamma_1^2+\varepsilon_1^2)\,\nu^2\right]$$

$$=-\frac{1}{(\gamma_1^2+\varepsilon_1^2)(9\gamma_1^2+\varepsilon_1^2)}\left[6(\nu\varepsilon_1-n_1^2)^2-6\nu^2\gamma_1^2+4\nu\varepsilon_1(\nu\varepsilon_1-n_1^2)+9\nu^2\gamma_1^2+\nu^2\varepsilon_1^2\right]$$

$$=-\frac{1}{(\gamma_1^2+\varepsilon_1^2)(9\gamma_1^2+\varepsilon_1^2)}\left[6\nu^2\varepsilon_1^2-12\nu\varepsilon_1 n_1^2+6n_1^4-6\nu^2\gamma_1^2+4\nu^2\varepsilon_1^2-4\nu\varepsilon_1 n_1^2\right.$$
$$\left.+9\nu^2\gamma_1^2+\nu^2\varepsilon_1^2\right]$$

$$=-\frac{1}{(\gamma_1^2+\varepsilon_1^2)(9\gamma_1^2+\varepsilon_1^2)}\left[6n_1^4-16\varepsilon_1 n_1^2\nu+(3\gamma_1^2+11\varepsilon_1^2)\,\nu^2\right].$$

Принимая теперь во вниманіе, что, согласно формулѣ (65),

$$\gamma_1^2=n_1^2-\varepsilon_1^2,$$

и вводя, согласно соотношеніямъ (9) и (10), обозначеніе

$$\mu_1^2=1-\frac{\varepsilon_1^2}{n_1^2},\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(125)$$

будемъ имѣть

$$\varepsilon_1 = n_1 \sqrt{1 - \mu_1^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (126)$$

и

$$\gamma_1 = n_1 \mu_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (127)$$

Коеффиціентъ μ_1 характеризуетъ собою степень затуханія прибора.

Подставивъ теперь эти значенія для ε_1 и γ_1 въ предыдущее выраженіе для $\mathfrak{A}$, получимъ окончательно

$$\mathfrak{A} = -\frac{1}{n_1^4 (1 + 8\mu_1^2)} \left[6n_1^4 - 16n_1^3 \sqrt{1 - \mu_1^2} \,.\, \nu + n_1^2 (11 - 8\mu_1^2) \nu^2\right]$$

или

$$\mathfrak{A} = -\frac{1}{(1 + 8\mu_1^2)} \left[6 - 16 \sqrt{1 - \mu_1^2} \cdot \frac{\nu}{n_1} + (11 - 8\mu_1^2) \frac{\nu^2}{n_1^2}\right] \ldots (128)$$

Таково общее выраженіе для $\mathfrak{A}$, гдѣ, согласно формулѣ (53), $\nu = \frac{\lambda}{b}$. $\frac{\nu}{n_1}$ есть всегда малая величина, такъ какъ длина одной секунды λ на регистрирномъ валѣ всегда очень мала.

$\mathfrak{A}$ является множителемъ у малой величины ξ (см. формулу (121)), а потому мы можемъ, съ вполнѣ достаточнымъ приближеніемъ, положить

$$\mathfrak{A} = -\frac{6}{1 + 8\mu_1^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (129)$$

Какъ видно $\mathfrak{A}$ есть величина отрицательная.

Если маятникъ совершенно лишенъ затуханія, то $\mu_1^2 = 1$ и

$$\mathfrak{A} = -\frac{2}{3}.$$

Для границы-же апериодичности ($\mu_1^2 = 0$)

$$\mathfrak{A} = -6.$$

Таковы предѣлы для коеффиціента $\mathfrak{A}$.

Посмотримъ теперь, какъ надо пользоваться уравненіемъ (122).

Установивъ маятникъ на весьма слабое затуханіе, раздвинувъ магниты и соединивъ полюсы каждаго изъ нихъ между собою желѣзной пластинкой, снимаютъ кривую собственнаго движенія прибора, и измѣряютъ затѣмъ цѣлый рядъ максимальныхъ ординатъ $y_1, y_2 \ldots y_i$.

При этомъ скорость вращенія барабана должна быть такая-же, какъ и при самыхъ сейсмическихъ наблюденіяхъ.

Тогда мы получимъ слѣдующую группу уравненій:

$$\left.\begin{array}{l} v+b_1\rho+c_1\zeta=v_1 \\ v+b_2\rho+c_2\zeta=v_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ v+b_i\rho+c_i\zeta=v_i \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots(130)$$

Беремъ среднее ариѳметическое этихъ уравненій и, соотвѣтственно этому, полагая

$$b_m=\frac{b_1+b_2+\dots+b_i}{i}$$

$$c_m=\frac{c_1+c_2+\dots+c_i}{i}$$

$$v_m=\frac{v_1+v_2+\dots+v_i}{i},$$

будемъ имѣть

$$v+b_m\rho+c_m\zeta=v_m\dots\dots\dots\dots\dots(131)$$

Вычитая это уравненіе изъ каждаго изъ уравненій (130), получимъ:

$$\left.\begin{array}{l} (b_1-b_m)\rho+(c_1-c_m)\zeta=(v_1-v_m) \\ (b_2-b_m)\rho+(c_2-c_m)\zeta=(v_2-v_m) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (b_i-b_m)\rho+(c_i-c_m)\zeta=(v_i-v_m) \end{array}\right\} \dots\dots\dots(132)$$

Въ эти уравненія входятъ уже только двѣ неизвѣстныя ρ и ζ.

Рѣшая эту систему уравненій по способу наименьшихъ квадратовъ, найдемъ вѣроятнѣйшія значенія для ρ и ζ.

Опредѣливъ ρ и ζ и подставляя ихъ въ уравненіе (131), найдемъ и соотвѣтствующую величину v.

Для опредѣленія неизвѣстной ξ, обращаемся къ формулѣ (121):

$$\xi=\frac{\zeta}{\mathfrak{A}}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(133)$$

Опытъ показываетъ, что ζ, въ огромномъ большинствѣ случаевъ, отрицательно, а, такъ какъ $\mathfrak{A}$, согласно формулѣ (129), само отрицательно, то ξ будетъ величиной положительной.

Въ выраженіе коэффиціента $\mathfrak{A}$ входитъ величина μ_1^2. Ее легко найти по извѣстной уже величинѣ v.

Согласно соотношенію (12),

$$v = e^{\pi \frac{\sqrt{1-\mu_1^2}}{\mu_1}};$$

слѣдовательно,

$$\mu_1^2 = \frac{\pi^2}{\pi^2 + (\log v)^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\pi \operatorname{Lg}_{10} e}\right)^2 \Lambda^2} = \frac{1}{1 + 0{,}53720\,\Lambda^2}, \quad \ldots\ldots (134)$$

гдѣ $\Lambda = \operatorname{Lg}_{10} v$ представляетъ собою обыкновенный логариѳмическій декрементъ.

Для вычисленія μ_1^2, можно воспользоваться таблицей IX Сборника сейсмометрическихъ таблицъ, гдѣ непосредственно даны величины

$$\operatorname{Lg}\sqrt{1 + 0{,}53720\,\Lambda^2}.$$

Когда ρ и ξ уже опредѣлены, устанавливаютъ то затуханіе, которое желательно для сейсмическихъ наблюденій (напр., $v = 4$ или 5), и снова снимаютъ кривую собственнаго движенія сейсмографа.

Теперь число измѣренныхъ максимальныхъ ординатъ будетъ уже значительно меньше.

По приближенной, новой величинѣ v, опредѣляютъ приближенное значеніе μ_1^2 и $\mathfrak{A}$, а, слѣдовательно, по извѣстному ξ, найдемъ и соотвѣтствующее значеніе ζ (см. формулу (121)).

Тогда въ формулу (122) войдетъ лишь одна неизвѣстная v.

За окончательную величину коэффиціента затуханія возьмемъ среднее изъ полученныхъ, такимъ образомъ, значеній v.

Съ этимъ v можно перевычислить коэффиціентъ $\mathfrak{A}$ и снова опредѣлить второе значеніе для v; однако, въ виду малости ξ, этого въ большинствѣ случаевъ не требуется.

При пользованіи формулой (122), мы предполагали, что всѣ ординаты измѣрены вѣрно, въ томъ смыслѣ, что положеніе истинной нулевой линіи намъ извѣстно. Но, такъ какъ это не всегда имѣетъ мѣсто, то лучше преобразовать уравненіе (122) такъ, чтобы въ нее входили суммы абсолютныхъ значеній сосѣднихъ ординатъ

$$w_k = y_k + y_{k+1} \ldots\ldots\ldots \text{(см. формулу (37))}$$

Разовьемъ теперь уравненіе (122), принимая во вниманіе соотношенія (123).

$$v + \frac{1}{y_k} \cdot \frac{y_k}{y_{k+1}} \left(\frac{y_k}{y_{k+1}} + 1 \right) \rho + y_k \left(\frac{y_k}{y_{k+1}} + 1 \right) \zeta = \frac{y_k}{y_{k+1}}$$

или

$$y_{k+1} \cdot v + \frac{y_k + y_{k+1}}{y_{k+1}} \cdot \rho + y_k (y_k + y_{k+1}) \zeta = y_k.$$

Вводя обозначеніе (37), получимъ

$$y_{k+1} \cdot v + \frac{w_k}{y_{k+1}} \rho + y_k w_k \zeta = y_k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (135)$$

Точно также будемъ имѣть

$$y_{k+2} \cdot v + \frac{w_{k+1}}{y_{k+2}} \rho + y_{k+1} \cdot w_{k+1} \zeta = y_{k+1} \quad \ldots\ldots\ldots (136)$$

Складывая уравненія (135) и (136), получимъ

$$w_{k+1} \cdot v + \left(\frac{w_k}{y_{k+1}} + \frac{w_{k+1}}{y_{k+2}} \right) \rho + (y_k w_k + y_{k+1} w_{k+1}) \zeta = w_k.$$

Раздѣливъ это уравненіе на w_{k+1} и вводя слѣдующія обозначенія:

$$B_k = \frac{1}{w_{k+1}} \left\{ \frac{w_k}{y_{k+1}} + \frac{w_{k+1}}{y_{k+2}} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (137)$$

$$C_k = \frac{1}{w_{k+1}} \left\{ y_k w_k + y_{k+1} w_{k+1} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (138)$$

и

$$m_k = \frac{w_k}{w_{k+1}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (139)$$

гдѣ

$$w_k = y_k + y_{k+1},$$

будемъ окончательно имѣть

$$v + B_k \rho + C_k \zeta = m_k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (140)$$

Въ выраженіе m_k входятъ только *суммы* двухъ смежныхъ ординатъ, а потому на величину m_k не вліяетъ вовсе положеніе нулевой линіи.

Что-же касается коеффиціентовъ B_k и C_k, то, хотя въ нихъ и входятъ, кромѣ величинъ w_k и w_{k+1}, еще абсолютныя величины самихъ ординатъ y_k, y_{k+1} и y_{k+2}, но это обстоятельство не имѣетъ существеннаго значенія, такъ B_k и C_k являются коеффиціентами при двухъ малыхъ величинахъ ρ и ζ,

а потому небольшая погрѣшность въ величинахъ этихъ коэффиціентовъ не можетъ существеннымъ образомъ отразиться на окончательномъ результатѣ вычисленій.

Съ уравненіемъ (140) надо поступать совершенно по тому-же пріему, какой былъ указанъ для уравненія (122).

Сначала опредѣляютъ, при слабомъ затуханіи прибора, наивѣроятнѣйшія значенія ρ и ξ.

Потомъ уже устанавливаютъ приборъ на требуемое, сильное затуханіе, опредѣляютъ $\mathfrak{A}$ и $\zeta = \mathfrak{A}\xi$, а затѣмъ уже, по формулѣ (140), находятъ величину окончательнаго коэффиціента затуханія v. Для этой послѣдней цѣли (при сильномъ затуханіи) достаточно измѣрить только три ординаты y_1, y_2 и y_3, руководствуясь, однако, тѣмъ, чтобы y_3 было-бы больше 4 м/м.

Такимъ образомъ, при опредѣленіи постоянныхъ тренія ρ и ξ и окончательной величины коэффиціента затуханія v, предпочтительнѣе пользоваться уравненіемъ (140), взамѣнъ уравненія (122).

Вышеописанная теорія подверглась въ Физической Лабораторіи Академіи Наукъ экспериментальной провѣркѣ.

Приведемъ нѣкоторыя данныя.

Какъ было раньше указано, при изложеніи элементарной теоріи механической регистраціи, не учитывающей вліяніе поправочнаго члена ξ, ρ и v не остаются постоянными.

Такъ въ одномъ случаѣ получились, напримѣръ, такія числа:

y_k	ρ
49 м/м	1,3 м/м
25	0,5
12	0,3
6	0,2

w_k	v	v_k
154,9 м/м		
		1,91
81,2	1,82	
		2,00
40,7	1,93	
		2,07
19,7	1,96	
		2,19
9,0	2,06	
		2,37
3,8		

Такимъ образомъ, мы видимъ, что, даже учитывая поправку на ρ, v не остается постояннымъ, а увеличивается съ уменьшеніемъ амплитудъ, не говоря уже о v_k, которое представляло-бы собою коеффиціентъ затуханія, если не было-бы возмущающаго вліянія тренія пера, и которое очень сильно возрастаетъ съ уменьшеніемъ амплитудъ.

Для провѣрки болѣе строгой теоріи, принимающей во вниманіе добавочную поправку на ξ, въ частности для провѣрки формулы (122), были сняты нѣсколько кривыхъ собственнаго движенія ранѣе описаннаго тяжелаго горизонтальнаго маятника (см. главу IV § 3), и соотвѣтствующіе результаты наблюденій были затѣмъ обработаны по способу наименьшихъ квадратовъ (для трехъ неизвѣстныхъ v, ρ и ζ). Вычисляемыя по этому способу среднія ошибки неизвѣстныхъ даютъ хорошій критерій для сужденія о томъ, насколько эти величины дѣйствительно остаются постоянными.

Въ этомъ случаѣ уже оказалось, что v и ρ, въ предѣлахъ ошибокъ наблюденій, дѣйствительно являются величинами постоянными, какъ то можно видѣть изъ слѣдующихъ данныхъ.

I-ая кривая.

k	y_k	v_k	
1	39,75 м/м	1,230	$\Delta v_k = 0,175$
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	
9	5,55	1,405	
10	3,95		

Примѣняя формулу (122), получилось:

		Ошибка въ %
$v = 1,248$	$\pm 0,013$	1,0%
$\rho = +0,278$ м/м	$\pm 0,024$ м/м	8,6%
$\zeta = -0,000472$	$\pm 0,00017$	36,0%.

II-ая кривая.

k	y_k	v_k	
1	51,49 м/м	1,0345	$\Delta v_k = 0,1710$
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	
37	4,57	1,2055	
38	3,79		

			Ошибка въ %
$v =$	$1{,}0429$	$\pm 0{,}0021$	0,2%
$\rho =$	$+0{,}299\ ^{м}/_{м}$	$\pm 0{,}0057\ ^{м}/_{м}$	1,9%
$\zeta =$	$-0{,}000221$	$\pm 0{,}0000257$	11,6%.

Перейдемъ теперь къ случаю болѣе сильнаго тренія пера о закопченную бумагу.

III-ья кривая.

k	y_k	
1	41,19 $^{м}/_{м}$	1
. . . .	. . . .	
8	8,30	
9	5,10	

$$v = 1{,}363 \pm 0{,}072$$

$$\rho = +0{,}683\ ^{м}/_{м} \pm 0{,}134\ ^{м}/_{м}$$

$$\zeta = -0{,}00329 \pm 0{,}00091$$

IV-ая кривая.

k	y_k	v
1	71,28 $^{м}/_{м}$	1,(
. . . .	. . . .	.
14	8,60	1,
15	4,65	

$$v = 1{,}094 \pm 0{,}023$$

$$\rho = +1{,}279\ ^{м}/_{м} \pm 0{,}052\ ^{м}/_{м}$$

$$\zeta = -0{,}000359 \pm 0{,}00020$$

Среднія ошибки v и ρ получаются вообще очень маленькія.

Если ошибка ζ и получается относительно болѣе значительной, то это обстоятельство не имѣетъ большого практическаго значенія, такъ какъ ζ или ξ входитъ въ основное уравненіе лишь какъ малый поправочный членъ.

Этихъ четырехъ примѣровъ достаточно, чтобы видѣть всю пользу введенія въ основное дифференціальное уравненіе движенія сейсмографа поправочнаго члена, содержащаго множителемъ ξ.

Конечно, изложенная здѣсь теорія никоимъ образомъ не можетъ считаться строгой теоріей; она является, по сравненію съ элементарной теоріей, лишь только *вторымъ приближеніемъ* къ истинѣ.

Тѣмъ не менѣе мы видимъ, что величины v и ρ, получаемыя по этой теоріи, обладаютъ совершенно достаточнымъ для практическихъ цѣлей постоянствомъ, такъ какъ среднія ошибки этихъ величинъ оказываются въ общемъ весьма незначительными.

Этимъ усовершенствованнымъ пріемомъ опредѣленія постоянныхъ сейсмографа и слѣдуетъ пользоваться на сейсмическихъ станціяхъ второго разряда, гдѣ установлены приборы съ механической регистраціей.

---

§ 3.

Опредѣленіе смѣщеній почвы при максимальной фазѣ землетрясенія.

При максимальной фазѣ землетрясенія встрѣчаются, какъ мы уже знаемъ, болѣе или менѣе правильныя, гармоническія, сейсмическія волны, причемъ каждая изъ трехъ составляющихъ истиннаго смѣщенія почвы можетъ быть представлена, въ ея зависимости отъ времени, простой синусоидой.

Пусть x будетъ одна изъ такихъ составляющихъ.

Тогда мы можемъ положить

$$x = x_m \sin(pt + \delta), \qquad (141)$$

гдѣ

$$p = \frac{2\pi}{T_p}.$$

T_p есть періодъ соотвѣтствующей сейсмической волны, который, если сеймографъ снабженъ достаточно сильнымъ затуханіемъ, можетъ быть непосредственно снятъ съ сейсмограммы.

Задача состоитъ въ томъ, чтобы опредѣлить истинную, максимальную амплитуду смѣщенія почвы x_m и соотвѣтствующій моментъ t_{x_m}.

Мы уже знаемъ, какъ эта задача рѣшается при простой оптической и при гальванометрической регистраціи (см. § 4 главы X).

Изслѣдуемъ-же теперь рѣшеніе этого вопроса для механической регистраціи, при наличіи поправочныхъ членовъ на треніе пера о закопченную бумагу.

Для этого обратимся къ основному дифференціальному уравненію (62) предшествующаго параграфа.

Въ него входятъ постоянныя ε_1 и n_1, которыя сами нѣсколько зависятъ отъ тренія пера и которыя непосредственно опредѣляются изъ опыта.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ писать эти величины безъ индекса.

Тогда дифференціальное уравненіе движенія сейсмографа представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$y'' + 2\varepsilon y' + n^2(y + \rho_0) + \xi\{y' + \nu y\}^2 + \mathfrak{V}_0 x'' = 0 \; \ldots\ldots (142)$$

Величины поправокъ на треніе пера ρ_0 или ρ и ξ мы уже знаемъ, какъ опредѣлять.

Опредѣливши ихъ при слабомъ затуханіи, сближаемъ затѣмъ магниты и находимъ окончательную величину коеффиціента затуханія v. Послѣ этого, по формулѣ аналогичной формулѣ (134), находимъ величину

$$\mu^2 = \frac{\pi^2}{\pi^2 + (\log v)^2} = \frac{1}{1 + 0{,}53720\,\Lambda^2}, \; \ldots\ldots\ldots\ldots (143)$$

гдѣ

$$\Lambda = \mathrm{Log}_{10}\, v$$

и

$$\mu^2 = 1 - \frac{\varepsilon^2}{n^2} \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (144)$$

n опредѣляется изъ кривой собственнаго движенія сейсмографа по собственному періоду маятника при слабомъ затуханіи T' и по величинѣ соотвѣтствующаго логариѳмическаго декремента Λ (см. формулу (17) § 1 настоящей главы), который, въ виду малаго вліянія декремента на періодъ, достаточно опредѣлять приближенно, не вводя поправокъ на треніе пера.

Собственный періодъ маятника безъ затуханія будетъ тогда

$$T = \frac{2\pi}{n}.$$

Такимъ образомъ, всѣ постоянныя ε, n, ρ_0, ξ, ν и $\mathfrak{V}_0$, входящія въ уравненіе (142), могутъ считаться извѣстными.

Это уравненіе мы будемъ также интегрировать по методу послѣдовательныхъ приближеній.

Для этого мы положимъ сначала ρ_0 и ξ равными нулю.

Тогда, если затуханіе прибора достаточно сильное (v около 4 — 5) и время t не слишкомъ мало, то въ выраженіи общаго интеграла уравненія (142) члены, содержащіе постоянныя интегрированія и имѣющіе множителемъ $e^{-\varepsilon t}$, пропадутъ, и у насъ, согласно формулѣ (103) § 4 главы V-ой, получится

$$y = \mathfrak{V}_0 x_m \frac{1}{(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}} \cdot \sin\{p(t-\tau)+\delta\}, \ldots\ldots (145)$$

гдѣ

$$u = \frac{T_p}{T} \ldots\ldots (146)$$

$$f(u) = \left(\frac{2u}{1+u^2}\right)^2 \ldots\ldots (147)$$

$$\mathfrak{V}_0 = \frac{L}{l} \ldots\ldots (148)$$

и

$$\tau = \frac{T_p}{2\pi} \cdot \operatorname{arctg}\left\{\sqrt{1-\mu^2} \cdot \frac{2u}{u^2-1}\right\} \ldots (149)$$ (см. форм. (112) § 4 главы V-ой).

Введемъ теперь, для сокращенія, слѣдующія обозначенія:

$$A_0 = \mathfrak{V}_0 \frac{x_m}{(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}} \ldots\ldots (150)$$

и

$$\psi = pt - p\tau + \delta \ldots\ldots (151)$$

Тогда мы будемъ имѣть

$$y = A_0 \sin\psi \ldots\ldots (152)$$

На основаніи этого выраженія для y надо опредѣлить теперь значеніе $\{y' + \nu y\}^2$ и подставить его затѣмъ въ уравненіе (142).

$$y' = \frac{dy}{dt} = A_0 \cos\psi \cdot \frac{d\psi}{dt} = A_0 p \cos\psi;$$

слѣдовательно,

$$y' + \nu y = A_0 \{p\cos\psi + \nu \sin\psi\}$$

$$= A_0 \sqrt{p^2+\nu^2} \cdot \left[\frac{p}{\sqrt{p^2+\nu^2}}\cos\psi + \frac{\nu}{\sqrt{p^2+\nu^2}}\sin\psi\right].$$

Введемъ теперь еще слѣдующія обозначенія:

$$\left.\begin{aligned}\frac{p}{\sqrt{p^2+\nu^2}}&=\sin\beta\\ \frac{\nu}{\sqrt{p^2+\nu^2}}&=\cos\beta\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(153)$$

или

$$\frac{p}{\nu}=\operatorname{tg}\beta$$

и

$$A=A_0^2(p^2+\nu^2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(154)$$

Подставляя эти величины въ предыдущее уравненіе, будемъ имѣть

$$\{y'+\nu y\}^2=A\sin^2(\psi+\beta)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(155)$$

Принимая во вниманіе уравненіе (141), мы можемъ наше основное дифференціальное уравненіе (142) представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$y''+2\varepsilon y'+n^2(y+\rho_0)=\mathfrak{B}_0p^2x_m\sin(pt+\delta)-\xi A\sin^2(\psi+\beta)\ldots.(156)$$

Перемѣнная, входящая въ это уравненіе, есть $y+\rho_0$.

На основаніи предыдущихъ выводовъ и обозначеній (см. формулы (145), (150) и (151)), а также и общей интегральной формулы (68) § 3 главы V-ой, общій интегралъ уравненія (156) можетъ быть представленъ слѣдующимъ образомъ:

$$y+\rho_0=e^{-\varepsilon t}[\Gamma_1\cos\gamma t+\Gamma_2\sin\gamma t]+A_0\sin\psi+\eta,\ldots..(157)$$

гдѣ

$$\gamma=+\sqrt{n^2-\varepsilon^2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(158)$$

и

$$\eta=\xi\frac{A}{\gamma}\cdot e^{-\varepsilon t}\Big[\cos\gamma t.\int e^{\varepsilon t}\sin\gamma t.\sin^2(\psi+\beta)\,dt$$
$$-\sin\gamma t.\int e^{\varepsilon t}\cos\gamma t.\sin^2(\psi+\beta)\,dt\Big]\ldots\ldots.(159)$$

Если затуханіе прибора достаточно велико и t не слишкомъ мало, то первыми двумя членами въ правой части уравненія (157) мы можемъ, какъ и раньше, пренебречь, и тогда мы будемъ просто имѣть

$$y+\rho_0=A_0\sin\psi+\eta\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(160)$$

Вычислимъ теперь η.

Для этого введемъ слѣдующія обозначенія:

$$a=\psi+\beta=pt-p\tau+\delta+\beta \ldots (161) \text{ (см. форм. (151))}$$

$$b=\gamma t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (162)$$

$$S_1=\int e^{\varepsilon t}\sin b \sin^2 a\, dt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (163)$$

и

$$S_2=\int e^{\varepsilon t}\cos b \sin^2 a\, dt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (164)$$

Тогда, согласно формулѣ (159),

$$\eta=\xi\frac{A}{\gamma}\cdot e^{-\varepsilon t}[\cos b\,.\,S_1-\sin b\,.\,S_2] \ldots\ldots\ldots (165)$$

Опредѣлимъ теперь значенія неопредѣленныхъ интеграловъ S_1 и S_2. На основаніи извѣстныхъ формулъ тригонометріи мы имѣемъ вообще

$$\sin M.\sin N=\frac{1}{2}\{\cos(M-N)-\cos(M+N)\}$$

и

$$\sin M.\cos N=\frac{1}{2}\{\sin(M+N)+\sin(M-N)\};$$

слѣдовательно,

$$\sin b \sin^2 a=\frac{1}{2}\sin a\{\cos(a-b)-\cos(a+b)\}$$

$$=\frac{1}{4}[\sin(2a-b)+\sin b-\sin(2a+b)-\sin(-b)]$$

$$=\frac{1}{4}[2\sin b+\sin(2a-b)-\sin(2a+b)]$$

и

$$\cos b \sin^2 a=\frac{1}{2}\sin a\{\sin(a+b)+\sin(a-b)\}$$

$$=\frac{1}{4}[\cos b-\cos(2a+b)+\cos b-\cos(2a-b)]$$

$$=\frac{1}{4}[2\cos b-\cos(2a-b)-\cos(2a+b)].$$

Введемъ теперь такія обозначенія:

$$\left.\begin{aligned} G &= \int e^{\varepsilon t} \sin b\, dt \\ G_1 &= \int e^{\varepsilon t} \sin(2a - b)\, dt \\ G_2 &= \int e^{\varepsilon t} \sin(2a + b)\, dt \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (166)$$

и

$$\left.\begin{aligned} H &= \int e^{\varepsilon t} \cos b\, dt \\ H_1 &= \int e^{\varepsilon t} \cos(2a - b)\, dt \\ H_2 &= \int e^{\varepsilon t} \cos(2a + b)\, dt \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (167)$$

Тогда мы будемъ имѣть

$$S_1 = \frac{1}{4}[2G + G_1 - G_2]$$

и

$$S_2 = \frac{1}{4}[2H - H_1 - H_2],$$

а, слѣдовательно, согласно формулѣ (165),

$$\eta = \frac{1}{4}\xi\frac{A}{\gamma}\cdot e^{-\varepsilon t}[2\{G\cos b - H\sin b\} + \{G_1\cos b + H_1\sin b\}$$
$$+ \{-G_2\cos b + H_2\sin b\}] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (168)$$

Остается теперь найти выраженія шести неопредѣленныхъ интеграловъ G, G_1, G_2 и H, H_1, H_2.

Для этого обратимся къ интегральнымъ формуламъ (81) § 3 главы V-ой.

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \int e^{\varepsilon t}\cos(qt + \sigma)\, dt = \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2 + q^2}[q\sin(qt + \sigma) + \varepsilon\cos(qt + \sigma)] \\ I_2 &= \int e^{\varepsilon t}\sin(qt + \sigma)\, dt = \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2 + q^2}[\varepsilon\sin(qt + \sigma) - q\cos(qt + \sigma)] \end{aligned}\right\} \ldots (169)$$

Принимая во вниманіе обозначенія (161) и (162), мы будемъ имѣть

$$2a - b = (2p - \gamma)t - p\tau + \delta + \beta$$

и

$$2a + b = (2p + \gamma)t - p\tau + \delta + \beta.$$

Введемъ еще такія обозначенія:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= 2p - \gamma \\ q_2 &= 2p + \gamma \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (170)$$

и

Тогда

$$2a - b = q_1 t - p\tau + \delta + \beta$$

и

$$2a + b = q_2 t - p\tau + \delta + \beta.$$

Кромѣ того $b = \gamma t$.

Такимъ образомъ, на основаніи формулъ (169), мы будемъ имѣть

$$G = \int e^{\varepsilon t} \sin b \, dt = \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2 + \gamma^2} [\varepsilon \sin b - \gamma \cos b]$$

$$G_1 = \int e^{\varepsilon t} \sin (2a - b) \, dt = \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2 + q_1^2} [\varepsilon \sin (2a - b) - q_1 \cos (2a - b)]$$

$$G_2 = \int e^{\varepsilon t} \sin (2a + b) \, dt = \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2 + q_2^2} [\varepsilon \sin (2a + b) - q_2 \cos (2a + b)]$$

и

$$H = \int e^{\varepsilon t} \cos b \, dt = \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2 + \gamma^2} [\gamma \sin b + \varepsilon \cos b]$$

$$H_1 = \int e^{\varepsilon t} \cos (2a - b) \, dt = \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2 + q_1^2} [q_1 \sin (2a - b) + \varepsilon \cos (2a - b)]$$

$$H_2 = \int e^{\varepsilon t} \cos (2a + b) \, dt = \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2 + q_2^2} [q_2 \sin (2a + b) + \varepsilon \cos (2a + b)].$$

На основаніи этихъ выраженій получимъ

$$G \cos b - H \sin b = \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2 + \gamma^2} [\varepsilon \{\sin b \cos b - \cos b \sin b\} + \gamma \{-\cos^2 b - \sin^2 b\}]$$

или, принимая еще во вниманіе соотношеніе (158),

$$G \cos b - H \sin b = -\frac{\gamma}{n^2} e^{\varepsilon t}.$$

Далѣе

$$\begin{aligned} G_1 \cos b + H_1 \sin b = \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2 + q_1^2} [\varepsilon \{&\sin (2a - b) \cos b + \cos (2a - b) \sin b\} \\ &+ q_1 \{-\cos (2a - b) \cos b + \sin (2a - b) \sin b\}] \\ &= \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2 + q_1^2} \{\varepsilon \sin 2a - q_1 \cos 2a\} \end{aligned}$$

и

$$-G_2\cos b+H_2\sin b=\frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2+q_2^2}\left[\varepsilon\left\{-\sin(2a+b)\cos b+\cos(2a+b)\sin b\right\}\right.$$

$$\left.+q_2\left\{\cos(2a+b)\cos b+\sin(2a+b)\sin b\right\}\right]$$

$$=\frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2+q_2^2}\left\{-\varepsilon\sin 2a+q_2\cos 2a\right\}.$$

Подставивъ найденныя выраженія въ формулу (168), будемъ имѣть

$$\eta=\frac{1}{4}\xi\frac{A}{\gamma}\cdot\left[-\frac{2\gamma}{n^2}+\varepsilon\left\{\frac{1}{\varepsilon^2+q_1^2}-\frac{1}{\varepsilon^2+q_2^2}\right\}\sin 2a+\left\{\frac{-q_1}{\varepsilon^2+q_1^2}+\frac{q_2}{\varepsilon^2+q_2^2}\right\}\cos 2a\right].$$

Эту формулу мы можемъ представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\eta=-\frac{1}{2}\xi\frac{A}{n^2}+\frac{1}{4}\xi\frac{A}{\gamma}\cdot P,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(171)$$

гдѣ

$$P=\varepsilon\left\{\frac{1}{\varepsilon^2+q_1^2}-\frac{1}{\varepsilon^2+q_2^2}\right\}\sin 2a+\left\{\frac{-q_1}{\varepsilon^2+q_1^2}+\frac{q_2}{\varepsilon^2+q_2^2}\right\}\cos 2a\ldots.(172)$$

Преобразуемъ теперь выраженіе для P.

$$P=\frac{1}{(\varepsilon^2+q_1^2)(\varepsilon^2+q_2^2)}\left[\varepsilon(q_2^2-q_1^2)\sin 2a+(-\varepsilon^2q_1-q_1q_2^2+\varepsilon^2q_2+q_1^2q_2)\cos 2a\right]$$

$$=\frac{q_2-q_1}{(\varepsilon^2+q_1^2)(\varepsilon^2+q_2^2)}\left[\varepsilon(q_2+q_1)\sin 2a+(\varepsilon^2-q_1q_2)\cos 2a\right].$$

Далѣе изъ обозначеній (170) и (158) слѣдуетъ:

$$q_2-q_1=2\gamma$$

$$q_2+q_1=4p$$

$$q_1q_2=4p^2-\gamma^2$$

$$\varepsilon^2-q_1q_2=n^2-4p^2$$

$$\varepsilon^2+q_1^2=\varepsilon^2+4p^2-4p\gamma+\gamma^2=n^2+4p^2-4p\gamma$$

$$\varepsilon^2+q_2^2=\varepsilon^2+4p^2+4p\gamma+\gamma^2=n^2+4p^2+4p\gamma,$$

слѣдовательно,

$$(\varepsilon^2+q_1^2)(\varepsilon^2+q_2^2)=(n^2+4p^2)^2-16p^2\gamma^2.$$

Подставляя эти выраженія въ предыдущую формулу для P, будемъ имѣть

$$P = \frac{2\gamma}{(n^2 + 4p^2)^2 - 16p^2\gamma^2}[4\varepsilon p \sin 2a - (4p^2 - n^2)\cos 2a].$$

Введемъ теперь слѣдующія обозначенія:

$$\left.\begin{aligned} \sin\beta_1 &= \frac{4p^2 - n^2}{\sqrt{(4\varepsilon p)^2 + (4p^2 - n^2)^2}} \\ \cos\beta_1 &= \frac{4\varepsilon p}{\sqrt{(4\varepsilon p)^2 + (4p^2 - n^2)^2}} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots (173)$$

или

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{4p^2 - n^2}{4\varepsilon p} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (174)$$

Принимая еще во вниманіе, что

$$\begin{aligned} (4\varepsilon p)^2 + (4p^2 - n^2)^2 &= 16\varepsilon^2 p^2 + 16p^4 - 8p^2 n^2 + n^4 \\ &= 16n^2 p^2 - 16\gamma^2 p^2 + 16p^4 - 8p^2 n^2 + n^4 \\ &= (n^2 + 4p^2)^2 - 16p^2\gamma^2, \end{aligned}$$

будемъ имѣть

$$P = \frac{2\gamma}{\sqrt{(n^2 + 4p^2)^2 - 16p^2\gamma^2}} \sin(2a - \beta_1) \dots\dots\dots\dots (175)$$

Съ другой стороны,

$$u = \frac{T_p}{T} = \frac{n}{p},$$

$$\gamma^2 = n^2 - \varepsilon^2 = n^2\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{n^2}\right) = n^2\mu^2 \text{ (см. формулу (144))}$$

и

$$\varepsilon = n\sqrt{1 - \mu^2};$$

слѣдовательно, мы можемъ формулы (173) и (175) представить еще въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} \sin\beta_1 &= \frac{4 - u^2}{\sqrt{(4 + u^2)^2 - 16\mu^2 u^2}} \\ \cos\beta_1 &= \frac{4u\sqrt{1 - \mu^2}}{\sqrt{(4 + u^2)^2 - 16\mu^2 u^2}} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots (176)$$

и

$$P = \frac{2\gamma}{p^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(4 + u^2)^2 - 16\mu^2 u^2}} \sin(2a - \beta_1).$$

Принимая еще во вниманіе, что, согласно обозначенію (161),

$$a = \psi + \beta,$$

и вводя новую величину

$$\beta_2 = 2\beta - \beta_1, \qquad (177)$$

получимъ окончательно

$$P = \frac{2\gamma}{p^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(4 + u^2)^2 - 16\mu^2 u^2}} \cdot \sin(2\psi + \beta_2).$$

Подставляя это выраженіе для P въ формулу (171) и принимая во вниманіе, что, согласно обозначенію (154),

$$A = A_0^2 (p^2 + \nu^2),$$

получимъ слѣдующее окончательное выраженіе для η:

$$\eta = -\frac{1}{2}\xi \cdot \frac{A_0^2 \left\{1 + \left(\frac{\nu}{p}\right)^2\right\}}{u^2} + \frac{1}{2}\xi \cdot \frac{A_0^2 \left\{1 + \left(\frac{\nu}{p}\right)^2\right\}}{\sqrt{(4 + u^2)^2 - 16\mu^2 u^2}} \sin(2\psi + \beta_2).$$

Введемъ для коэффиціентовъ, входящихъ въ эту формулу, особыя обозначенія:

$$\left.\begin{aligned} B_0 &= \frac{A_0^2}{2u^2}\left\{1 + \left(\frac{\nu}{p}\right)^2\right\} \\ B_1 &= \frac{A_0^2}{2\sqrt{(4 + u^2)^2 - 16\mu^2 u^2}}\left\{1 + \left(\frac{\nu}{p}\right)^2\right\} \end{aligned}\right\} \qquad (178)$$

Тогда η представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$\eta = -\xi B_0 + \xi B_1 \sin(2\psi + \beta_2) \qquad (179)$$

Подставляя эту величину въ формулу (160), получимъ окончательно

$$y + (\rho_0 + B_0 \xi) = A_0 \sin\psi + \xi B_1 \sin(2\psi + \beta_2), \qquad (180)$$

гдѣ, согласно формуламъ (150) и (151),

$$A_0 = \mathfrak{B}_0 \frac{x_m}{(1 + u^2)\sqrt{1 - \mu^2 f(u)}}$$

и

$$\psi = p(t - \tau) + \delta.$$

Таково выраженіе для y при гармоническомъ движеніи почвы и при

наличіи поправочныхъ членовъ на треніе пера о закопченную бумагу (при условіи, что затуханіе достаточно велико и время t не слишкомъ мало).

Найдемъ теперь выраженіе для максимальной ординаты y_1.

Для этого опредѣлимъ корень уравненія

$$\frac{dy}{dt} = 0.$$

Изъ этого уравненія имѣемъ

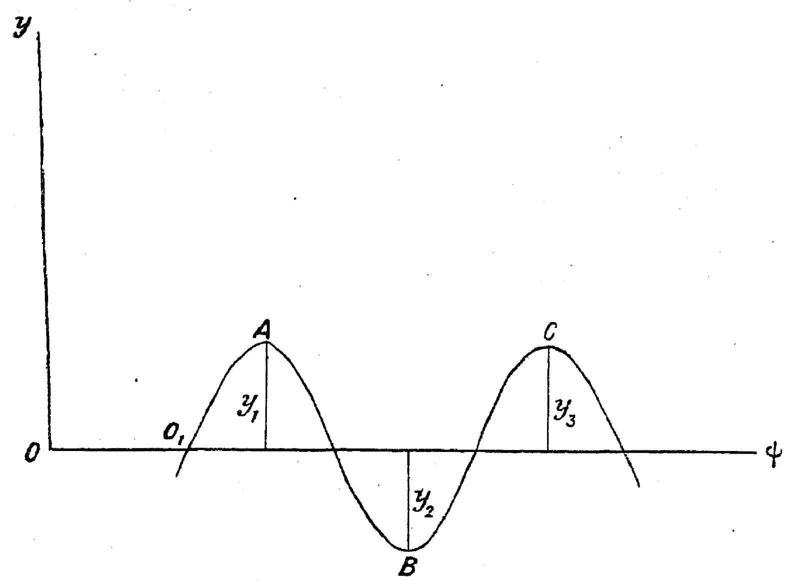
$$\frac{dy}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{dt} = p\,\frac{dy}{d\psi} = 0$$

или

$$\frac{dy}{d\psi} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (181)$$

Возьмемъ ψ за перемѣнную независимую и представимъ ходъ y въ зависимости отъ ψ графически (см. черт. 147).

Черт. 147.



Найдемъ теперь первую максимальную ординату y_1; соотвѣтствующую величину ψ обозначимъ черезъ ψ_1.

Изъ уравненій (180) и (181) мы получимъ

$$0 = A_0 \cos\psi + 2\xi B_1 \cos(2\psi + \beta_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (182)$$

Первый, наименьшій, приближенный корень этого уравненія будетъ

$$\psi_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Болѣе точный корень получится, положивши

$$\psi_1 = \frac{\pi}{2} + \delta_1 \xi, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (183)$$

гдѣ δ_1 есть нѣкоторая постоянная величина.

Для опредѣленія δ_1 подставимъ это выраженіе для ψ_1 въ формулу (182). Тогда, отбрасывая члены высшаго порядка, будемъ имѣть

$$0 = -A_0 \delta_1 \xi - 2\xi B_1 \cos \beta_2$$

или

$$\delta_1 = -\frac{2B_1}{A_0} \cos \beta_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (184)$$

Подставляя теперь выраженіе для ψ_1 изъ формулы (183) въ уравненіе (180), получимъ

$$y_1 + \rho_0 + B_0 \xi = A_0 \sin \left\{\frac{\pi}{2} + \delta_1 \xi\right\} + \xi B_1 \sin(\pi + \beta_2)$$

или, пренебрегая членами порядка ξ^2,

$$y_1 + \rho_0 + (B_0 + B_1 \sin \beta_2)\xi = A_0 \ldots\ldots\ldots\ldots (185)$$

Такъ какъ $y_1 > 0$, и между точками O_1 и A на чертежѣ 147 $\frac{dy}{dt} > 0$, то, согласно предыдущему, въ этомъ интервалѣ и

$$\rho_0 > 0.$$

Найдемъ теперь второй максимумъ y_2; соотвѣтствующую величину ψ обозначимъ черезъ ψ_2.

Второй корень уравненія (182) будетъ

$$\psi_2 = 3\frac{\pi}{2} + \delta_2 \xi.$$

Подставляя эту величину въ то-же уравненіе (182), найдемъ соотвѣтствующее значеніе δ_2.

$$0 = A_0 \delta_2 \xi - 2\xi B_1 \cos \beta_2$$

или

$$\delta_2 = 2\frac{B_1}{A_0} \cos \beta_2 = -\delta_1.$$

41*

Слѣдовательно,

$$\psi_2 = 3\frac{\pi}{2} - \delta_1 \xi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (186)$$

Подставляя эту величину въ уравненіе (180), получимъ

$$y_2 + \rho_0 + B_0\xi = -A_0 - \xi B_1 \sin\beta_2$$

или

$$y_2 + \rho_0 + (B_0 + B_1 \sin\beta_2)\xi = -A_0 \ldots\ldots\ldots\ldots (187)$$

Формула эта показываетъ, что y_2 отрицательно.

Въ интервалѣ между точками A и B (см. черт. 147) $\frac{dy}{dt} < 0$, а потому, согласно предыдущему, въ формулѣ (187) $\rho_0 < 0$, такъ какъ ρ_0 мѣняетъ свой знакъ вмѣстѣ съ $\frac{dy}{dt}$.

Теперь легко убѣдиться, что и ξ также мѣняетъ свой знакъ вмѣстѣ съ ρ_0.

Для этого обратимся къ формулѣ (51), дающей величину силы тренія f въ зависимости отъ относительной скорости движенія пера по закопченной бумагѣ V:

$$f = f_0 + \alpha V + \beta V^2.$$

Вмѣсто V, согласно формулѣ (60), мы можемъ, при малой скорости вращенія барабана (ν мало), подставить y'.

Тогда

$$f = f_0 + \alpha y' + \beta y'^2.$$

Изъ формулъ (61) мы знаемъ, что f_0 пропорціонально ρ_0, а β пропорціонально ξ.

Теперь, по существу дѣла, *абсолютная величина* силы тренія f не можетъ зависѣть отъ направленія скорости y' или, иначе говоря, отъ знака количества y'.

Слѣдовательно, f_0 и β или ρ_0 и ξ должны обязательно мѣнять свой знакъ вмѣстѣ съ y', причемъ, когда $y' > 0$, то и $\xi > 0$.

Направленіе силы f, зависитъ отъ знака при y', но никоимъ образомъ не величина самой силы.

Такимъ образомъ, въ формулѣ (187) мы должны подставить, вмѣсто ρ_0 и ξ, $-\rho_0$ и $-\xi$, понимая теперь подъ ρ_0 положительную величину.

Съ другой стороны, и само y_2 отрицательно.

Условившись, какъ и раньше, понимать подъ величинами максимальныхъ ординатъ y_m всегда *абсолютныя значенія* этихъ величинъ, независимо

отъ знака, мы можемъ формулу (187) представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$y_2 + \rho_0 + (B_0 + B_1 \sin\beta_2)\xi = A_0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(188)$$

Точно также будемъ имѣть

$$\psi_2 = 3\frac{\pi}{2} + \delta_1 \xi.$$

Здѣсь y_2, ρ_0 и ξ суть величины положительныя.

Откинувши индексъ у ρ_0 и понимая всегда подъ ρ и ξ абсолютныя значенія соотвѣтствующихъ коеффиціентовъ тренія, мы будемъ имѣть

$$y_1 + \rho + (B_0 + B_1 \sin\beta_2)\xi = A_0,$$

$$\psi_1 = \frac{\pi}{2} + \delta_1 \xi$$

и

$$y_2 + \rho + (B_0 + B_1 \sin\beta_2)\xi = A_0,$$

$$\psi_2 = 3\frac{\pi}{2} + \delta_1 \xi$$

или, въ общемъ случаѣ,

$$y_m + \rho + (B_0 + B_1 \sin\beta_2)\xi = A_0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(189)$$

и

$$\psi_m = (2m-1)\frac{\pi}{2} + \delta_1 \xi, \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(190)$$

гдѣ величина δ_1 опредѣляется формулой (184).

ξ, какъ мы видѣли въ § 2 этой главы, есть, дѣйствительно, величина положительная.

Подставимъ теперь въ формулу (189) значеніе A_0 изъ формулы (150). Тогда мы будемъ имѣть

$$x_m = \frac{1}{\mathfrak{B}_0}(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}\,[y_m + \rho + (B_0 + B_1 \sin\beta_2)\xi].$$

Но, согласно обозначенію (107) § 4 главы V-ой,

$$(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)} = U,$$

причемъ, для вычисленія $\mathrm{Log}\, U$, имѣется въ Сборникѣ сейсмометрическихъ таблицъ особая таблица V съ двумя аргументами μ^2 и u.

Подставивъ эту величину для U въ предыдущую формулу, получимъ окончательно

$$x_m = \frac{1}{\mathfrak{B}_0} U . (y_m + \Delta y_m), \dots \dots \dots \dots \dots (191)$$

гдѣ

$$\Delta y_m = \rho + (B_0 + B_1 \sin \beta_2) \xi \dots \dots \dots \dots (192)$$

Мы видимъ, такимъ образомъ, что вычисленіе абсолютной величины максимальной амплитуды истиннаго смѣщенія почвы x_m производится, при механической регистраціи, точно также, какъ при простой оптической регистраціи, съ тою только разницей, что къ снятымъ съ сейсмограммы ординатамъ y_m надо присоединить поправку Δy_m, опредѣляемую формулой (192).

Постоянныя ρ и ξ, входящія въ выраженіе Δy_m, опредѣляются заранѣе изъ кривой собственнаго движенія сейсмографа при слабомъ затуханіи.

Найдемъ теперь окончательное выраженіе для Δy_m и опредѣлимъ также величину запаздыванія момента максимума на сейсмограммѣ t_m противъ момента максимума истиннаго смѣщенія почвы t_{x_m}.

Для этого подставимъ выраженія B_0 и B_1 изъ формулъ (178) въ выраженіе Δy_m.

Принимая во вниманіе, что скорость движенія барабана мала (ν мало) и что B_0 и B_1 умножаются на малую величину ξ, мы можемъ, съ совершенно достаточной точностью, пренебречь въ выраженіяхъ для B_0 и B_1 $\left(\frac{\nu}{p}\right)^2$ передъ 1.

Тогда мы получимъ

$$\Delta y_m = \rho + \frac{A_0^2}{2} \left\{ \frac{1}{u^2} + \frac{1}{\sqrt{(4+u^2)^2 - 16\mu^2 u^2}} \sin \beta_2 \right\} \xi.$$

Подставляя сюда значеніе A_0 изъ формулы (189), мы будемъ, съ точностью до членовъ высшаго порядка, имѣть

$$\Delta y_m = \rho + \frac{1}{2} y_m^2 \left\{ \frac{1}{u^2} + \frac{1}{\sqrt{(4+u^2)^2 - 16\mu^2 u^2}} \sin \beta_2 \right\} \xi \dots \dots (193)$$

Опредѣлимъ теперь значенія $\sin \beta_2$ и $\cos \beta_2$.

Согласно обозначенію (177),

$$\beta_2 = 2\beta - \beta_1;$$

слѣдовательно,

$$\sin \beta_2 = \sin 2\beta . \cos \beta_1 - \cos 2\beta . \sin \beta_1$$

$$\cos \beta_2 = \cos 2\beta . \cos \beta_1 + \sin 2\beta . \sin \beta_1 .$$

Такъ какъ въ формулѣ (193) $\sin\beta_2$, а въ формулѣ (190) $\cos\beta_2$ (см. выраженіе для δ_1 — формула (184)) умножаются на ξ, то мы можемъ въ формулахъ (153), опредѣляющихъ значенія $\sin\beta$ и $\cos\beta$, положить $\frac{\nu}{p} = 0$.

Тогда мы будемъ имѣть

$$\sin\beta = 1$$

и

$$\cos\beta = 0;$$

слѣдовательно,

$$\beta = \frac{\pi}{2}$$

и

$$2\beta = \pi.$$

Такимъ образомъ, мы получимъ

$$\sin\beta_2 = + \sin\beta_1$$

$$\cos\beta_2 = - \cos\beta_1$$

или, принимая во вниманіе соотношенія (176),

$$\sin\beta_2 = \frac{4 - u^2}{\sqrt{(4 + u^2)^2 - 16\mu^2 u^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots (194)$$

$$\cos\beta_2 = - \frac{4u\sqrt{1-\mu^2}}{\sqrt{(4 + u^2)^2 - 16\mu^2 u^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots (195)$$

Подставимъ теперь выраженіе для $\sin\beta_2$ изъ формулы (194) въ формулу (193).

Тогда

$$\Delta y_m = \rho + \frac{1}{2} y_m^2 \left[\frac{(4 + u^2)^2 - 16\mu^2 u^2 + u^2(4 - u^2)}{u^2\{(4 + u^2)^2 - 16\mu^2 u^2\}}\right]\xi$$

$$= \rho + \frac{1}{2} y_m^2 \cdot \frac{16 + 8u^2 + u^4 - 16\mu^2 u^2 + 4u^2 - u^4}{u^2\{(4 + u^2)^2 - 16\mu^2 u^2\}}\xi$$

или, окончательно,

$$\Delta y_m = \rho + y_m^2 F(u)\xi, \ldots\ldots\ldots\ldots (196)$$

гдѣ

$$F(u) = 2 \cdot \frac{4 + (3 - 4\mu^2)u^2}{u^2\{(4 + u^2)^2 - 16\mu^2 u^2\}} \ldots\ldots\ldots\ldots (197)$$

Формулы (196) и (197) даютъ, такимъ образомъ, возможность, для каждаго даннаго частнаго случая, опредѣлить поправку Δy_m измѣренной ординаты y_m.

При малыхъ амплитудахъ, вторая поправка, содержащая множителемъ ξ, очень мала.

Опредѣлимъ теперь запаздываніе максимума на сейсмограммѣ.

Обозначимъ моментъ истиннаго максимума смѣщенія почвы черезъ t_{x_m}, а моментъ соотвѣтствующаго максимума на сейсмограммѣ черезъ t_m.

Изъ формулы (141)

$$x = x_m \sin(pt + \delta)$$

слѣдуетъ, что первый максимумъ наступаетъ въ моментъ t_{x_1}, гдѣ

$$pt_{x_1} + \delta = \frac{\pi}{2}.$$

Для второго максимума имѣемъ

$$pt_{x_2} + \delta = 3\,\frac{\pi}{2},$$

а, слѣдовательно, вообще, для m-го максимума,

$$pt_{x_m} + \delta = (2m - 1)\frac{\pi}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (198)$$

Подставляя теперь въ формулу (190) значеніе ψ изъ формулы (151), будемъ имѣть

$$pt_m - p\tau + \delta = (2m - 1)\frac{\pi}{2} + \delta_1 \xi \ldots\ldots\ldots\ldots (199)$$

Вычитая уравненіе (198) изъ уравненія (199), получимъ

$$p(t_m - t_{x_m}) - p\tau = \delta_1 \xi$$

или

$$t_m - t_{x_m} = \tau + \frac{\delta_1}{p} \cdot \xi,$$

или еще

$$t_m - t_{x_m} = \tau + \frac{T_p}{2\pi} \cdot \delta_1 \xi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (200)$$

Опредѣлимъ теперь δ_1.

Для этого обратимся къ формулѣ (184).

Подставляя сюда значеніе B_1 изъ второй изъ формулъ (178), мы будемъ съ тѣмъ-же приближеніемъ имѣть

$$\delta_1 = -\frac{A_0}{\sqrt{(4 + u^2)^2 - 16\mu^2 u^2}} \cos \beta_2.$$

Подставляя сюда значенie A_0 изъ формулы (189) и значенie $\cos\beta_2$ изъ формулы (195), мы получимъ, пренебрегая членами высшихъ порядковъ,

$$\delta_1 = y_m \cdot \frac{4u\sqrt{1-\mu^2}}{(4+u^2)^2 - 16\mu^2 u^2}.$$

Введя обозначенie

$$F_1(u) = \frac{4u\sqrt{1-\mu^2}}{(4+u^2)^2 - 16\mu^2 u^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (201)$$

получимъ окончательно

$$t_m - t_{x_m} = T_p\left[\frac{\tau}{T_p} + \frac{1}{2\pi}\cdot y_m F_1(u)\,\xi\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (202)$$

При опредѣленiи истиннаго момента t_m на сейсмограммѣ, надо, какъ мы видѣли раньше въ § 3 главы IV, вычесть изъ величины абсциссы точки M (максимумъ) поправку на круговое движенie конца пишущаго штифта. Эта поправка отрицательная. Абсолютная ея величина дается формулой (21) той-же главы, а именно

$$\Delta t'_m = \frac{1}{2}\frac{y_m^2}{b\lambda}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (203)$$

гдѣ λ есть длина одной секунды на регистрирномъ валѣ.

Такимъ образомъ, если t'_m есть абсцисса точки M, то,

$$t_m = t'_m - \Delta t'_m \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (204)$$

Слѣдовательно, для опредѣленiя искомаго момента t_{x_m}, мы будемъ имѣть слѣдующую окончательную формулу:

$$t_{x_m} = t'_m - \frac{1}{2}\frac{y_m^2}{b\lambda} - \tau - \frac{T_p}{2\pi}\cdot y_m F_1(u)\,.\,\xi \ldots\ldots\ldots\ldots (205)$$

Въ томъ-же § 3 главы IV мы видѣли, что измѣренная максимальная ордината y_m не требуетъ никакой поправки на круговое движенie пишущаго штифта.

Пояснимъ теперь вышеизложенную теорiю на частномъ примѣрѣ.

Предположимъ, что, изъ наблюденiй при слабомъ затуханiи, получились величины v, ρ и ζ, соотвѣтствующiя ранѣе приведеннымъ даннымъ для I-ой кривой, а именно

$$v = 1{,}248$$

$$\rho = +0{,}28\ {}^{\text{м}}/_{\text{м}}$$

$$\zeta = -0{,}00047.$$

Тогда

$$\Lambda = \mathrm{Lg}_{10} v = 0{,}0962.$$

Изъ таблицы IX Сборника сейсмометрическихъ таблицъ находимъ

$$\mathrm{Lg}\, s = \mathrm{Lg} \sqrt{1 + 0{,}53720\,\Lambda^2} = 0{,}00108$$

или

$$\mathrm{Lg}\,(1 + 0{,}53720\,\Lambda^2) = 0{,}00216.$$

Но, по формулѣ (134),

$$\mu^2 = \frac{1}{1 + 0{,}53720\,\Lambda^2};$$

слѣдовательно,

$$\mathrm{Lg}\,\mu^2 = \bar{1}{,}99784$$

или

$$\mu^2 = 0{,}9950.$$

Обращаясь теперь къ формулѣ (129), по которой

$$\mathfrak{A} = -\frac{6}{1 + 8\mu^2},$$

находимъ

$$\mathfrak{A} = -\frac{6}{8{,}960} = -0{,}670.$$

Слѣдовательно,

$$\xi = \frac{\zeta}{\mathfrak{A}} = \frac{-0{,}00047}{-0{,}670} = 0{,}00070.$$

Предположимъ теперь, что собственный періодъ сейсмографа безъ затуханія $T = 25^s{,}0$, а затуханіе установлено такое, что $\mu^2 = 0{,}80$.

Согласно таблицѣ I-ой Сборника сейсмометрическихъ таблицъ, соотвѣтствующій коеффиціентъ затуханія $v = 4{,}81$.

Длину длиннаго плеча b увеличительнаго прибора примемъ равнымъ 30 см., а длину 1 секунды λ на регистрирномъ валѣ 0,5 $^{\text{м}}/_{\text{м}}$.

Предположимъ теперь, что мы получили съ сейсмограммы

$$T_p = 25^s{,}0$$

и

$$y_m = 80\ ^{\text{м}}/_{\text{м}}.$$

Тогда

$$u = 1.$$

Съ этими величинами μ^2 и u получаются слѣдующія значенія функцій $F(u)$ и $F_1(u)$ (см. формулы (197) и (201)):

$$F(u) = 2\,\frac{4 + (3 - 4\mu^2)\,u^2}{u^2\,\{(4 + u^2)^2 - 16\mu^2 u^2\}} = 2\,\frac{7 - 3{,}2}{25 - 12{,}8} = 2\,\frac{3{,}8}{12{,}2} = 0{,}623$$

и

$$F_1(u) = \frac{4u\sqrt{1 - \mu^2}}{(4 + u^2)^2 - 16\mu^2 u^2} = \frac{4\sqrt{0{,}2}}{25 - 12{,}8} = \frac{1{,}789}{12{,}2} = 0{,}147.$$

Слѣдовательно, согласно формулѣ (196),

$$\Delta y_m = \rho + y_m^2\,F(u)\,\xi = 0{,}28 + 6400 \times 0{,}623 \times 0{,}00070 = 0{,}28 + 2{,}79 = 3{,}07\,{}^{\text{м}}/_{\text{м}}.$$

Поправка на ξ въ величинѣ амплитуды уже вполнѣ ощутительна. При этомъ $\frac{\Delta y_m}{y_m}$ составляетъ 3,8%.

При малыхъ амплитудахъ, эта поправка на ξ имѣетъ уже мало значенія, но зато тогда выступаетъ уже болѣе относительное вліяніе ρ.

Напримѣръ, при $y_m = 10\,{}^{\text{м}}/_{\text{м}}$,

$$\Delta y_m = 0{,}28 + 100 \times 0{,}623 \times 0{,}00070 = 0{,}28 + 0{,}04 = 0{,}32\,{}^{\text{м}}/_{\text{м}}.$$

При этомъ $\frac{\Delta y_m}{y_m}$ составляетъ 3,2%.

Вычислимъ теперь запаздываніе максимума.

По формулѣ (205),

$$t_{x_m} = t'_m - \frac{1}{2}\,\frac{y_m^2}{b\lambda} - \tau - \frac{T_p}{2\pi}\cdot y_m\,F_1(u)\,\xi.$$

На основаніи вышеприведенныхъ данныхъ, имѣемъ, для $y_m = 80\,{}^{\text{м}}/_{\text{м}}$,

$$\frac{1}{2}\,\frac{y_m^2}{b\lambda} = \frac{1}{2}\,\frac{6400}{300.0{,}5} = 21^s{,}33.$$

По таблицѣ VI Сборника сейсмометрическихъ таблицъ находимъ, для $\mu^2 = 0{,}80$ и $u = 1$,

$$\frac{\tau}{T_p} = 0{,}250;$$

слѣдовательно,

$$\tau = 6^s{,}25.$$

Далѣе

$$\frac{T_p}{2\pi}\cdot y_m\,F_1(u)\,.\,\xi = \frac{25}{6{,}28} \times 80 \times 0{,}147 \times 0{,}00070 = 0^s{,}03.$$

Слѣдовательно, полное запаздываніе максимума составляетъ $27^s\!,61$.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что вліяніе поправки ξ здѣсь уже совершенно ничтожно. Другія-же двѣ поправки имѣютъ значительное вліяніе. Въ окончательномъ выводѣ, въ бюллетеняхъ, достаточно давать моментъ t_{x_m} съ точностью до 1 секунды.

Итакъ, эта теорія показываетъ, что, кромѣ обычнаго запаздыванія τ, обуславливаемаго свойствами самого сейсмографа, причемъ величина $\frac{\tau}{T_p}$ опредѣляется очень легко по таблицѣ VI Сборника сейсмометрическихъ таблицъ, существуетъ еще *добавочное* запаздываніе, зависящее отъ тренія пера о закопченную бумагу. Но эта поправка на треніе $\left(\frac{T_p}{2\pi} \cdot y_m F_1(u)\, \xi\right)$ на самомъ дѣлѣ такъ ничтожна, что ею можно вполнѣ пренебречь.

Поставленная нами задача, такимъ образомъ, рѣшена.

Формула (191) даетъ именно возможность опредѣлить максимальную амплитуду истиннаго смѣщенія почвы при механической регистраціи, причемъ соотвѣтствующая поправка Δy_m измѣренной ординаты вычисляется очень просто по формуламъ (196) и (197).

Запаздываніе-же максимума на сейсмограммѣ дается формулой (202), гдѣ значеніе функціи $F_1(u)$ вычисляется по формулѣ (201); но этой поправкой на ξ можно, какъ мы только что видѣли, пренебречь. Истинный-же, искомый моментъ t_{x_m} вычисляется по формулѣ (205).

Что-же касается періода сейсмической волны T_p, то онъ можетъ, когда сейсмографъ снабженъ сильнымъ затуханіемъ, съ достаточнымъ приближеніемъ быть прямо снятъ съ сейсмограммы (см. формулу (180)).

Такимъ образомъ, можно, и при механической регистраціи, опредѣлить всѣ три искомые элемента движенія почвы T_p, x_m и t_{x_m}, каковыя данныя и надлежитъ помѣщать въ сейсмическихъ бюллетеняхъ. Изложенныхъ здѣсь пріемовъ и слѣдовало-бы придерживаться при обработкѣ сейсмограммъ отъ приборовъ съ механической регистраціей. Поправки ρ и ξ имѣютъ значеніе, не столько въ вопросѣ обработки сейсмограммъ въ цѣляхъ опредѣленія истинныхъ величинъ x_m и t_{x_m}, сколько для опредѣленія истинной величины коэффиціента затуханія v, а, слѣдовательно, и величины μ^2.

Изъ всего вышеизложеннаго видно, что обработка сейсмограммъ, при механическомъ способѣ регистраціи, представляется значительно болѣе сложнымъ, чѣмъ при простой оптической или даже гальванометрической регистраціи. Она требуетъ добавочнаго опредѣленія двухъ постоянныхъ ρ и ξ, что значительно усложняетъ дѣло. Но это было-бы еще не столь существенно, если-бы только величины ρ и ξ дѣйствительно сохранялись-бы постоянными. Къ сожалѣнію ρ и ξ въ сильной мѣрѣ зависятъ отъ разныхъ случайныхъ обстоятельствъ, какъ-то отъ толщины слоя сажи на бумагѣ и пр., а потому

они могутъ измѣняться, не только отъ одного листа бумаги до другого, но и для отдѣльныхъ частей того-же листа. Приходится по этому, волей-неволей, довольствоваться нѣкоторыми средними величинами. Въ виду этого, слѣдовало-бы на тѣхъ станціяхъ, гдѣ примѣняется механическій способъ регистраціи, по возможности часто опредѣлять ρ и ξ при слабомъ затуханіи.

При опредѣленіи начальныхъ фазъ P и S, треніе пера не столь вредно, потому что соотвѣтствующія явленія имѣютъ внезапный характеръ, и, если только импульсы достаточно сильные, то соотвѣтствующіе моменты (особенно если разсматривать сейсмограмму подъ лупой) опредѣляются достаточно надежно.

Минутныя марки отмѣчаются на сейсмограммѣ, или короткими перерывами въ записи кривой, что осуществляется легкимъ поднятіемъ пишущаго пера, хотя этотъ пріемъ и не вполнѣ цѣлесообразный, такъ какъ этимъ можетъ нарушиться нѣсколько правильность движенія самого сейсмографа, или-же отдѣльнымъ перомъ, дающимъ, при помощи особаго электромагнита, каждую минуту особую марку на сейсмограммѣ.

Въ послѣднемъ случаѣ, при опредѣленіи различныхъ моментовъ на сейсмограммѣ, слѣдуетъ непремѣнно считаться съ такъ называемымъ *параллаксомъ* обоихъ перьевъ.

Этотъ параллаксъ надо опредѣлять каждый разъ при смѣнѣ бумаги.

Для этой цѣли, въ моментъ отмѣтки минутной марки, даютъ сейсмографу небольшой толчокъ; этимъ тотчасъ-же опредѣлится линейное разстояніе между обоими перьями, откуда, зная длину 1 минуты на валѣ, легко получить и величину соотвѣтствующаго параллакса въ секундахъ.

Механическій способъ регистраціи обладаетъ, однако, существеннымъ преимуществомъ дешевизны, а потому онъ и имѣетъ такое широкое распространеніе на разныхъ сейсмическихъ станціяхъ. Къ этому способу невольно приходится прибѣгать на сейсмическихъ станціяхъ второго разряда, которыя устраиваются обыкновенно въ сейсмическихъ областяхъ, и гдѣ *число* отдѣльныхъ станцій имѣетъ уже преобладающее значеніе.

Еще одно преимущество этого способа регистраціи заключается въ его наглядности, тогда какъ, при оптической и гальванометрической регистраціи, на сейсмограммахъ до ихъ проявленія ровно ничего не видно. Въ этомъ отношеніи приборы съ механической регистраціей полезны и на сейсмическихъ станціяхъ перваго разряда, въ цѣляхъ предупрежденія завѣдующаго станціей о происшедшемъ землетрясеніи.

Въ остальномъ механическій способъ уступаетъ другимъ методамъ регистраціи, главнымъ образомъ въ отношеніи точности получаемыхъ результатовъ. По существу дѣла, способъ этотъ, если только добиваться

вполнѣ надежныхъ результатовъ, далеко не простой и сопряженъ съ немалыми практическими затрудненіями.

Въ настоящей главѣ указаны пріемы, какимъ образомъ можно съ этими затрудненіями бороться, но изложенная теорія никоимъ образомъ не можетъ считаться строгой теоріей. Она неизбѣжно носитъ на себѣ характеръ извѣстнаго приближенія, но и никакая строгая теорія не могла-бы учесть всѣхъ случайныхъ измѣненій въ элементахъ тренія.

Это непостоянство коеффиціентовъ тренія и составляетъ главный и весьма существенный недостатокъ механическаго способа регистраціи.

Тѣмъ не менѣе, въ рукахъ опытнаго наблюдателя, при тщательномъ изслѣдованіи собственнаго движенія сейсмографа и при внимательномъ отношеніи къ дѣлу, механическій способъ регистраціи можетъ дать вполнѣ удовлетворительные результаты, даже въ вопросѣ опредѣленія характера истиннаго движенія почвы, что, какъ мы видѣли, составляетъ одну изъ главнѣйшихъ задачъ современной сейсмометріи.